

Mathématiques

Corrigé du DS n°6

Exercice 1.

Tous les théorèmes et les propriétés doivent être énoncés avec leurs hypothèses précises.

1. Énoncer la formule d'intégration par parties.

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a, b]$, on a

$$\int_a^b u'(t) v(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt$$

2. Énoncer la formule de Leibniz.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et g deux fonctions de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors $fg \in C^n(I)$ et

$$\forall x \in I, \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

3. Donner la définition d'une fonction croissante (la fonction n'est pas forcément dérivable).

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est décroissante si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2, \quad x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

4. Donner la définition avec des quantificateurs de " $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ".

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, |f(x) - 1| \leq \varepsilon.$$

5. Soit P un polynôme, donner deux propositions équivalentes à " x_0 est racine d'ordre n de P ".

" x_0 est racine d'ordre n de P " est équivalent à " $(X - x_0)^n$ divise P mais $(X - x_0)^{n+1}$ ne divise pas P ".

C'est également équivalent à " $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, P^{(k)}(x_0) = 0$ et $P^{(n)}(x_0) \neq 0$ ".

6. Définir la loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p).$$

7. Soient X une variable aléatoire finie et $g : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une application, énoncer le théorème de transfert.

L'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$E(g(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbb{P}(X = x).$$

8. Soit E un espace vectoriel, rappeler les points à démontrer pour que F soit un sous espace vectoriel de E .

- $F \subset E$
- $0_E \in F$ (ou $F \neq \emptyset$)
- $\forall x, y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$. (stabilité par combinaison linéaire)

9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donner deux propositions équivalentes à " A est inversible".

" A est inversible" est équivalent à " $\exists ! B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = BA = I_n$ ".

C'est aussi équivalent à "Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), AX = 0$ est un système de Cramer".

10. Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, donner la condition pour que AB existe.

Dans ce cas, on note $C = AB$ et on pose $C = (c_{i,j})$, préciser la valeur de $c_{i,j}$ et pour quels i et j .

AB existe si et seulement si $p = q$. On a alors

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

Exercice 2.

1. (a) Soit $t \in [1, x]$. On a $t \leq x$ donc

$$\frac{1}{t} \geq \frac{1}{x}.$$

Dès lors, puisque $e^t > 0$, on a :

$$\frac{e^t}{t} \geq \frac{e^t}{x}.$$

Et donc, par croissance de l'intégrale sur $[1, x]$ avec $1 \leq x$:

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{e^t}{x} dt.$$

Or,

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = f(x) \quad \text{et} \quad \int_1^x \frac{e^t}{x} dt = \frac{1}{x} [e^t]_1^x = \frac{e^x - e}{x}.$$

Ainsi, on a bien montré que :

$$f(x) \geq \frac{e^x - e}{x}.$$

- (b) On remarque que :

$$\frac{e^x - e}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{e}{x}.$$

Par croissance comparée, on sait que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0.$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e}{x} = +\infty.$$

Et donc, d'après la question précédente et le théorème de comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- (c) La fonction f est égale à la primitive qui s'annule en 1 de la fonction continue $t \mapsto \frac{e^t}{t}$. Donc, d'après le théorème fondamental de l'analyse, f est dérivable et :

$$f'(x) = \frac{e^x}{x}, \quad \forall x \in [1, +\infty[.$$

- (d) Calculons $f''(x)$. On a

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad u(x) = e^x, \quad v(x) = x.$$

Or $u'(x) = e^x$, $v'(x) = 1$, donc :

$$f''(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}.$$

Or, sur $[1, +\infty[$, on a $x-1 \geq 0$, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$. Donc

$$f''(x) \geq 0 \quad \text{sur} \quad [1, +\infty[.$$

Ainsi, f est convexe sur $[1, +\infty[$.

- (e) f est également de classe C^∞ sur $[1, +\infty[$. On a

$$f''(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} = f'(x) \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Ainsi

$$f^{(3)}(x) = f''(x) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} f'(x) = ((x-1)^2 + 1) \frac{e^x}{x^3}.$$

Donc d'après la formule de Taylor-Young

$$f(x) \underset{1}{=} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Or

$$f^{(3)}(1) = e, \quad f''(1) = 0, \quad f'(1) = e, \quad f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt = 0.$$

On obtient donc le développement limité de f à l'ordre 1 en 0

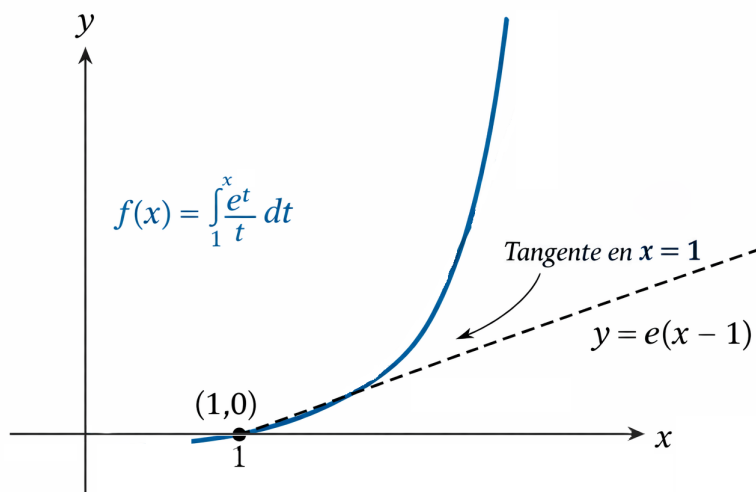
$$f(x) = e(x-1) + \frac{e}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

(f) Donc l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est donnée par :

$$y = e(x-1).$$

Comme $x \geq 1$ et $\frac{e}{6} \geq 0$, alors $\frac{e}{6}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$ est positif au voisinage à droite de 1. Donc la courbe représentative de f est au-dessus de sa tangente au voisinage à droite de 1.

(g) Voici le tracé de la courbe représentative de f sur $[1, +\infty[$.



2. (a) Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto t^3$ sont dérivables sur $[1, +\infty[$. De plus, $t \mapsto t^3$ ne s'annule pas sur cet intervalle, donc la fonction

$$g(t) = \frac{e^t}{t^3}$$

est dérivable sur $[1, +\infty[$.

Calculons sa dérivée. Posons $u(t) = e^t$ et $v(t) = t^3$. Alors :

$$g'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{(v(t))^2}.$$

Or $u'(t) = e^t$ et $v'(t) = 3t^2$, donc :

$$g'(t) = \frac{t^3 e^t - 3t^2 e^t}{t^6} = \frac{t^2(t-3)e^t}{t^6} = \frac{(t-3)e^t}{t^4}.$$

On a $t-3 > 0 \iff t > 3$. Par ailleurs $e^t > 0$ et $t^4 > 0$. Donc : - $g'(t) < 0$ si $t < 3$, - $g'(t) = 0$ si $t = 3$, - $g'(t) > 0$ si $t > 3$.

En particulier :

$$g(1) = \frac{e}{1^3} = e, \quad g(3) = \frac{e^3}{27}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de signes de g' et le tableau de variations de g :

t	1	3	$+\infty$
$t-3$	-	0	+
$g'(t)$	-	0	+
$g(t)$	e $\searrow$ $\frac{e^3}{27}$ $\nearrow$ $+\infty$		

(b) D'après la question précédente, pour tout $t \in [1, 3]$, on a :

$$\frac{e^3}{27} \leq g(t) \leq e.$$

Or $\frac{e^3}{27} > 0$, donc :

$$0 \leq g(t) \leq e.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[1, 3]$:

$$0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq \int_1^3 e dt.$$

Or

$$\int_1^3 e dt = e \int_1^3 1 dt = 2e.$$

Donc :

$$0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e.$$

(c) Soit $x > 3$. La fonction g est croissante sur $[3, x]$, donc pour tout $t \in [3, x]$:

$$0 \leq g(t) \leq g(x) = \frac{e^x}{x^3}.$$

Par croissance de l'intégrale sur $[3, x]$:

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \int_3^x \frac{e^x}{x^3} dt.$$

Or

$$\int_3^x \frac{e^x}{x^3} dt = \frac{e^x}{x^3} (x - 3).$$

Donc

$$0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x.$$

3. Effectuons une première intégration par parties. Posons $u'(t) = e^t$ et $v(t) = \frac{1}{t}$. Alors $u(t) = e^t$ et $v'(t) = -\frac{1}{t^2}$. Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[1, x]$. D'après la formule d'intégration par parties :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \left[\frac{e^t}{t} \right]_1^x - \int_1^x e^t \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = \left[\frac{e^t}{t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt.$$

Utilisons de nouveau une intégration par parties pour calculer $\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt$. Posons $u'(t) = e^t$ et $v(t) = \frac{1}{t^2}$. Alors $u(t) = e^t$ et $v'(t) = -\frac{2}{t^3}$. Donc :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \left[\frac{e^t}{t^2} \right]_1^x - \int_1^x e^t \cdot \left(-\frac{2}{t^3} \right) dt = \left[\frac{e^t}{t^2} \right]_1^x + 2 \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt.$$

Donc :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x g(t) dt,$$

où $g(t) = \frac{e^t}{t^3}$.

En réinjectant dans l'égalité précédente :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} - e + \left(\frac{e^x}{x^2} - e + 2 \int_1^x g(t) dt \right).$$

D'où :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^x g(t) dt.$$

4. (a) Soit $x \in [3, +\infty[$. En utilisant l'égalité obtenue à la question précédente et la relation de Chasles, on a :

$$f(x) = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 2 \int_1^3 g(t) dt + 2 \int_3^x g(t) dt.$$

Or, d'après les questions 2(b) et 2(c), on sait que :

$$0 \leq \int_1^3 g(t) dt \leq 2e, \quad 0 \leq \int_3^x g(t) dt \leq \frac{x-3}{x^3} e^x.$$

Ainsi :

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e + 4e + \frac{2(x-3)}{x^3} e^x.$$

Autrement dit,

$$\frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} - 2e \leq f(x) \leq \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + 2e + \frac{2x-6}{x^3} e^x.$$

(b) Multiplions l'inégalité précédente par xe^{-x} (positif sur $[3, +\infty[$). On obtient :

$$1 + \frac{1}{x} - 2exe^{-x} \leq xf(x)e^{-x} \leq 1 + \frac{1}{x} + 2exe^{-x} + \frac{2x-6}{x^2}.$$

Or, par croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0,$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - 2exe^{-x} \right) = 1.$$

De plus,

$$\frac{2x-6}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0.$$

En utilisant encore le résultat de croissance comparée, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + 2exe^{-x} + \frac{2x-6}{x^2} \right) = 1.$$

Donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)e^{-x} = 1.$$

Ainsi :

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}.$$

Exercice 3.

Dans tout l'exercice, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

Partie I : étude des intégrales W_n

1. On a :

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

$$W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto (\cos(t))^n$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et vérifie $(\cos(t))^n \geq 0$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, avec $(\cos(0))^n = 1 > 0$. D'après la propriété d'une fonction continue et positive qui est au moins une fois non nulle, on a donc :

$$W_n > 0.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leq \cos(t) \leq 1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t).$$

Par croissance de l'intégrale :

$$W_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = W_n.$$

Donc la suite (W_n) est décroissante.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue une intégration par parties :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cos^{n+1}(t) dt.$$

Posons $u(t) = \sin(t)$ et $v(t) = \cos^{n+1}(t)$, alors $u'(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = -(n+1) \sin(t) \cos^n(t)$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On obtient :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cdot (-(n+1) \sin(t) \cos^n(t)) dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_nW_{n+1}.$$

Ainsi, la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

(b) Comme $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$, on a pour $n \in \mathbb{N}$

$$(n+1)W_nW_{n+1} = W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de (W_n) , $W_{n+1} \leq W_n$, donc :

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

De plus, $W_{n+2} \leq W_{n+1}$ et $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$, donc :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n}.$$

7. D'après la question précédente, on applique le théorème d'encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} nW_nW_{n+1} \frac{W_n}{W_{n+1}} = \frac{\pi}{2}.$$

8. On en déduit, en utilisant la continuité de la racine carrée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Partie II : un calcul de limite d'intégrale

1. (a) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, F est la primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0. Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (même de classe C^1).
- (b) D'après la question précédente, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = e^{-x^2} > 0,$$

donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- (c) Soit $x \geq 1$. Par la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

Or pour $t \geq 1$, $t^2 \geq t$, donc $e^{-t^2} \leq e^{-t}$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt.$$

Ainsi :

$$F(x) \leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t} dt.$$

- (d) On remarque que :

$$\int_1^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^x = -e^{-x} + e^{-1} \leq e^{-1} \leq 1.$$

Donc pour tout $x \geq 1$:

$$F(x) \leq 1 + \int_0^1 e^{-t^2} dt.$$

- (e) Comme F est croissante et majorée sur $[1, +\infty[$, le théorème de la limite monotone assure que F admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
2. (a) Comme l'exponentielle est de classe C^∞ , alors pour $x \in \mathbb{R}$

$$e^t = 1 + t + \int_0^t (t-u) e^u du$$

- (b) Raisonnons par disjonction de cas

— Si $t > 0$ alors si $u \in [0, t]$, $t-u \geq 0$ et par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le sens croissant)

$$\int_0^t (t-u) e^u du \geq 0.$$

— Si $t < 0$ alors si $u \in [t, 0]$, $t-u \leq 0$ et par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le sens décroissant)

$$\int_0^t (t-u) e^u du \geq 0.$$

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\int_0^t (t-u) e^u du \geq 0.$$

Ainsi

$$e^t \geq 1 + t.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in [0, n]$. Alors :

$$e^{-u^2} = \left(e^{-u^2/n^2} \right)^{n^2}.$$

Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $1 + t \geq e^t$ pour $t \geq -1$, donc :

$$0 \leq 1 - \frac{u^2}{n^2} \leq e^{-u^2/n^2}.$$

Ainsi, par croissance de la fonction $t \mapsto t^{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\left(1 - \frac{u^2}{n^2} \right)^{n^2} \leq e^{-u^2}.$$

De même, on a :

$$e^{u^2} = \left(e^{u^2/n^2}\right)^{n^2} \geq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2}.$$

En prenant l'inverse (fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), on obtient :

$$e^{-u^2} \leq \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2}.$$

3. (a) Utilisons le changement de variable $u = n \tan(t)$, de sorte que pour $t = 0$, $u = 0$ et pour $t = \pi/4$, $u = n$. On a alors :

$$du = n(1 + \tan^2(t)) dt = \frac{n}{\cos^2(t)} dt.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du &= \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(t))^{-n^2} \cdot \frac{n}{\cos^2(t)} dt \\ &= n \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2(t))^{-n^2+1} dt \\ &= n \int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2}(t) dt. \end{aligned}$$

- (b) Soit le changement de variable $u = n \sin(t)$. Alors pour $t = 0$, $u = 0$ et pour $t = \frac{\pi}{2}$, $u = n$. On a $du = n \cos(t) dt$.

Ainsi :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(t))^{n^2} \cdot n \cos(t) dt = n \int_0^{\pi/2} \cos^{2n^2+1}(t) dt = nW_{2n^2+1}.$$

- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par croissance de l'intégrale, l'inégalité de la question II.3.b donne :

$$\int_0^n \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right)^{n^2} du \leq \int_0^n e^{-u^2} du = F(n) \leq \int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du.$$

Mais par la question précédente :

$$\int_0^n \left(1 + \frac{u^2}{n^2}\right)^{-n^2} du = n \int_0^{\pi/4} \cos^{2n^2-2}(t) dt = n \left(W_{2n^2-2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^{2n^2-2}(t) dt \right) \leq nW_{2n^2-2}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nW_{2n^2+1} \leq F(n) \leq nW_{2n^2-2}.$$

4. Pour $n > 1$, nous avons :

$$nW_{2n^2-2} = \frac{n}{\sqrt{2n^2-2}} \sqrt{2n^2-2} W_{2n^2-2}.$$

On sait par la question I.7 que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n^2-2} W_{2n^2-2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2-2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2-2/n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_{2n^2-2} = \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De la même manière,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nW_{2n^2+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En utilisant la question précédente, d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Enfin, comme F possède une limite ℓ en $+\infty$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F(n) = \ell,$$

donc par unicité de la limite

$$\ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 4.

Pour tout entier n on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

1. (a) La fonction $t \rightarrow e^{nt^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \rightarrow \int_0^x e^{nt^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pour x et $0 \in \mathbb{R}$)

La fonction $t \rightarrow e^{-nt^2}$ l'est également et les bornes de l'intégrales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ donc $x \rightarrow \int_x^1 e^{-nt^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f_n est dérivable sur $\mathbb{R} \cap [0,1] = [0,1]$.

- (b) Comme f_n est dérivable sur $[0,1]$, on a pour $x \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= e^{nx^2} \cdot 1 - e^{n0^2} \cdot 0 - e^{-n1^2} \cdot 0 + e^{-nx^2} \cdot 1 \\ &= e^{nx^2} + e^{-nx^2} > 0 \end{aligned}$$

2. L'équation est équivalente à $f_n(x) = 0$.

Comme f_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n est donc bijective de $[0,1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$.

Déterminons les signes de $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

$$f_n(0) = \int_0^0 e^{nt^2} dt - \int_0^1 e^{-nt^2} dt = - \int_0^1 e^{-nt^2} dt$$

et comme $e^{nt^2} \geq 0$ et que $0 \leq 1$ en intégrant l'inégalité, on obtient $f_n(0) \leq 0$ et de la même façon $f_n(1) \geq 0$.

Donc $0 \in [f_n(0), f_n(1)]$ et l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[0,1]$. Donc il existe un unique c_n tel que

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt = 0$$

De plus, c_0 vérifie :

$$\int_0^{c_0} e^{0t^2} dt - \int_{c_0}^1 e^{-0t^2} dt = 0 \Leftrightarrow [t]_0^{c_0} - [t]_{c_0}^1 = 0 \Leftrightarrow 2c_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow c_0 = \frac{1}{2}$$

3. On ne connaît pas c_n mais seulement le fait qu'il soit solution de l'équation. Pour comparer c_n et c_{n+1} on comparera donc leurs images par f_n ou f_{n+1} . Comme $f_n(c_n) = 0$ et $f_{n+1}(c_{n+1}) = 0$, puisque f_{n+1} est croissante sur $[0,1]$, comparons $f_{n+1}(c_n)$ et $f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(c_n)$

$$\begin{aligned} f_{n+1}(c_n) &= \int_0^{c_n} e^{(n+1)t^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2} dt \\ f_n(c_n) &= \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt - \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \end{aligned}$$

Or comme $n \leq n+1$ et que $t^2 \geq 0$ on a $nt^2 \leq (n+1)t^2$, exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{nt^2} \leq e^{(n+1)t^2}$ comme $0 \leq c_n$ on a

$$\int_0^{c_n} e^{-nt^2} dt \leq \int_0^{c_n} e^{-(n+1)t^2} dt$$

De même

$$- \int_{c_n}^1 e^{nt^2} dt \leq - \int_{c_n}^1 e^{-(n+1)t^2} dt$$

Finalement,

$$f_{n+1}(c_{n+1}) = f_n(c_n) \leq f_{n+1}(c_n)$$

Comme f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$ et que c_n et c_{n+1} en sont éléments, on a bien $c_{n+1} \leq c_n$.

Donc la suite (c_n) est décroissante et minorée par 0 (puisque pour tout n , $c_n \in [0,1]$) donc elle converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ par passage à la limite dans les inégalités.

4. (a) On étudie les variations de $g(x) = e^x - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$		0	
$g(x)$		1	

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > x + 1$ et $e^{nt^2} > nt^2$ d'où, pour $0 \leq r$:

$$\int_0^r e^{nt^2} dt \geq \int_0^r nt^2 dt = n \frac{r^3}{3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Par minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^r e^{nt^2} dt = +\infty$.

- (b) Comme $-nt^2 \leq 0$ et que $x \mapsto e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, alors $e^{-nt^2} \leq e^0 = 1$. Comme $c_n \leq 1$, par intégration de l'inégalité on obtient :

$$\int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq \int_{c_n}^1 1 dt = [t]_{c_n}^1 = 1 - c_n \leq 1 \quad \text{car } c_n \geq 0.$$

- (c) Finalement on a

$$\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt \leq 1$$

Raisonnons par l'absurde. On suppose que $\ell > 0$ on a alors pour tout entier n , $c_n \geq \ell$ et donc

$$1 \geq \int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_0^\ell e^{nt^2} dt + \int_\ell^{c_n} e^{nt^2} dt \geq \int_0^\ell e^{nt^2} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

On obtient donc une contradiction. Comme $\ell \in [0, 1]$, on a finalement $\ell = 0$.