Fonction exponentielle

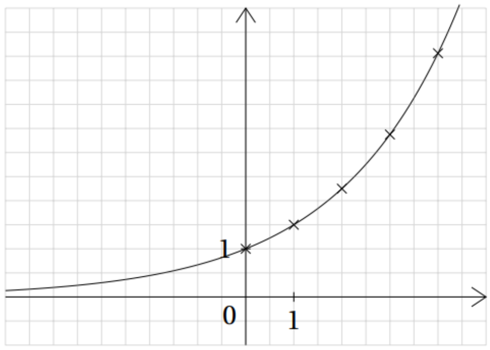
I Définitions

Définition :

Soit a un nombre réel strictement positif. Définie pour $x \in \mathbb{R}$, on appelle $f(x)$ une **fonction exponentielle de base a** tel que $f(x) = a^x$

Exemple : Ci-contre, la représentation graphique de la fonction $f(x) = 1{,}5^x$

Pour la tracer, un tableau de valeurs a été réalisé.



Propriété :

La fonction exponentielle de base a est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc continue sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est également positive sur $\mathbb{R}$.

Application : Exercice 1

II Variations

Propriété :

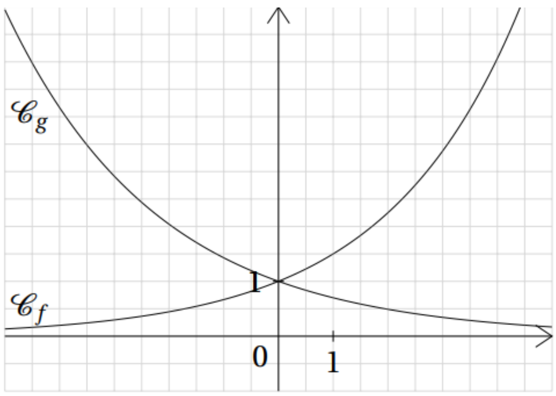
Une fonction exponentielle de base a avec a strictement positif est :

- strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si $q > 1$

- strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ si $0 < q < 1$

- constante égale à 1 sur $\mathbb{R}$ si $q = 1$

Exemple : Ci-contre, les fonctions $f(x) = 1{,}5^x$ et $g(x) = 0{,}7^x$ sont représentées.



Application : Exercice 2

III Propriétés

Propriété :

- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$

- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

- $(a^x)^n = a^{xn}$, avec n entier positif

Application : Exercice 3

IV Taux d'évolution moyen

Propriété :

t étant le taux d'évolution global pendant une certaine période, le **taux moyen d'évolution équivalent** $\boldsymbol{t_m}$ pendant une période n fois plus courte est défini par la relation :

$$\boldsymbol{1 + t_m = (1 + t)^{\frac{1}{n}}}$$

Exemple : Le chiffre d'affaires d'une start-up est passé en un an de $100\ 000$ € à $129\ 960$ €, soit un taux annuel d'évolution de $29{,}96\ \%$.

Avec des évolutions successives sur 12 mois, on cherche t_m tel que $100000(1 + t_m)^{12} = 129960$, c'est-à-dire :

$$(1 + t_m)^{12} = 1{,}2996 \Leftrightarrow (1 + t_m) = 1{,}2996^{\frac{1}{12}} \Leftrightarrow (1 + t_m) \approx 1{,}002208 \Leftrightarrow t_m \approx 0{,}02208$$

Le taux mensuel $2{,}208\ \%$ est équivalent au taux annuel $29{,}96\ \%$.

Application : Exercice 4

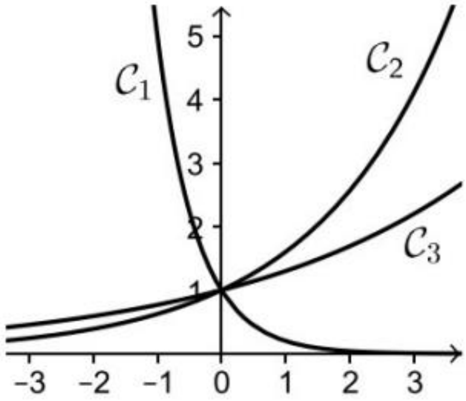
Fonction exponentielle

Exercice 1

On a représenté ci-contre les fonctions :

- $f_1(x) = 0{,}2^x$
- $f_2(x) = 1{,}3^x$
- $f_3(x) = 1{,}6^x$

Associer en justifiant chaque fonction à sa courbe.



Exercice 2

Donner les variations des fonctions f_1, f_2, et f_3 définies par :

- $f_1(x) = \left(\frac{7}{9}\right)^x$
- $f_2(x) = 1{,}21^x$
- $f_3(x) = 0{,}98^x$

Exercice 3

Ecrire sous la forme e^k les expressions suivantes, où k est un entier relatif.

1/ $e^2 \times e^4$	2/ $e^3 \times e^{-4}$	3/ $(e^{-1})^2 \times e^2$
4/ $e^{\frac{5}{2}} \times \sqrt{e}$	5/ $\frac{e^{-4}}{e} \times e^{10}$	6/ $\frac{(e^2)^3}{e^4}$
7/ $e^{-x} \times e^x$	8/ $\frac{e^{4x}}{e^{2x}}$	9/ $\frac{e^{1-x}}{e^{3x+4}}$

Exercice 4

Le chiffre d'affaires d'une entreprise a augmenté de 38% en trois ans.

Calculer l'augmentation annuelle moyenne du chiffre d'affaires à $0{,}1\%$ près.

Exercice 5

Une entreprise prépare et conditionne en continu du jus d'orange. Sa production est, au départ, de $3\ 000\ L$. Puis on estime que celle-ci augmente de $4\ \%$ par jour. On note $P(x)$ la production horaire, en L, au bout de x jours d'évolution.

1/ Déterminer l'expression de $P(x)$

2/ Quelle est la production horaire au bout de 2 semaines et 3 jours arrondie au litre près ?

Exercice 6

Un site internet comptait $46\ 400$ abonnés le 1er septembre 2018 et $51\ 156$ abonnés le 1er septembre 2020.

1/ Déterminer le taux de croissance annuel moyen de 2018 à 2020.

Le directeur du site suppose que la croissance va se poursuivre au même rythme et décide de modéliser le nombre d'abonnés par une fonction f du type $x \to k \times a^x$ où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er septembre 2020.

2/ Déterminer les valeurs de k et a.

3/ Donner la valeur de $f(-2)$ sans utiliser de calculatrice.

4/ Déterminer, selon le modèle, le nombre d'abonnés prévus le 1er septembre 2025.

5/ Déterminer, à l'aide de la calculatrice, à quelle date le nombre d'abonnés dépassera $60\ 000$.

Exercice 7

Le 1er janvier 2019, on a placé $5\ 000$ euros sur un compte avec un rendement annuel de $2\ \%$. Les intérêts produits sont calculés au moment du retrait en tenant compte du nombre exact de jours.

La somme d'argent disponible au bout de x années est donnée par $s(x) = k \times a^x$ où k et a sont des réels à déterminer.

1/ Déterminer k et a

2/ Quelle somme d'argent sera disponible le 8 avril 2019 ? Et le 15 novembre 2022 ?

3/ Calculer le taux mensuel de ce placement à $0{,}01\ \%$.

4/ Calculer de deux façons différentes la somme d'argent disponible le 1er juillet 2019. Quel résultat est le plus fiable ?

Exercice 8

Partie A

Une dose d'un médicament est injectée dans le sang par piqûre intraveineuse. On suppose que le médicament se répartit instantanément dans le sang et que sa concentration initiale dans le sang est égal à $85\,mg.L^{-1}$. On admet que le corps élimine chaque heure 25 % du médicament. On considère la suite (C_n) où C_n désigne la concentration en $mg.L^{-1}$de médicaments dans le sang *n* heures après l'injection avec *n* désignant un entier naturel. On a ainsi : $C_0 = 85\,mg.L^{-1}$

1/ Calculer $C_1 et\ C_2$. Arrondir à 0,01. Interpréter ces deux résultats.

2/Montrer que la suite (C_n) et une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3/ Pour calculer à chaque heure la concentration de médicament présente dans le sang, on utilise un tableur. Quelle formule à recopier vers le bas, faut-t-il saisir dans la cellule B3 pour obtenir les premières valeurs de la suite (C_n) ?

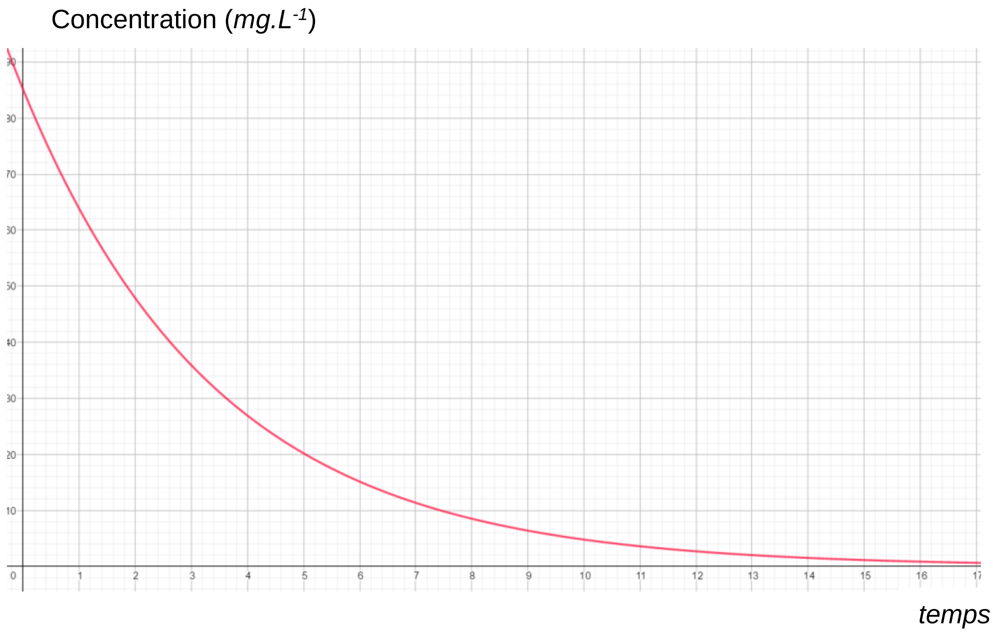
	A	B
1	n	C_n
2	0	85
3	1	
4	2	
5	3	35,86
6	4	26,89
7	5	20,17
8	6	15,13
9	7	11,35
10	8	8,51
11	9	6,38
12	10	4,79

4/ Exprimer C_n en fonction de *n*. En déduire la concentration de médicaments dans le sang au bout de 14 heures. Arrondir à 0,01.

Partie B

Pour avoir des résultats plus précis on admet que la concentration en $mg.L^{-1}$ de médicaments dans le sang *t* heures après l'injection peut être modélisée par la fonction *G* définie sur $[0\,;19]$ par : $G(t) = 85 \times 0{,}75^t$

La courbe représentative de la fonction *G* est tracée ci-dessous :



1/ Par lecture graphique avec la précision permise par le graphique déterminer la concentration de médicament présente dans le sang au bout de 4h et 30 minutes.

2/ Par lecture graphique avec la précision permise par le graphique déterminer le temps à partir duquel la concentration de médicament dans le sang était inférieure à 50 % de la consommation de la concentration initiale.

3/ Déterminer par le calcul une valeur approchée à 0,1 heure près du temps t_0 à partir duquel la concentration de médicament dans le sang est inférieur à 20 % de la concentration initiale, puis exprimer cette valeur approchée en heures et minutes.

Exercice 9

Le nombre en milliards de SMS envoyés par les Français peut être modélisé par la fonction

$$s(t) = 3{,}3(1{,}44)^t$$

où t est le nombre d'années écoulées depuis 2005.

1/ Calculer le nombre de SMS envoyés en un an.

2/ Calculer $\frac{s(t+1)}{s(t)}$. En déduire le taux annuel d'augmentation du nombre de SMS envoyés.

3/ Répondre aux affirmations suivantes par vrai ou faux en justifiant :

a/ La barre des 200 milliards de sms a été atteinte en 2019.

b/ Le taux d'augmentation en 10 ans est de 235%

c/ Le taux annuel moyen sur 10 ans est de 23,5%.

Exercice S1

Écrire sous la forme a^n ou $-a^n$, où a est un entier naturel et n un entier relatif, chacun des nombres suivants :

$$A = \frac{2^{15}}{2^{11}} \qquad B = \frac{(-7)^5}{7^3}$$

$$C = \frac{-3^2 \times (-3)^3 \times 3^5}{3^3 \times (-3)^4} \qquad D = \frac{5^8 \times \left(5^{13}\right)^2}{5^2 \times \left(5^{15}\right)^3}$$

Exercice S2

Cliquer ici

Exercice S3

Simplifier puis calculer les expressions suivantes

$A = (7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51})^2$; $B = (5^{-4} \times 5^5)^3$; $C = (2 \times 3)^5 \times 3^{-3} \times 2 \times 2^{-4} \times 3^{-1}$

$D = \dfrac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3}$; $E = \dfrac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}}$; $F = 8 \times (7 \times 5)^5 \times \dfrac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$

Exercice S4

Cliquer ici

Exercice S5

La subvention municipale accordée à une association était de $10\,000$ € en 2010. Chaque année, la municipalité actualise le montant de ses subventions, et applique les taux d'évolution d'une année sur l'autre :

Année	2011	2012	2013	2014	2015
Taux d'évolution	$+17\%$	$+15\%$	$+10\%$	$+8\%$	$+5\%$

1/ En 2009, le taux d'évolution de la subvention était de 7%. Quel était le montant de la subvention en 2009 ?

2/ Calculer, pour chaque année le montant de la subvention accordée

3/ Calculer le taux d'évolution global entre 2010 et 2015.

4/ Quel est le taux d'évolution annuel moyen ?