

Devoir surveillé n°3 type ECRICOME

Nom :

Prénom :

Exercice 1 :

Exercice 2 :

Exercice 3 :

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre. **Durée du devoir : 4h. Les téléphones portables doivent être éteints et mis dans votre sac. Le devoir est composé de 4 pages où se trouvent trois exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.**



Évariste Galois vers quinze ans

Évariste Galois, né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine, mort le 31 mai 1832 à Paris, est un mathématicien français, qui a donné son nom à une branche des mathématiques dont il a posé les prémisses, la théorie de Galois. Il est un précurseur dans la notion de groupe et un des premiers à mettre en évidence la correspondance entre symétries et invariants.

Mort à la suite d'un duel galant à l'âge de vingt ans, il laisse un manuscrit élaboré trois ans plus tôt, dans lequel il établit qu'une équation algébrique est résoluble par radicaux si et seulement si le groupe de permutations de ses racines a une certaine structure, qu'on appellera plus tard résoluble. Ce mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, publié par Joseph Liouville quatorze ans après sa mort, ainsi qu'un article Sur la théorie des

nombre paru alors qu'il avait dix-neuf ans, ont été considérés par ses successeurs, comme le déclencheur du point de vue structural et méthodologique des mathématiques modernes.

Républicain radical, il s'engage dans une société secrète, la Société des amis du peuple, à la suite des Trois Glorieuses. Ses démêlés avec les autorités, tant scientifiques que politiques, les zones d'ombre entourant sa mort prématurée, contrastant avec l'importance désormais reconnue de ses travaux, ont contribué à en faire l'incarnation du génie romantique malheureux et d'une jeunesse prometteuse et mal-aimée.

Exercice 1.

A tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ définie par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ainsi la matrice $M(1, 0)$ est la matrice identité I et on note A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.
3. Vérifier que les réels 1 et 2 sont deux valeurs propres de A .
Donner les bases et les dimensions des sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

4. En déduire que A est diagonalisable.

5. Déterminer deux matrices P et D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions suivantes :

- P est inversible et ses trois éléments diagonaux sont égaux à 1.
- $D = (d_{i,j})$ est diagonale avec $d_{1,1} = 2$
- $D = P^{-1}AP$

Donner l'expression de la matrice P^{-1} .

6. Prouver que la matrice $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est une matrice diagonale.
7. Montrer que $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.
En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a, b)$ soit inversible.
8. Prouver que $[M(a, b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a, b)]^2 = I$
En déduire l'existence de quatre matrices $M(a, b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a, b)]^2 = I$.

Exercice 2.

On considère les fonctions suivantes : pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} f_p(x) = 1 + \ln(x+p) \\ h_p(x) = x - f_p(x) \end{cases}$ (famille de fonctions de la variable réelle x).

On note (C_p) la courbe représentative de la fonction f_p .

1. **Etude d'une suite** $(\alpha_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$

- (a) Montrer que l'équation $h_p(x) = 0$ admet une unique solution α_p sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (On ne cherchera pas à calculer α_p). En déduire que l'équation $f_p(x) = x$ admet aussi α_p comme unique solution sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- (b) Déterminer le signe de $h_p(\alpha_{p+1})$ et en déduire que la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ est monotone. (**on ne fera pas de récurrence**)
- (c) Prouver que l'on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_p \geq 1 + \ln(p)$$

Quel est le comportement de la suite $(\alpha_p)_{p \geq 1}$ lorsque p tend vers $+\infty$?

2. **Etude de la fonction** f_1

- (a) Donner le domaine de définition de f_1 .

- (b) **POUR LE CUBE** Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 2, de la fonction f_1 .
Pour tous les autres :
 Déterminer le développement limité en 0, à l'ordre 1, de la fonction f_1 .
- (c) Donner une équation de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0, et la position locale de la courbe C_1 par rapport à cette tangente.
- (d) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$.
- (e) Écrire un programme **Python**, permettant de tracer les courbes représentatives de f_1 , de la tangente à C_1 au point d'abscisse 0, tout cela sur un même graphique avec une légende.

3. Valeur approchée de α_1

On admet que le réel α_1 appartient à l'intervalle $[1; 3]$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n \geq 1$.
- (b) Vérifier que l'on peut appliquer à f_1 l'inégalité des accroissements finis entre α_1 et u_n et en déduire que pour tout entier naturel n :

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- (c) Déterminer un entier naturel n_0 de telle sorte que si n est supérieur ou égal à n_0 alors $|u_n - \alpha_1|$ est inférieur ou égal à 10^{-4} .
- (d) Ecrire un programme **Python** permettant d'obtenir les valeurs de n_0 et de u_{n_0} .

Exercice 3.

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

Partie I : Étude d'un endomorphisme de E .

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : P_0(x) = 1, P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

- Montrer que f est un endomorphisme de E .
- Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- f est-il un automorphisme de E ?
- Quelles sont les valeurs propres de A ? A est-elle diagonalisable?
- Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\text{pour tout réel } x : R_0(x) = 1, R_1(x) = x-1 \text{ et } R_2(x) = (x-1)^2$$

- Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de E . Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
- Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$

- Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1} . Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$[A^{-1}]^n = P [D^{-1}]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$

Partie II : Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j , le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j .

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ($k \geq 0$)

On note alors U_k la matrice unicolonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P[X_k = 0] \\ P[X_k = 1] \\ P[X_k = 2] \end{pmatrix}$$

où $P[X_k = j]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{\text{ème}}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la loi de X_2 Calculer l'espérance de X_2 .
2. Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1}U_k.$$

3. Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0 .
4. Compléter le programme Python, afin qu'il affiche $P(X_{10} = 0)$.

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[.....],[.....],[.....]])
B=..... #inverse de A
U=.....([0],[.],[.])
for i in range (11) :
    U=.....
print(.....)
```

5. Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 0] = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 1] = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} P[X_k = 2] = 0.$$