

Convergences et approximations Chapitre 13

Corrections exercices types

Exercice 1. 13-1

1. Soit X une var suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

Montrons que : $\forall \epsilon > 0, P(|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.

On a $E(X) = \frac{1}{\lambda}, V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Alors d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev appliquée à X : $\forall \epsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$.

C'est à dire ici :

$\forall \epsilon > 0, P(|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.

On a $[X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon] \cup [X - \frac{1}{\lambda} \leq -\epsilon] = [|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \epsilon]$.

Donc :

$[X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon] \subset [|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \epsilon]$.

Par croissance des probabilités, on en déduit : $P([X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon]) \leq P(|X - \frac{1}{\lambda}| \geq \epsilon)$.

Ainsi : $\forall \epsilon > 0, P([X - \frac{1}{\lambda} \geq \epsilon]) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.

Cette inégalité étant vraie pour tout nombre $\epsilon > 0$, en prenant $\epsilon = \frac{2}{\lambda}$ on a bien :

$$P(X \geq 3/\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{4\lambda^2} = \frac{1}{4}.$$

2. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une var X suivant la loi normale centrée réduite, mon-

trons que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ donc $E(X) = 0, V(X) = 1$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à X donne alors : $\forall \epsilon > 0, P(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2}$.

Or, $P(|X| \geq \epsilon) = 1 - P(|X| \leq \epsilon) = 1 - P(-\epsilon \leq X \leq \epsilon) = 1 - (\Phi(\epsilon) - \Phi(-\epsilon)) = 2 - 2\Phi(\epsilon)$

On a donc $\forall \epsilon > 0, 2 - 2\Phi(\epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \Leftrightarrow 2\Phi(\epsilon) - 1 \geq 1 - \frac{1}{\epsilon^2}$.

En prenant $\epsilon = x$:

on a donc : $2\Phi(x) - 1 \geq 1 - \frac{1}{x^2}$ (*).

Mais on : $\forall x > 0, \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}(\Phi(x) - \Phi(0)) = \sqrt{2\pi}(\Phi(x) - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}(2\Phi(x) - 1)$.

Donc : $\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2\Phi(x) - 1$.

D'où grâce à l'inégalité (*) : $\forall x > 0, \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq 1 - \frac{1}{x^2}$.

C'est à dire : $\forall x > 0, \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 2. 13-2

Soit X une var à densité. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $X_n = X.e^{1/n}$. Montrons que la suite (X_n) converge en loi vers X .

$\forall x \in \mathbb{R},$

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x)$$

$$= P(X.e^{1/n} \leq x)$$

$$= P(X \leq x.e^{-1/n}) \text{ car } e^{1/n} > 0$$

$$= F_X(x.e^{-1/n})$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x e^{-1/n} = x$, donc par continuité de la fonction de répartition F_X sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_X(x e^{-1/n}) = F_X(x).$$

Ce qui justifie que la suite (X_n) converge en loi vers X .

Exercice 3. 13-3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de va telles que pour tout entier naturel n non nul, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(1/n)$.

Montrons que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

pour tout entier naturel n non nul, $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(1/n)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, P(X_n = k) = \frac{e^{-1/n}}{k! n^k}$.

Si $k = 0 : P(X_n = 0) = e^{-1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Si $k \in \mathbb{N}^*, P(X_n = k) = \frac{e^{-1/n}}{k! n^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc on a bien que la suite (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Exercice 4. 13-4

Pour tout entier naturel n , on considère une var S_n suivant la loi binomiale de paramètres n et p (avec $0 < p < 1$).
Déterminons $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np)$.

On a $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ donc S_n est une somme de var de Bernoulli indépendantes, de paramètre $p : S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, où $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

$$E(S_n) = np, V(S_n) = npq, E(X_k) = p, V(X_k) = pq.$$

On va donc pouvoir appliquer le théorème central limite à la suite de variables $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*} : S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée réduite, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^* \leq x) = \Phi(x).$$

$$\text{Or, ici } [S_n \leq np] = [S_n - np \leq 0] = \left[\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq 0 \right] = [S_n^* \leq 0].$$

$$\text{par conséquent : } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n \leq np) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(S_n^* \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 5. 13-5

1. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var mutuellement indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $X_n = \sum_{i=1}^n B_i$.

$$\text{Alors par linéarité : } E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(B_i) = np$$

$$\text{par indépendance : } V(X_n) = \sum_{i=1}^n V(B_i) = npq$$

On a $X_n^* = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$, d'après le TCL, $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée réduite, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n^* \leq x) = \Phi(x).$$

2. Soit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de var mutuellement indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre α et soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telles que $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$.

$$\text{Alors par linéarité : } E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = n\alpha$$

$$\text{par indépendance : } V(X_n) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) = n\alpha$$

On a $X_n^* = \frac{X_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}}$, d'après le TCL, $(X_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée réduite, c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n^* \leq x) = \Phi(x).$$

Exercice 6. Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{B}(900, 0.5)$. Donnons une valeur approchée de $P([405 \leq X \leq 495])$.

D'après l'approximation loi binomiale -loi normale (car n est grand), on a :
 X peut être approché par une variable Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(450, 225)$.
donc $P([405 \leq X \leq 495]) \simeq P([405 \leq Y \leq 495]) = P(\frac{405-450}{\sqrt{225}} \leq \frac{Y-450}{\sqrt{225}} \leq \frac{495-450}{\sqrt{225}}) = P(-3 \leq Y^* \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) - 1 \simeq 0.9973$.

Exercice 7. Soit X une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{P}(64)$. Donnons une valeur approchée de $P([X \leq 74])$.

D'après l'approximation loi de poisson -loi normale (car λ est grand), on a :
 X peut être approché par une variable Y qui suit la loi normale $\mathcal{N}(64, 64)$.
donc $P([X \leq 74]) \simeq P(Y \leq 74) = P(\frac{Y-64}{8} \leq \frac{74-64}{8}) = P(Y^* \leq 1.25) = \Phi(1,25) \simeq 0.8944$.