

Formulaire – Fonctions usuelles

TABLE DES MATIÈRES

Fonctions polynomiales et rationnelles	2
Fonctions polynomiales	2
Fonctions rationnelles	3
Fonctions trigonométriques	4
Fonctions trigonométriques réciproques	7
Arcsin	7
Arccos	8
Arctan	9
Fonctions logarithmes	10
Logarithme népérien	10
Logarithmes de base a	12
Fonctions exponentielles	14
Exponentielle	14
Exponentielles de base a	16
Fonctions cosinus et sinus hyperboliques	18
Fonctions puissances	20

Fonctions polynomiales et rationnelles

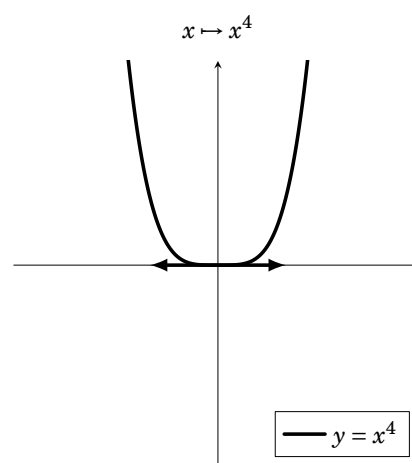
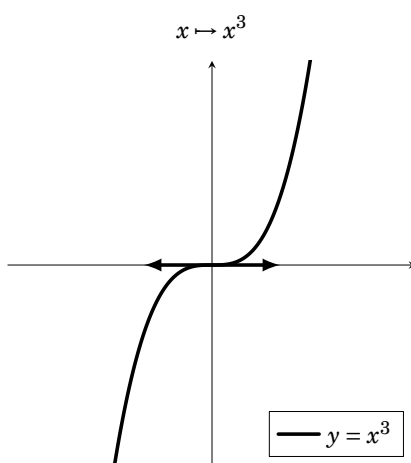
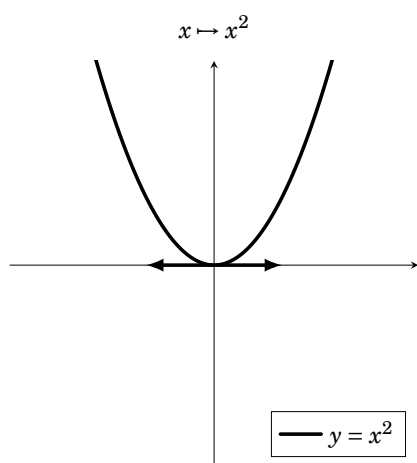
Fonctions polynomiales

On dit qu'une fonction f est *polynomiale* lorsqu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$f : x \mapsto a_0 + a_1 \times x + \dots + a_n \times x^n.$$

Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que f est une fonction polynomiale de degré n .

Propriétés algébriques	Régularité
	► Une fonction polynomiale est définie sur $\mathbb{R}$. ► Une fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$. ► Une fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$. ► Une fonction polynomiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées successives sont des fonctions polynomiales.
Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ • est paire, • est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$, • est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, • réalise une bijection de $[0, +\infty[$ et sur $[0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est notée $\sqrt[n]{\cdot}$. ► Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, la fonction $x \mapsto x^n$ • est impaire, • est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, • réalise une bijection de $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\sqrt[n]{\cdot}$.	► Si $a_n \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n \times x^n,$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n \times x^n.$ La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction polynomiale est la limite de son terme de plus au degré.



Fonctions rationnelles

On dit qu'une fonction f est *rationnelle* lorsqu'il existe deux fonctions polynomiales g et h (avec h qui n'est pas la fonction nulle) telle que :

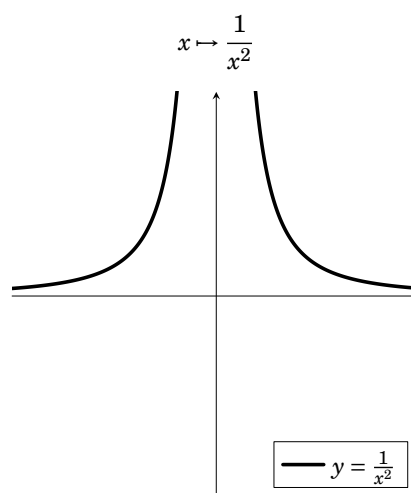
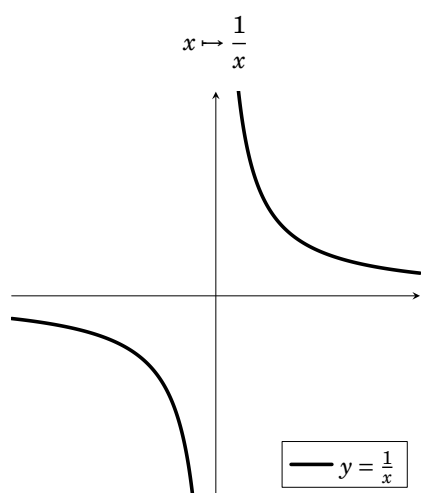
$$f : x \mapsto \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p \in \mathbb{N}$, $(b_0, b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ avec $b_p \neq 0$ tels que :

$$f : x \mapsto \frac{a_0 + a_1 \times x + \dots + a_n \times x^n}{b_0 + b_1 \times x + \dots + b_p \times x^p}.$$

La condition $b_p \neq 0$ assure que la fonction $x \mapsto b_0 + b_1 \times x + \dots + b_p \times x^p$ n'est pas la fonction nulle.

Propriétés algébriques	Régularité
	► Une fonction rationnelle est définie sur $\{x \in \mathbb{R} \mid h(x) \neq 0\}$, autrement dit, sur l'ensemble des réels où son dénominateur ne s'annule pas. ► Une fonction rationnelle est continue sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. ► Une fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. ► Une fonction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas, et ses dérivées successives sont encore des fonctions rationnelles.
Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est • paire, • strictement croissante sur $] -\infty, 0[$, • strictement décroissante sur $] 0, +\infty[$, ► Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ est • impaire, • strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, +\infty[$.	► Avec les notations de la définition, si $a_n \neq 0$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_p} \times x^{n-p},$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a_n}{b_p} \times x^{n-p}.$ La limite en $+\infty$ et $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.



Fonctions trigonométriques

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

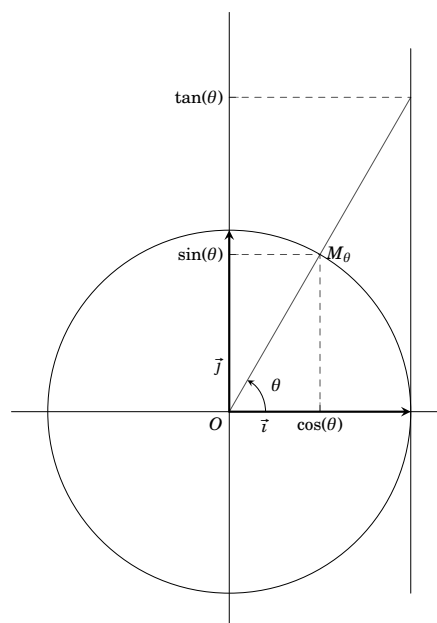
- Le *cercle trigonométrique* est le cercle de centre O et de rayon 1.
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note M_θ le point de coordonnées (x_θ, y_θ) du cercle trigonométrique dont une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_\theta})$ est θ . On pose alors $\cos(\theta) = x_\theta$ et $\sin(\theta) = y_\theta$. Notons que

$$\overrightarrow{OM_\theta} = \cos(\theta) \cdot \vec{i} + \sin(\theta) \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

- Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq \frac{\pi}{2}[\pi]$.

La *tangente de θ* est le réel noté $\tan(\theta)$ et défini par :

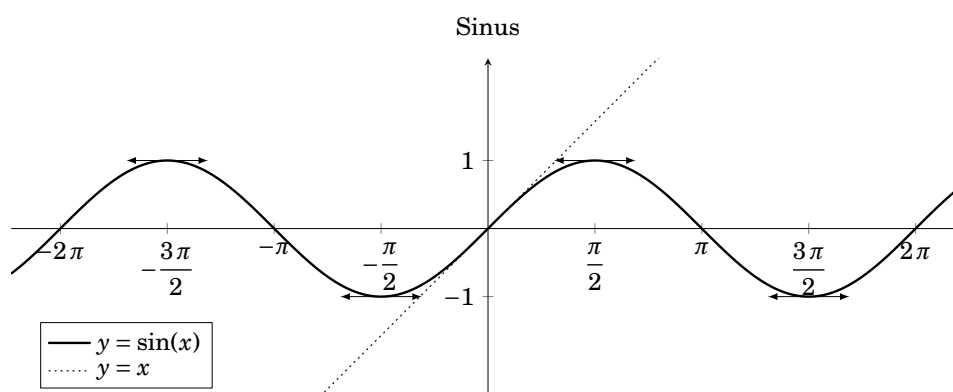
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$



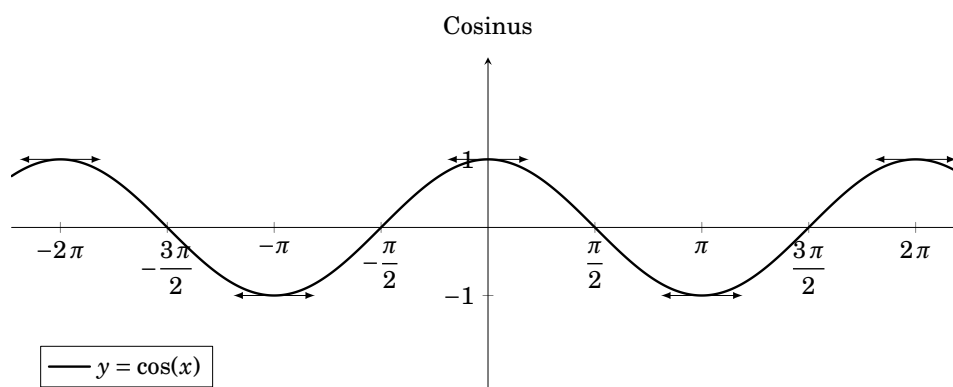
Propriétés algébriques	Régularité
Voir le formulaire Trigonométrie.	► $\cos$ et $\sin$ sont définies sur $\mathbb{R}$. ► $\tan$ est définie sur $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ où $I_k = \left] -\frac{\pi}{2} + k \times \pi, \frac{\pi}{2} + k \times \pi \right[.$ ► $\cos$ et $\sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$. ► $\tan$ est continue sur tout intervalle de la forme I_k, avec $k \in \mathbb{Z}$. ► $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$ ► $\tan$ est dérivable sur tout intervalle de la forme I_k, avec $k \in \mathbb{Z}$, et, pour tout $x \in I_k$, $\tan'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2.$ ► $\cos$ et $\sin$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n \times \pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n \times \pi}{2}\right).$ ► $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle de la forme I_k, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► cos et sin sont 2π-périodiques. ► tan est π-périodique. ► cos est paire. ► sin et tan sont impaires. ► cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. ► sin est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$. ► tan est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. ► Équation de la tangente aux graphes de sin et tan au point d'abscisse 0 : $y = x$.	► Nombre dérivé en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$ ► Limite usuelle : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$ ► $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty$. ► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \leq 1$ et $\sin(x) \leq 1$. ► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) \leq x$.

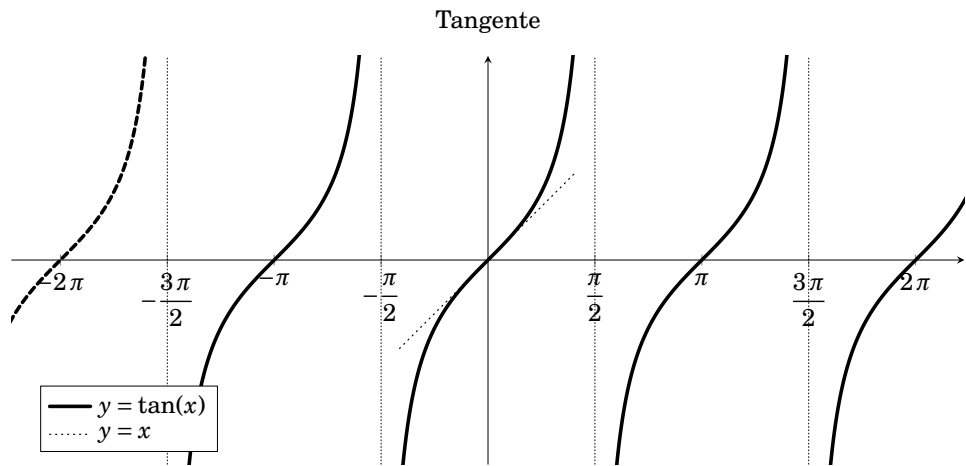
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	1	0	-1	0



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos(x)	1	0	-1	0	1



x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
tan	$-\infty$	0	$+\infty$



Fonctions trigonométriques réciproques

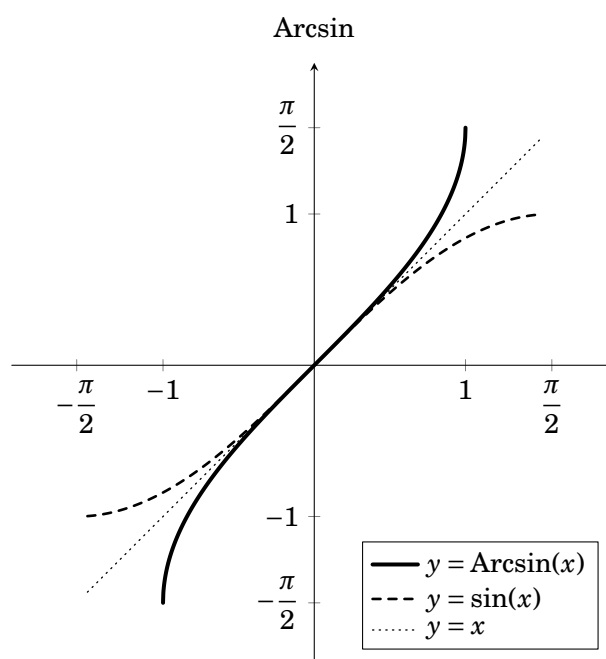
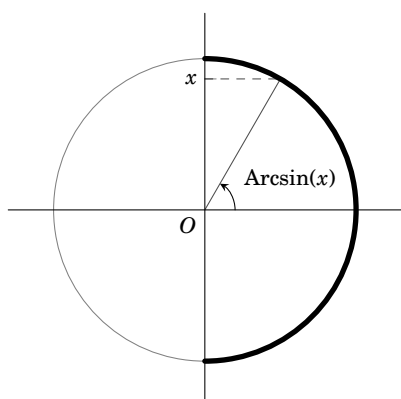
Fonction Arcsin

La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$ dont la bijection réciproque est appelée *arcsinus* et est notée

$$\begin{aligned} \text{Arcsin} : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x &\mapsto \text{Arcsin}(x). \end{aligned}$$

Propriétés algébriques	Régularité
► Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\text{Arcsin}(x)$ est l'unique angle compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont le sinus est x. ► On a, pour tout $(x, y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [-1, 1]$, $y = \sin(x) \iff x = \text{Arcsin}(y)$. ► On a : $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$. ► On a : $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$. ► On a : $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$. ► On a : $\forall x \in]-1, 1[$, $\tan(\text{Arcsin}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.	► Arcsin est définie sur $[-1, 1]$. ► Arcsin est continue sur $[-1, 1]$. ► Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ ► Arcsin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► Arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$. ► Arcsin réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ► Arcsin est impaire. ► Équation de la tangente au graphe de Arcsin au point d'abscisse 0 : $y = x$.	► Nombre dérivé en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arcsin}(x)}{x} = 1.$



x	-1	0	1
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

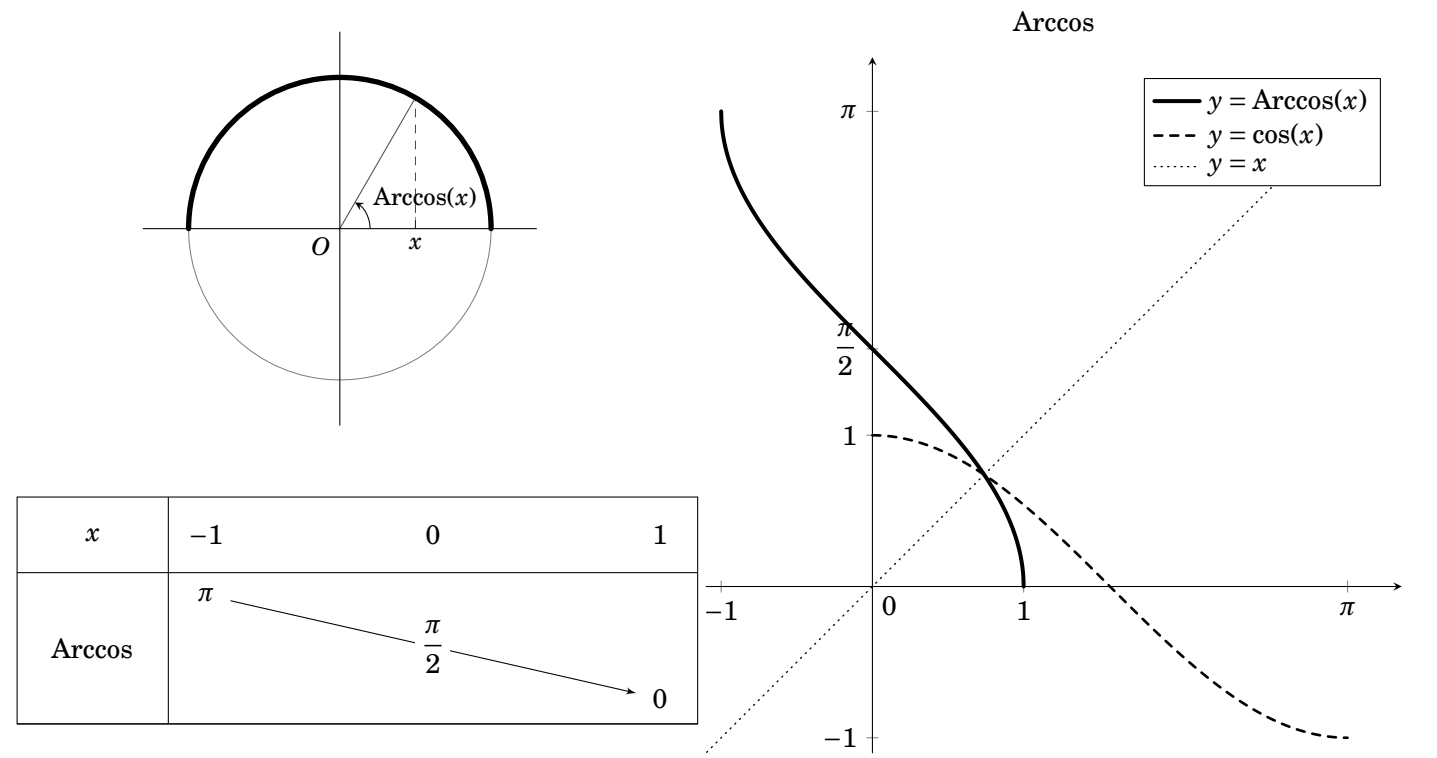
Fonction Arccos

La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$ dont la bijection réciproque est appelée *arccosinus* et est notée

Arccos : $[-1,1] \rightarrow [0,\pi]$
 $x \mapsto \text{Arccos}(x).$

Propriétés algébriques	Régularité
► Pour tout $x \in [-1,1]$, $\text{Arccos}(x)$ est l'unique angle compris entre 0 et π dont le cosinus est x. ► On a, pour tout $(x,y) \in [0,\pi] \times [-1,1]$, $y = \cos(x) \iff x = \text{Arccos}(y)$. ► On a : $\forall x \in [0,\pi], \text{Arccos}(\cos(x)) = x$. ► On a : $\forall x \in [-1,1], \cos(\text{Arccos}(x)) = x$. ► On a : $\forall x \in [-1,1], \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$. ► On a : $\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \tan(\text{Arccos}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. ► (À savoir montrer) Pour tout $x \in [-1,1]$, on a : $\text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2},$ et $\text{Arccos}(x) + \text{Arccos}(-x) = \pi.$	► Arccos est définie sur $[-1,1]$. ► Arccos est continue sur $[-1,1]$. ► Arccos est dérivable sur $] -1,1[$ et, pour tout $x \in] -1,1[$, $\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$ ► Arccos est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1,1[$.

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$. ► Arccos réalise une bijection de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$.	



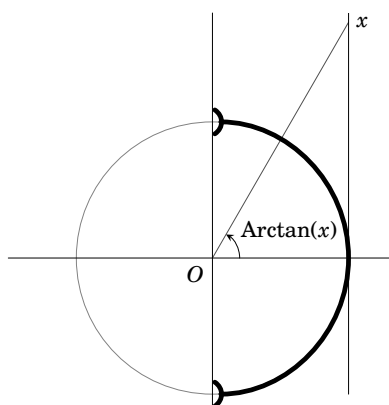
Fonction Arctan

La fonction $\tan$ réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est appelée *arctangente* et est notée

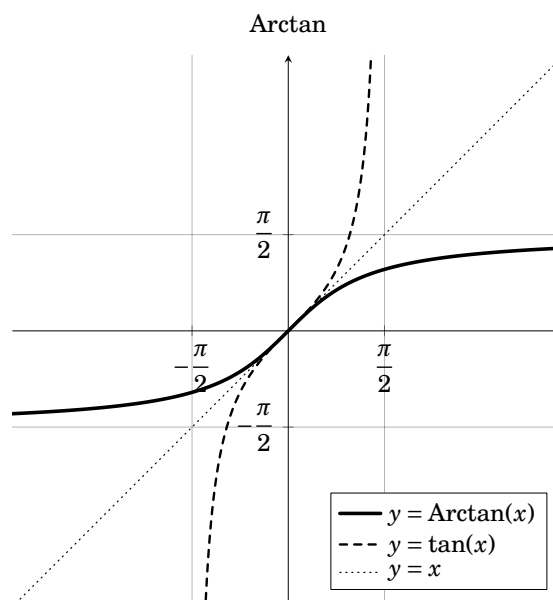
$$\begin{aligned} \text{Arctan} : \mathbb{R} &\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \text{Arctan}(x). \end{aligned}$$

Propriétés algébriques	Régularité
► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}(x)$ est l'unique angle strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente est x. ► On a, pour tout $(x, y) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \mathbb{R}$, $y = \tan(x) \iff x = \text{Arctan}(y)$. ► On a : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{Arctan}(\tan(x)) = x$. ► On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}(x)) = x$. ► On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. ► On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. ► (À savoir montrer) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$	► Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. ► Arctan est continue sur $\mathbb{R}$. ► Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$ ► Arctan est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ► Arctan est impaire. ► Arctan réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. ► Équation de la tangente au graphe de Arctan au point d'abscisse 0 : $y = x$.	► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$. ► Nombre dérivé en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = 1.$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



Fonctions logarithmes

Logarithme népérien

On appelle *fonction logarithme népérien* l'unique primitive de la fonction $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ qui s'annule en 1.

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

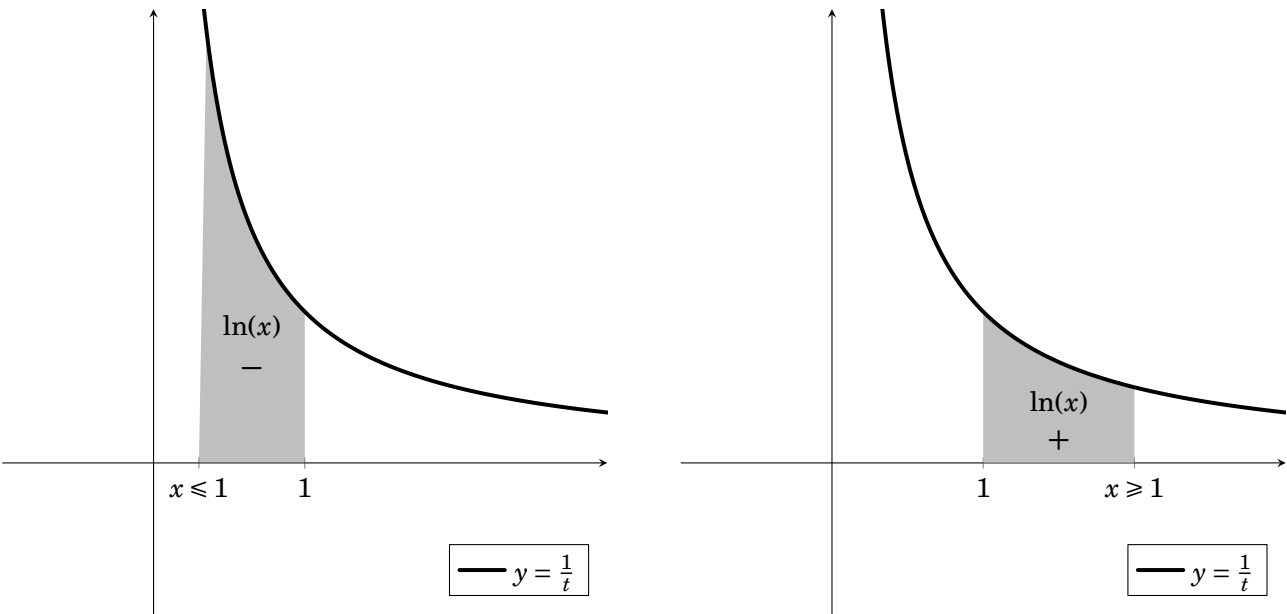
On la note :

$$\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

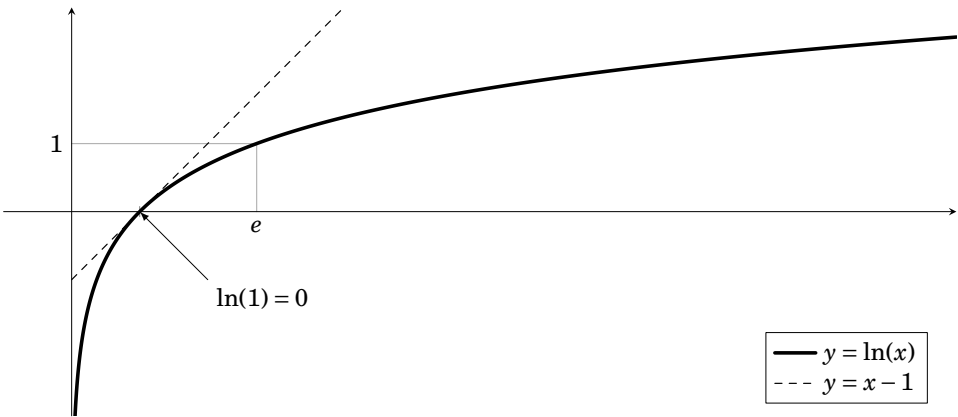
Propriétés algébriques	Régularité
► Pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y),$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x),$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y),$ $\ln(x^n) = n \times \ln(x).$ ► $\ln(1) = 0$. ► $\ln(e) = 1$ (voir fonction exponentielle). Le réel e est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = 1$. ► Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x^y) = y \times \ln(x)$ (voir fonctions puissances).	► $\ln$ est définie sur $]0, +\infty[$. ► $\ln$ est continue sur $]0, +\infty[$. ► $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. ► $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{N}^*$, $\ln^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{x^n}$

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► $\ln$ est strictement croissante de $]0, +\infty[$. ► $\ln$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. ► $\ln$ est concave. ► Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = x - 1$	► Pour tout $x > 1$, $\ln(x) > 0$. ► Pour tout $0 < x < 1$, $\ln(x) < 0$. ► Limites aux bornes de l'ensemble de définition : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty.$ ► Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\ln(x) \leq x - 1$. Pour tout $u \in]-1, +\infty[$, on a $\ln(1 + u) \leq u$. ► Nombre dérivé en 1 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1.$ ► Croissances comparées : soient α et β dans $]0, +\infty[$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x ^\alpha \times \ln(x) ^\beta = 0.$ (voir fonctions puissances)



x	0	1	$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	0	$+\infty$

Logarithme népérien



Logarithmes de base a

Soit $a \in]0, +\infty[$ et $a \neq 1$, on appelle *fonction logarithme de base a* la fonction notée $\log_a$ et définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Remarque : La fonction logarithme népérien est la fonction logarithme de base e .

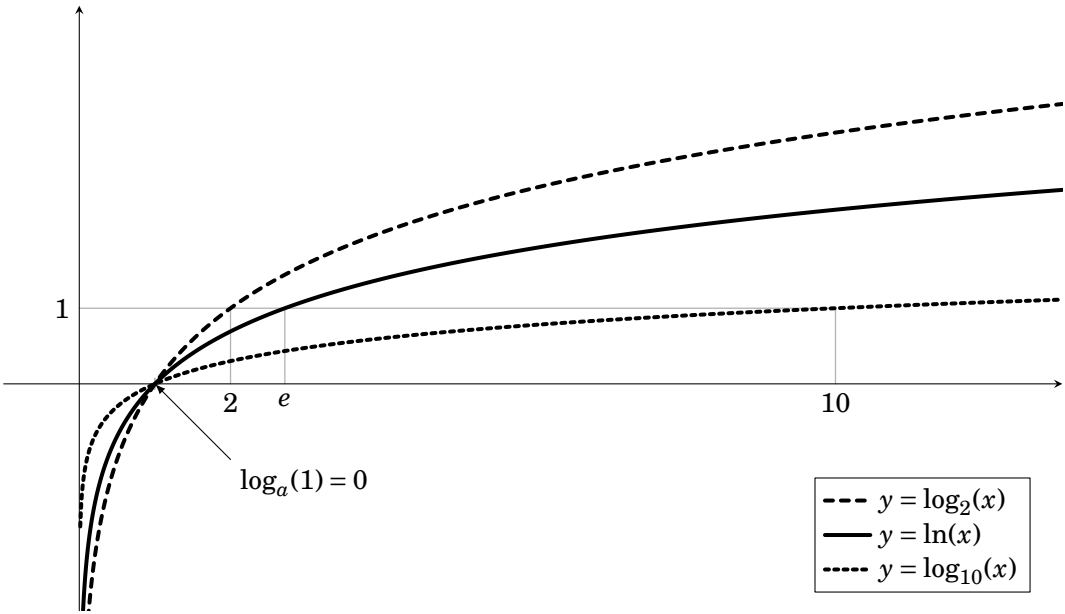
Propriétés algébriques	Régularité
► Pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y),$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$ $\log_a(x^n) = n \times \log_a(x),$ $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x).$ ► $\log_a(1) = 0$. ► $\log_a(a) = 1$. ► Pour tout $b > 0$, $\log_a(a^b) = b$. ► Cas particuliers usuels : • $a = 2$: logarithme en base 2 (informatique). • $a = 10$: logarithme décimal (physique, chimie, SI,...) aussi noté $\log$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\log(10^n) = n$.	► $\log_a$ est définie sur $]0, +\infty[$. ► $\log_a$ est continue sur $]0, +\infty[$. ► $\log_a$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\log'_a(x) = \frac{1}{\ln(a) \times x}.$ ► $\log_a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $(x, n) \in]0, +\infty[\times \mathbb{N}^*$, $\log_a^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \times (n-1)!}{\ln(a) \times x^n}.$

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► Si $a > 1$, alors $\log_a$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. ► Si $0 < a < 1$, alors $\log_a$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. ► $\log_a$ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$. ► Si $a > 1$, $\log_a$ est concave. ► Si $0 < a < 1$, $\log_a$ est convexe.	

$a \in]0, 1[$			
x	0	a	$+\infty$
$\log_a$	$+\infty$	1	$-\infty$

$a > 1$			
x	0	a	$+\infty$
$\log_a$	$-\infty$	1	$+\infty$

Logarithmes de base a



Fonctions exponentielles

Exponentielle

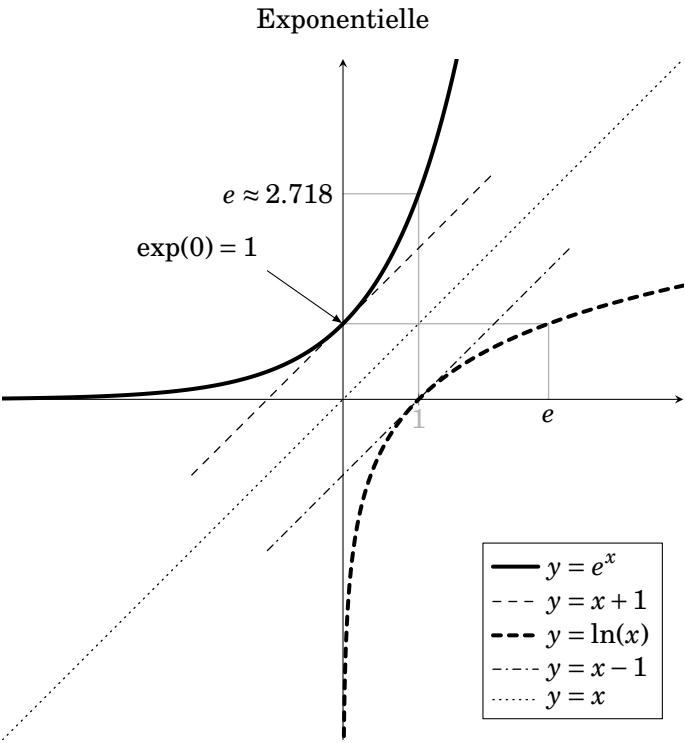
On appelle *fonction exponentielle* la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. On la note :

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto \exp(x) = e^x\end{aligned}$$

Propriétés algébriques	Propriétés analytiques
► Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad \text{ou} \quad e^{x+y} = e^x \times e^y,$ $\exp(n \times x) = (\exp(x))^n \quad \text{ou} \quad e^{n \times x} = (e^x)^n,$ $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \text{ou} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y},$ $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad \text{ou} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$ ► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$. ► Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\exp(\ln(x)) = x$. ► Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. On a : $y = e^x$ si, et seulement si, $x = \ln(y)$. ► $\exp(0) = e^0 = 1$. ► $\exp(1) = e^1 = e$. ► Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(e^a)^b = e^{a \times b}$ (voir fonctions puissances)	► $\exp$ est définie sur $\mathbb{R}$. ► $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$. ► $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$. ► $\exp$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\exp^{(n)}(x) = \exp(x)$.

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. ► $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ► $\exp$ est convexe. ► Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$.	► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\exp(x) \geq x + 1$. ► Limites aux bornes de l'intervalle de définition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty.$ ► Nombre dérivé en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1.$ ► Croissances comparées : Soient α et β dans $]0, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha \times x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x ^\beta \times e^{\alpha \times x} = 0.$ (voir fonctions puissances)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
exp			



Exponentielles de base a

Soit $a \in]0, +\infty[$ et $a \neq 1$, on appelle *fonction exponentielle de base a* la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a . On la note

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\rightarrow]0, +\infty[\\ x &\mapsto \exp(x \times \ln(a)) = e^{x \times \ln(a)}. \end{aligned}$$

Remarque : La fonction exponentielle est la fonction exponentielle de base e .

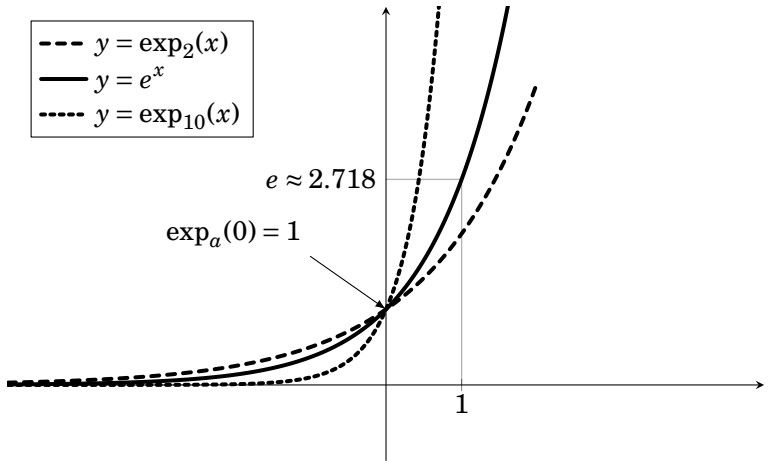
Propriétés algébriques	Régularité
► Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, $\begin{aligned} \exp_a(x + y) &= \exp_a(x) \times \exp_a(y), \\ \exp_a(n \times x) &= (\exp_a(x))^n, \\ \exp_a(x - y) &= \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}, \\ \exp_a(-x) &= \frac{1}{\exp_a(x)}. \end{aligned}$ ► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\log_a \circ \exp_a(x) = x$. ► Pour tout $y \in]0, +\infty[$, $\exp_a \circ \log_a(y) = y$. ► Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. On a : $y = \exp_a(x)$ si, et seulement si, $x = \log_a(y)$. ► $\exp_a(0) = 1$ ► $\exp_a(1) = a$. ► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x$ (voir fonctions puissances)	► $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$. ► $\exp_a$ est continue sur $\mathbb{R}$. ► $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'_a(x) = \ln(a) \times e^{x \times \ln(a)}.$ ► $\exp_a$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\exp_a^{(n)}(x) = (\ln(a))^n \times e^{x \times \ln(a)}.$

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► Si $a > 1$, alors $\exp_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ► Si $0 < a < 1$, alors $\exp_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. ► $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. ► $\exp_a$ est convexe.	► Limites aux bornes de l'intervalle de définition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{si } a > 1, \end{cases}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < a < 1 \\ +\infty & \text{si } a > 1. \end{cases}$

$a \in]0, 1[$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp_a$	$+\infty$	0

$a > 1$		
x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp_a$	0	$+\infty$

Exponentielles de base a



Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

On appelle *fonction cosinus hyperbolique* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On appelle *fonction sinus hyperbolique* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

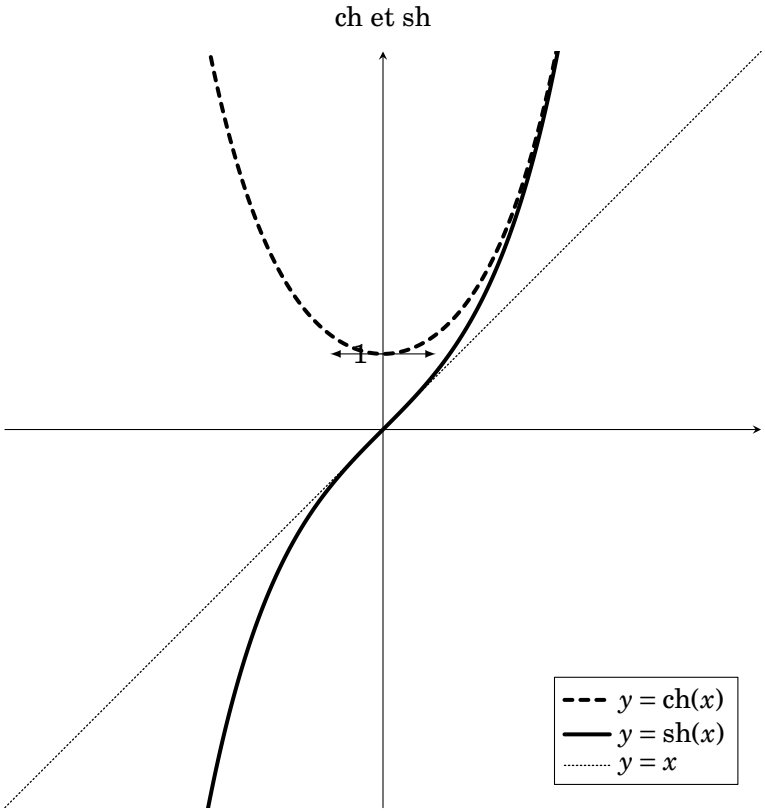
$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Propriétés algébriques	Régularité
► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{aligned} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) &= e^x, \\ \operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) &= e^{-x}, \\ (\operatorname{ch}(x))^2 - (\operatorname{sh}(x))^2 &= 1. \end{aligned}$ ► $\operatorname{ch}(0) = 1$. ► $\operatorname{sh}(0) = 0$. ► Pour résoudre une équation de la forme $\operatorname{ch}(x) = \lambda$ ou $\operatorname{sh}(x) = \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $X = e^x$ et on se ramène à une équation du second degré.	► ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ ► ch et sh sont continues sur $\mathbb{R}$. ► ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x) \text{ et } \operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x).$ ► ch et sh sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\operatorname{ch}^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$ et $\operatorname{sh}^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}(x) & \text{si } n \text{ est pair} \\ \operatorname{ch}(x) & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► ch est strictement décroissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. ► ch est paire. ► ch est convexe. ► sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ► sh est impaire. ► Équation de la tangente au graphe de ch au point d'abscisse 0 : $y = 0$ ► Équation de la tangente au graphe de sh au point d'abscisse 0 : $y = x$	► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \geq 1$ et $\operatorname{ch}(x) \geq e^x$. ► Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) \leq e^x$ et $\operatorname{sh}(x) < \operatorname{ch}(x)$. ► Limites aux bornes de l'ensemble de définition : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$ ► Nombre dérivé en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1.$ ► Limite usuelle : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{ch}'(x)$	$-$	0	$+$
ch	$+\infty$	1	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{sh}'(x)$		$+$	
sh	$-\infty$	0	$+\infty$



Fonctions puissances

► Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle *fonction puissance d'exposant n* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \stackrel{\text{Définition}}{=} \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}. \end{aligned}$$

► Soit $n \in \mathbb{Z}_-^*$, on appelle *fonction puissance d'exposant n* la fonction définie sur $] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} f_n :] -\infty, 0[\cup] 0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \stackrel{\text{Définition}}{=} \frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{-n \text{ fois}}}. \end{aligned}$$

► Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On appelle *fonction puissance d'exposant α* la fonction définie sur $] 0, +\infty[$ par :

$$\begin{aligned} f_\alpha :] 0, +\infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^\alpha \stackrel{\text{Définition}}{=} e^{\alpha \times \ln(x)}. \end{aligned}$$

Propriétés algébriques	Régularité
► Par propriétés des fonctions exponentielle et logarithme népérien, l'égalité $x^\alpha = e^{\alpha \times \ln(x)}$ est encore valable lorsque $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$. ► Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Sous réserve d'existence des expressions suivantes, on a : $\begin{aligned} (x \times y)^\alpha &= x^\alpha \times y^\alpha, & x^\alpha \times x^\beta &= x^{\alpha+\beta}, \\ x^{-\alpha} &= \frac{1}{x^\alpha}, & \frac{x^\alpha}{x^\beta} &= x^{\alpha-\beta}, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha &= \frac{x^\alpha}{y^\alpha}, & (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha \times \beta}. \end{aligned}$ ► Soient $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \neq 0$. On a $y = x^\alpha$ si, et seulement si, $x = y^{\frac{1}{\alpha}}$. Par prolongement par continuité quand $\alpha > 0$, la relation précédente est encore valable avec $(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. ► Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$. Par prolongement par continuité, la relation précédente est encore valable lorsque $x = 0$. ► Pour tout $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $(e^x)^\alpha = e^{\alpha \times x}$. ► Pour tout $(x, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\ln(x^\alpha) = \alpha \times \ln(x)$.	► f_α est définie sur $D_\alpha = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\ \mathbb{R}^* & \text{si } \alpha \in \mathbb{Z}_-^* \\] 0, +\infty[& \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \end{cases}$ ► f_α est continue sur D_α. ► f_α est dérivable sur D_α et, pour tout $x \in D_\alpha$, $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha \times x^{\alpha-1}.$ ► f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_α et, pour tout $(x, n) \in D_\alpha \times \mathbb{N}$, $\frac{d^n}{dx^n} x^\alpha = \alpha \times (\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1) \times x^{\alpha-n}.$ ► Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Lorsque $\alpha > 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$. On peut prolonger f_α en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$. La fonction f_α est alors définie sur $[0, +\infty[$.

Monotonie, parité, périodicité, bijectivité,...	Limites et inégalités
► La monotonie de f_α dépend du signe de α. • Si $\alpha = 0$, alors f_α est constante sur $[0, +\infty[$ et vaut 1. • Si $\alpha < 0$, alors f_α est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. • Si $\alpha > 0$, alors f_α est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. ► Si $\alpha \neq 0$ alors f_α est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et sa bijection réciproque est $f_{\frac{1}{\alpha}}$. ► Si $\alpha > 0$ alors f_α est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et sa bijection réciproque est $f_{\frac{1}{\alpha}}$.	► Si $\alpha > 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$. ► Si $\alpha < 0$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0$. ► Croissances comparées. Soient α et β dans $]0, +\infty[$. On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x ^\alpha \times \ln(x) ^\beta = 0,$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha \times x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x ^\beta \times e^{\alpha \times x} = 0.$ ► Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $x > 0$. • Si $x \in]0, 1]$ et $\alpha \leq \beta$, alors $x^\alpha \geq x^\beta$. • Si $x \geq 1$ et $\alpha \leq \beta$, alors $x^\alpha \leq x^\beta$.

$\alpha < 0$

x	0	1	$+\infty$
$x \mapsto x^\alpha$	$+\infty$	1	0

$\alpha > 0$

x	0	1	$+\infty$
$x \mapsto x^\alpha$	0	1	$+\infty$

$\alpha = 0$

x	0	1	$+\infty$
$x \mapsto 1$	1	1	1

Fonctions puissances

