

CHAPITRE 1

EXO 1

$$(a) (3x+2)(5-2x) = 15x - 6x^2 + 10 - 4x \\ = \boxed{-6x^2 + 11x + 10}$$

$$(b) (x-1)(3x^2-2) = 3x^3 - 2x - 3x^2 + 2 \\ = \boxed{3x^3 - 3x^2 - 2x + 2}$$

$$(c) 2(3-2x)x - 2(x-2) = 6x - 4x^2 - (2x-4) \\ = \boxed{-4x^2 + 4x + 4}$$

$$(d) (5x+1)(2(x-1)-5x) = (5x+1)(-3x-2) \\ = -15x^2 - 10x - 3x - 2 \\ = \boxed{-15x^2 - 13x - 2}$$

$$(e) (2+2(x-5))(x-1) = (2x-8)(x-1) \\ = 2x^2 - 2x - 8x + 8 \\ = \boxed{2x^2 - 10x + 8}$$

$$(f) (x+1)^2 + (2x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 \\ = \boxed{5x^2 - 2x + 2}$$

EXO 2

$$(a) (3x+2)^2 = \boxed{9x^2 + 12x + 4}$$

$$(b) (5x-6)^2 = \boxed{25x^2 - 60x + 36}$$

$$(c) (3-2x)(3+2x) = 3^2 - (2x)^2 = \boxed{9 - 4x^2}$$

$$(d) (x-2)(4x+8) = 4(x+2)(x-2) = 4(x^2-4) \\ = \boxed{4x^2 - 16}$$

EXO 3

$$\begin{aligned} (a) & (3x-1)(2x+1) + (5-x)(2x+1) \\ &= (3x-1+5-x)(2x+1) \\ &= (2x+4)(2x+1) = \boxed{2(x+2)(2x+1)} \\ (b) & (3x+4)(2x-1) + 4(3x+4) = \boxed{(3x+4)(2x+3)} \\ (c) & (3-2x)(x+1) + (3-2x)^2 \\ &= (3-2x)(x+1+3-2x) = \boxed{(3-2x)(4-x)} \\ (d) & (x+1)(x-1) + (2x+3)(5x+5) \\ &= (x+1)(x-1) + 5(2x+3)(x+1) \\ &= (x+1)(x-1+10x+15) = \boxed{(x+1)(11x+14)} \end{aligned}$$

EXO 4

$$\begin{aligned} (a) & 3(2x-2) + (x+1)(1-x) \\ &= 6(x-1) - (x+1)(x-1) \\ &= (x-1)(6-(x+1)) = \boxed{(x-1)(5-x)} \\ (b) & 2x(x+1) + (x+1)(x^2+1) \\ &= (x+1)(x^2+2x+1) = (x+1)(x+1)^2 = \boxed{(x+1)^3} \\ (c) & 12x^2-6x + (2x-1)(5-2x) \\ &= 6x(2x-1) + (2x-1)(5-2x) \\ &= \boxed{(2x-1)(5+4x)} \\ (d) & 25x^2-9 + 4(x+7)(5x+3) \\ &= (5x)^2-3^2 + 4(x+7)(5x+3) \\ &= (5x+3)(5x-3) + 4(x+7)(5x+3) \\ &= (5x+3)(5x-3+4x+28) \\ &= \boxed{(5x+3)(9x+25)} \end{aligned}$$

EX05

$$(a) \frac{7}{5} + \frac{8}{5} = \frac{15}{5} = \boxed{3} \quad (b) \frac{13}{10} + \frac{6}{5} = \frac{13}{10} + \frac{12}{10} = \frac{25}{10} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

$$(c) \frac{6}{21} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \boxed{\frac{3}{7}} \quad (d) \frac{5}{6} + \frac{7}{24} = \frac{10}{24} + \frac{7}{24} = \frac{17}{24} = \boxed{\frac{9}{8}}$$

$$(e) \frac{2}{7} + \frac{6}{11} = \frac{22}{77} + \frac{42}{77} = \boxed{\frac{64}{77}} \quad (f) \frac{5}{8} + 2 = \frac{5}{8} + \frac{16}{8} = \boxed{\frac{21}{8}}$$

$$(g) \frac{6}{8} - \frac{2}{6} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{9}{12} + \frac{4}{12} = \boxed{\frac{13}{12}}$$

$$(h) -\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - \frac{5}{6} = -\frac{2}{6} + \frac{15}{6} - \frac{5}{6} = \frac{8}{6} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

EX06

$$(a) \frac{5 \times 21}{14 \times 20} = \frac{5 \times 3 \times 7}{2 \times 7 \times 4 \times 5} = \boxed{\frac{3}{8}} \quad (b) \frac{15 \times 12}{9 \times 25} = \frac{3 \times 5 \times 3 \times 4}{3 \times 3 \times 5 \times 5} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$(c) \frac{24 \times 28}{18 \times 7} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 4 \times 7}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

$$(d) \frac{99 \times 25}{22 \times 125} = \frac{9 \times 11 \times 5 \times 5}{2 \times 11 \times 5 \times 5 \times 5} = \boxed{\frac{9}{10}}$$

$$(e) \frac{9 \times 12 \times 10}{27 \times 10 \times 6} = \frac{9 \times 2 \times 6 \times 10}{9 \times 3 \times 10 \times 6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$(f) \frac{3 \times 6}{8 \times 12 \times 18} = \boxed{\frac{1}{96}} \quad (g) \frac{24 \times 30}{72 \times 20} = \frac{24 \times 3 \times 10}{24 \times 3 \times 2 \times 10} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(R) \frac{27}{18} \times \frac{6}{5} = \frac{\overline{9} \times 3 \times \overline{2} \times 3}{9 \times 2 \times 5} = \boxed{\frac{9}{5}}$$

EXO 7

$$(a) 8^2 \times 4^5 = (2^3)^2 \times (2^2)^5 = 2^6 \times 2^{10} = \boxed{2^{16}}$$

$$(b) (11^5)^{-4} = \boxed{11^{-20}} \quad (c) 4^8 \times 3^{-8} = \boxed{(4/3)^8}$$

$$(d) (52)^4 \times 10000 = \left(\frac{52}{10}\right)^4 \times 10^4 = \boxed{(52)^4} \quad (e) 7^5 \div 7^{-3} = \boxed{7^8}$$

$$(f) 48^5 \times 18^{-4} = (2^4 \times 3)^5 \times (2 \times 3^2)^{-4} = 2^{20} \times 3^5 \times 2^{-4} \times 3^{-8} = \boxed{2^{16} \times 3^{-3}}$$

$$(g) 35^3 \times 12^4 \times 28^{-5} = (5 \times 7)^3 \times (2^2 \times 3)^4 \times (2^2 \times 7)^{-5} = 5^3 7^3 2^8 3^4 2^{-10} 7^{-5} \\ = \boxed{2^{-2} 3^4 5^3 7^{-2}}$$

$$(h) 55^4 \times 22^5 \times 10^{-3} = (5 \times 11)^4 \times (2 \times 11)^5 \times (2 \times 5)^{-3} = 5^4 11^4 2^5 11^5 2^{-3} 5^{-3} \\ = \boxed{2^2 \times 5 \times 11^9}$$

$$(i) 39^5 65^6 15^{-2} = (3 \times 13)^5 \times (5 \times 13)^6 \times (3 \times 5)^{-2} = 3^5 13^5 5^6 13^6 3^{-2} 5^{-2} \\ = \boxed{3^3 5^4 13^{11}}$$

EXO 8

$$(a) \sqrt{48} = \sqrt{3 \times 16} = \boxed{4\sqrt{3}}$$

$$(b) \sqrt{360} = \sqrt{36 \times 10} = \boxed{6\sqrt{10}}$$

$$(c) 3\sqrt{6} \times 4\sqrt{3} = 12 \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{3} = \boxed{36\sqrt{2}} \quad (d) \sqrt{39} \times 2\sqrt{13} = \sqrt{3} \times \sqrt{13} \times 2\sqrt{13} \\ = \boxed{26\sqrt{3}}$$

EXO 9

$$(a) \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{3 \times 6}}{\sqrt{8 \times 6}} = \sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{6}{16}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$(b) \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

$$(c) \frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{11}} = \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{11})}{(\sqrt{3}+\sqrt{11})(\sqrt{3}-\sqrt{11})} = \frac{4(\sqrt{3}-\sqrt{11})}{3-11} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{-2} = \boxed{\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}}$$

$$(d) \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-7} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}{1+2\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(1+2\sqrt{15})}{(1+2\sqrt{15})(1+2\sqrt{15})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2\sqrt{45}+\sqrt{5}-2\sqrt{75}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{1-4 \times 15} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2 \times 3\sqrt{5}+\sqrt{5}-2 \times 5\sqrt{3}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}}{-59}$$

$$= \boxed{\frac{9\sqrt{3}+5\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{105}}{59}}$$

EXO 10 Notons L et l les longueurs et largeurs initiales

$$\text{Aire finale} = (L+3)(l+4) = 2 \times \text{Aire initiale} = 2Ll \text{ et } \boxed{l=7}$$

$$\text{Soit } 11(L+3) = 14L \Leftrightarrow 11L+33 = 14L$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L=11}$$

EXO 11

$$(a) x^2 + 4 = x + 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0$$

$$\mathcal{S} = \{0; 1\}$$

$$(b) x(x-3) - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

$$(c) (x+1)^2 - (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x+1+x-1)(x+1-x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \times 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\mathcal{S} = \{0\}$$

$$(d) (5x-1)(2-x) + (2x-4)(3-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (5x-1)(2-x) - 2(2-x)(3-2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x)[5x-1-2(3-2x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x)(5x-1-6+4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-x)(9x-7) = 0$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{9}; 2 \right\}$$

$$(e) -(12x-2)(2-3x) = 36x^2 - 12x + 1 \Leftrightarrow -2(6x-1)(2-3x) = (6x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow (6x-1)(6x-4) - (6x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow (6x-1)(1-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{1}{6} \right\}$$

EXO 12

(a) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$, on a :

$$\frac{x-5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x+1} = \frac{5-x}{x-1} \Leftrightarrow 4(x-1) = (5-x)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x-4 = 5x+5-x^2-x$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } -3$$

$$\mathcal{S} = \{-3; 3\}$$

(b) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}; 3\}$, on a :

$$\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{3-x} \Leftrightarrow 3-x = 2x+1 \Leftrightarrow 2 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

(c) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/2; 1\}$

$$\frac{2x-2}{x-1} = \frac{3x+3}{2x+1} \Leftrightarrow (2x-2)(2x+1) = (x-1)(3x+3)$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(2x+1) - (x-1)(3x+3) = 0$$

$$\boxed{y = \emptyset}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(4x+2-3x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ valeur interdite!}$$

(d) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; -2/3\}$

$$\frac{x+3}{3x+2} = \frac{x-2}{3x+3} \Leftrightarrow (x+3)(3x+3) = (3x+2)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 9x + 9 = 3x^2 - 6x + 2x - 4$$

$$\Leftrightarrow 16x = -13 \Leftrightarrow x = -13/16$$

$$\boxed{y = \{-13/16\}}$$

(e) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\frac{(x-2)x}{x+1} = \frac{2x^2+1}{x+1} \Leftrightarrow (x^2-2x)(x+1) = (2x^2+1)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(-2x-x^2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)x(-1)x(x+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x+1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ valeur interdite}$$

$$\boxed{y = \emptyset}$$

(f) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4; -1/3\}$

$$\frac{2x-3}{3x+1} + \frac{3-2x}{x+4} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{3x+1} = \frac{2x-3}{x+4}$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x+4) = (2x-3)(3x+1)$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = 3/2$$

$$\boxed{y = \{3/2\}}$$

EXO 13

(a) $\Delta = 1+4=5 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

(b) $-3x^2+6x-2=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+2=0$

$\Delta = 36-24=12=(2\sqrt{3})^2$ donc $x_1 = \frac{6-2\sqrt{3}}{6} = \boxed{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}$

(c) $\Delta = 25-8=17 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}}$ et $\boxed{x_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}}$

$$(d) \Delta = 4 - 12 < 0 \Rightarrow \boxed{y = \emptyset}$$

$$(e) \Delta = 169 - 120 = 49 = 7^2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{13-7}{4} = \frac{3}{2}} \text{ et } \boxed{x_2 = \frac{13+7}{4} = 5}$$

$$(f) \Delta = 16 + 5 \times 16 = 6 \times 16 = (4\sqrt{6})^2 \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{-4-4\sqrt{6}}{2 \times 4} = \frac{-1-\sqrt{6}}{2}} \text{ et } \boxed{x_2 = \frac{-1+\sqrt{6}}{2}}$$

EXO 14

Très simple : $(x - (\sqrt{3}-1))(x - (\sqrt{3}+1)) = 0$
 $\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{3}-1 + \sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1) = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0}$

EXO 15

(a) Notons x et y les deux nombres cherchés. Alors

$$\begin{cases} x+y=12 \\ xy=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12-x \\ x(12-x)=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=12-x \\ -x^2+12x-20=0 \end{cases} (E)$$

Comme (E) admet pour racines "évidentes" 2 et 10, on obtient
 $x=2$ et $y=10$ ou bien $x=10$ et $y=2$. Les nombres
 recherchés sont donc $\boxed{2 \text{ et } 10}$

(b) On obtient de même $\begin{cases} y=5-x \\ -x^2+5x+14=0 \end{cases} (E)$ avec (E) de racines -2 et 7
 si bien que les nombres recherchés sont $\boxed{-2 \text{ et } 7}$

De manière plus générale, x et y satisfont $\boxed{\begin{cases} y=5-x \\ x^2-5x+P=0 \end{cases}}$

EXO 16

- (a) $x^2 + x - 2 = 0$: $x_1 = 1$ et $x_1 x_2 = -2$ donc $x_2 = -2$
(b) $2x^2 + 3x + 1$: $x_1 = -1$ et $x_1 x_2 = 1/2$ donc $x_2 = -1/2$
(c) $4x^2 + x - 3$: $x_1 = -1$ et $x_1 x_2 = -3/4$ donc $x_2 = 3/4$

EXO 17

- (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $X = x^2$ de sorte que
 $x^4 - x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 - X - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow X = -2 \text{ ou } X = 3 \quad (\text{racines évidentes})$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -2 \text{ ou } x^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

$$S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$$

- (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $4x^4 + 9x^2 + 2 \geq 2 > 0$
donc l'équation n'admet pas de solution

$$S = \emptyset$$

- (c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $X = 1/x$ si bien que

$$\frac{5}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 5X^2 - 6X + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 1/5 \quad (1 \text{ est racine évidente})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \text{ ou } \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 5$$

$$S = \{1; 5\}$$

- (d) Pour $x \in [0, +\infty[$ on pose $X = \sqrt{x}$: alors

$$4x + 5\sqrt{x} - 9 = 0 \Leftrightarrow 4X^2 + 5X - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -9/4 \quad (1 \text{ est racine évidente})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \text{ ou } \sqrt{x} = -9/4$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$S = \{1\}$$

- (e) Pour tout $x \in [0, +\infty[$, $6x + 11\sqrt{x} + 3 \geq 3 > 0$
donc l'équation n'a pas de solution

$$S = \emptyset$$

EXO 18

Avec $X = x + \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$, on obtient $X^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ soit $\frac{x^2 + 1}{x^2} = X^2 - 2$

$$(a) \text{ Pour } x \neq 0, \quad x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3X + 4 = 0$$

$$\text{Or } X = 1 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 < 0 \leadsto \text{pas de solution}$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = 2 \quad (\text{V\'evidentes})$$

$$\text{et } X = 2 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \underline{x = 1}$$

$$\boxed{S = \{1\}}$$

(b) Il suffit de diviser par x^2 pour revenir \`a la forme de (a)

$$\text{Pour } x \neq 0 \quad x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 8x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 8X = 0$$

$$\text{Or } X = 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow X(X-8) = 0 \Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \leadsto \text{pas de sol}^n$$

$$\text{et } X = 8 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 8 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 8x \Leftrightarrow x^2 - 8x + 1 = 0$$

$$\Delta = 64 - 4 = 60 = (2\sqrt{15})^2 \leadsto x_1 = \frac{8 - 2\sqrt{15}}{2} = 4 - \sqrt{15} \text{ et } x_2 = 4 + \sqrt{15}$$

$$\boxed{S = \{4 - \sqrt{15}, 4 + \sqrt{15}\}}$$

EXO 19

$$(a) |4x+1| = 3 \Leftrightarrow 4x+1 = 3 \text{ ou } 4x+1 = -3$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -1$$

$$\boxed{S = \{-1, \frac{1}{2}\}}$$

$$(b) |x+1| = |x-3| \Leftrightarrow x+1 = x-3 \text{ ou } x+1 = 3-x$$

$$\Leftrightarrow 4=0 (!) \text{ ou } 2x=2$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

$$\boxed{y = \{1\}}$$

(c) Δ ON RÉSOUT POUR $2x+4 \geq 0$ c-à-d $x \geq -2$

$$\text{Pour } x \geq -2 \quad |3x-2| = 2x+4 \Leftrightarrow 3x-2 = 2x+4 \text{ ou } 3x-2 = -2x-4$$

$$\Leftrightarrow x=6 \text{ ou } 5x=-2$$

$$\Leftrightarrow x = -2/5$$

$$\boxed{y = \{-2/5; 6\}}$$

POUR LES SUIVANTES, ON VA SIMPLIFIER LES MEMBRES
DE GAUCHE EN SE PLAÇANT SUR DES INTERVALLES ADÉQUATS

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$x+2$	-	0	+	+
$x-5$	-	-	0	+

$$(d) \text{ Notons (E) : } |x+2| + |x-5| = 11$$

$$\text{Sur }]-\infty, -2] \quad (E) \Leftrightarrow -(x+2) - (x-5) = 11 \quad (\text{cf } x+2 < 0 \text{ et } x-5 < 0)$$

$$\Leftrightarrow -2x + 3 = 11$$

$$\Leftrightarrow -2x = 8 \Leftrightarrow x = -4 \in]-\infty, -2] \text{ ok!}$$

$$\text{Sur } [-2; 5] \quad (E) \Leftrightarrow -(x+2) + (x-5) = 11$$

$$\Leftrightarrow -7 = 11 \quad \text{Pas de solution}$$

$$\text{Sur } [5; +\infty[\quad (E) \Leftrightarrow x+2 + x-5 = 11$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3 = 11$$

$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7 \in [5; +\infty[\text{ ok!}$$

$$\boxed{y = \{-4; 7\}}$$

ON PROCÈDE DE MÊME POUR LES DEUX AUTRES!

(e) Notons (E) : $2|x+2| + |x-5| = 9$

Sur $]-\infty; -2]$ (E) $\Leftrightarrow -2x-4-x+5=9$

$\Leftrightarrow -3x=8 \Leftrightarrow x=-\frac{8}{3} < -2$ ok!

Sur $[-2; 5]$ (E) $\Leftrightarrow 2x+4-x+5=9$

$\Leftrightarrow x=0 \in [-2; 5]$ ok!

Sur $[5; +\infty[$ (E) $\Leftrightarrow 2x+4+x-5=9$

$\Leftrightarrow 3x=10 \Leftrightarrow x=\frac{10}{3} < 5$ non!

$\mathcal{S} = \left\{ -\frac{8}{3}; 0 \right\}$

(f) Notons (E) : $|x+2| - 2|x-5| = 5$

Sur $]-\infty; -2]$ (E) $\Leftrightarrow -(x+2) - 2(5-x) = 5$

$\Leftrightarrow -x-2-10+2x=5$

$\Leftrightarrow x=17 \Leftrightarrow x=\frac{17}{2} > -2$ non!

Sur $[-2; 5]$ (E) $\Leftrightarrow x+2-10+2x=5$

$\Leftrightarrow 3x=13 \Leftrightarrow x=\frac{13}{3} \in [-2; 5]$ ok!

Sur $[5; +\infty[$ (E) $\Leftrightarrow x+2-2(x-5)=5$

$\Leftrightarrow x+2-2x+10=5$

$\Leftrightarrow -x=-7 \Leftrightarrow x=7 > 5$ ok!

$\mathcal{S} = \left\{ \frac{13}{3}; 7 \right\}$

Exo 20

(a) $-3x+7 \leq x+2 \Leftrightarrow -4x \leq -5 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{4}$

$\mathcal{S} = \left[\frac{5}{4}; +\infty[\right]$

(b) $-6(x+5) < x+5 \Leftrightarrow -7(x+5) < 0$

$\Leftrightarrow x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -5$

$\mathcal{S} =]-5; +\infty[$

(c) $\frac{x+1}{4} \geq \frac{x-2}{3} \Leftrightarrow 3(x+1) \geq 4(x-2) \Leftrightarrow 3x+3 \geq 4x-8$

$(x \neq 12)$

$\Leftrightarrow -x \geq -11 \Leftrightarrow x \leq 11$

$\mathcal{S} =]-\infty; 11]$

$$(d) (2x+4)(2-x) = 2(x+2) \times (-1)(x-2) = -2(x+2)(x-2)$$

Se trinôme est ≥ 0 entre ses racines et ≤ 0 à l'extérieur d coeff de x^2

donc $\boxed{y = [-2; 2]}$

$$(e) x^3 \leq x \Leftrightarrow x^3 - x \leq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{x(x+1)(x-1)}_{p(x)} \leq 0$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x		-	0	+	+
$x+1$	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
$p(x)$	-	0	+	0	+

$$\boxed{y =]-\infty; -1] \cup [0; 1]}$$

$$(f) (x+1)(1-x) > (2x-1)(x+1) \Leftrightarrow (x+1)(1-x-2x+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2-3x) > 0$$

$$\Leftrightarrow -3(x+1)(x-\frac{2}{3}) > 0$$

Se trinôme est ≥ 0 entre ses $\sqrt{}$ et ≤ 0 à l'extérieur d coeff. de x^2

donc $\boxed{y =]-1; \frac{2}{3}[}$

$$(g) \text{ Pour } x \in \mathbb{R} - \{-2\}, \text{ on a } \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+2} = Q(x)$$

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x+1$		-	-	0	+
$x-1$	-	-		-	0
$x+2$	-	0	+	+	+
$Q(x)$	-	//	+	0	-

$$\boxed{y =]0; -2[\cup]\frac{1}{2}; 1[}$$

(h) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\frac{2x+1}{x-3} > -1$ $\frac{2x+1}{x-3} + \frac{x-3}{x-3} > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-2}{x-3} > 0 \Leftrightarrow (3x-2)(x-3) > 0$$

$\nwarrow$
 $\times (x-3)^2$, qui est > 0

Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, si bien que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; 2/3[\cup]3; +\infty[$

(i) Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/4; 0\}$

$$\frac{2x-4}{4x+1} \leq \frac{3x+5}{6x} \Leftrightarrow \frac{2x-4}{4x+1} - \frac{3x+5}{6x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-4)6x - (4x+1)(3x+5)}{(4x+1)6x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x^2 - 24x - 12x^2 - 20x - 3x - 5}{(4x+1)6x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-47x-5}{(4x+1)6x} \leq 0$$

x	$-\infty$	$-1/4$	$-5/47$	0	$+\infty$			
$-47x-5$		+		+	0	-	-	
$4x+1$		-	0	+		+	+	
$6x$		-		-		-	0	+
$Q(x)$		+		-	0	+		-

$$\mathcal{S} =]-1/4; -5/47] \cup]0; +\infty[$$

EXO 21

$$(a) |x-8| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x-8 \leq 5 \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 13$$

$$\mathcal{S} = [3; 13]$$

$$(b) |2x+3| > 4 \Leftrightarrow 2x+3 > 4 \text{ ou } 2x+3 < -4 \\ \Leftrightarrow x > 1/2 \text{ ou } x < -7/2$$

$$\mathcal{S} =]-\infty; -7/2[\cup]1/2; +\infty[$$

$$(c) |2x-11| \leq |x-5| \Leftrightarrow (2x-11)^2 \leq (x-5)^2 \\ \Leftrightarrow (2x-11)^2 - (x-5)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (3x-16)(x-6) \leq 0$$

Le trinôme est négatif entre ses racines donc $\mathcal{S} = [16/3; 6]$

$$(d) \bullet |x-3| > 2 \Leftrightarrow x-3 > 2 \text{ ou } x-3 < -2 \Leftrightarrow x > 5 \text{ ou } x < 1$$

$$\bullet |x+4| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+4 \leq 3 \Leftrightarrow -7 \leq x \leq -1$$

De ce fait $\begin{cases} |x-3| > 2 \\ |x+4| \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \text{ ou } x > 5 \\ -7 \leq x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq x \leq -1$

$$\mathcal{S} = [-7; -1]$$

EXO 22

$$(a) x^2 + 6x < -16 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 16 < 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \times 16 < 0 \Rightarrow \text{trinôme toujours } > 0$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

$$(b) 70x < 25x^2 + 49 \Leftrightarrow 25x^2 - 70x + 49 > 0$$

$$\Leftrightarrow (5x-7)^2 > 0 \Leftrightarrow 5x-7 \neq 0$$

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{7/5\}$$

$$(c) (x+3)(x-1) < 2x+6 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) - 2(x+3) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x-3) < 0$$

$$\mathcal{S} =]-3; 3[$$

f. trinôme négatif entre ses racines

$$(d) \quad 2x^2 - 8x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 \geq 0$$

$$\Delta = 16 - 4 = 12 = (2\sqrt{3})^2 \leadsto x_1 = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \text{ et } x_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Binôme ≥ 0 à l'extérieur des racines donc

$$\mathcal{S} =]-\infty; 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}; +\infty[$$

$$(e) \quad -3x^2 + 12x < 12 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 12 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 > 0 \Leftrightarrow x - 2 \neq 0$$

$$\mathcal{S} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$(f) \quad -2x^2 + 5x - 4 \leq -4x + 5 \Leftrightarrow -2x^2 + 9x - 9 \leq 0$$

$$\Delta = 81 - 72 = 9 = 3^2 \leadsto x_1 = \frac{-9 - 3}{-4} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-9 + 3}{-4} = 3/2$$

Binôme ≤ 0 à l'extérieur des Γ donc

$$\mathcal{S} =]-\infty; 3/2] \cup [3; +\infty[$$

EXO 23

(a) MÉTHODE 1 : Écrire les relations possibles de l'équation (sans résoudre des problèmes de définition) et vérifier si tout va bien

$$\text{Si } x \text{ est solution de } \sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8} \quad (E)$$

$$\text{alors } x+12 = x^2+2x-8$$

$$\text{soit } 0 = x^2+x-20$$

$$\text{donc } x = 4 \text{ ou } x = -5 \quad (\text{racines évidentes})$$

VERIFICATION

$$\bullet \text{ pour } x = 4 : \quad x+12 = 16 = x^2+2x-8$$

$$\bullet \text{ pour } x = -5 : \quad x+12 = 7 = x^2+2x-8$$

) ok!

$$\text{donc } \mathcal{S} = \{-5; 4\}$$

MÉTHODE 2

[Déterminer l'ensemble de définition de l'équation
puis le résoudre sur cet ensemble]

(E) : $\sqrt{x+12} = \sqrt{x^2+2x-8}$ définie pour $x+12 \geq 0$ et $x^2+2x-8 \geq 0$
Le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines 2 et -4

x	$-\infty$	-12	-4	2	$+\infty$
$x+12$	-	0	+	+	+
x^2+2x-8	+	+	0	-	+

Ainsi l'équation (E) est définie sur $D_E = [-12, -4] \cup [2, +\infty[$
Pour $x \in D_E$, on a (E) $\Leftrightarrow x+12 = x^2+2x-8$

$$\Leftrightarrow x^2+x-20=0$$

$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ou } x=-5$$

Comme $4 \in D_E$ et $-5 \notin D_E$, on a bien

$$S = \{-5; 4\}$$

(b) L'équation $\sqrt{4-x} = x-2$ est définie pour $4-x \geq 0$ soit $x \leq 4$
et une solution x vérifie nécessairement $x-2 \geq 0$ soit $x \geq 2$

Pour $x \in [2; 4]$, on a : $\sqrt{4-x} = x-2 \Leftrightarrow 4-x = (x-2)^2 = x^2-4x+4$

$$\Leftrightarrow x^2-3x = x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=3$$

Comme $0 \notin [2; 4]$ alors

$$S = \{3\}$$

(c) L'équation $\sqrt{2x-6} = x-3$ est définie pour $x \geq 3$... et $x-3 \geq 0$ alors

Pour $x \geq 3$, on a ainsi $\sqrt{2x-6} = x-3 \Leftrightarrow 2(x-3) = (x-3)^2$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } x=5$$

$$S = \{3; 5\}$$

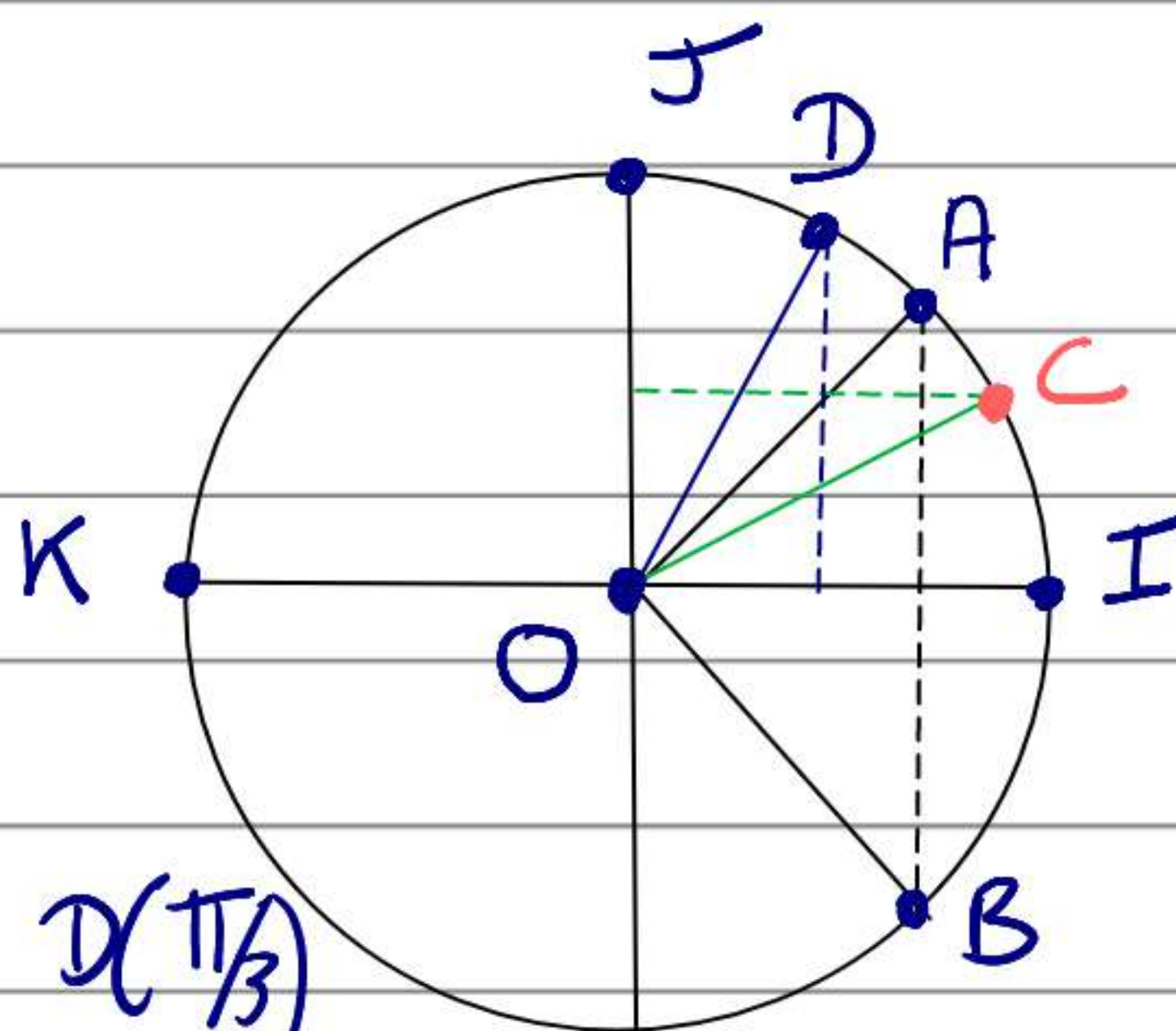
CHAPITRE 2

EXO 1

Avec un dessin,
c'est encore mieux!

Par lecture graphique, on obtient

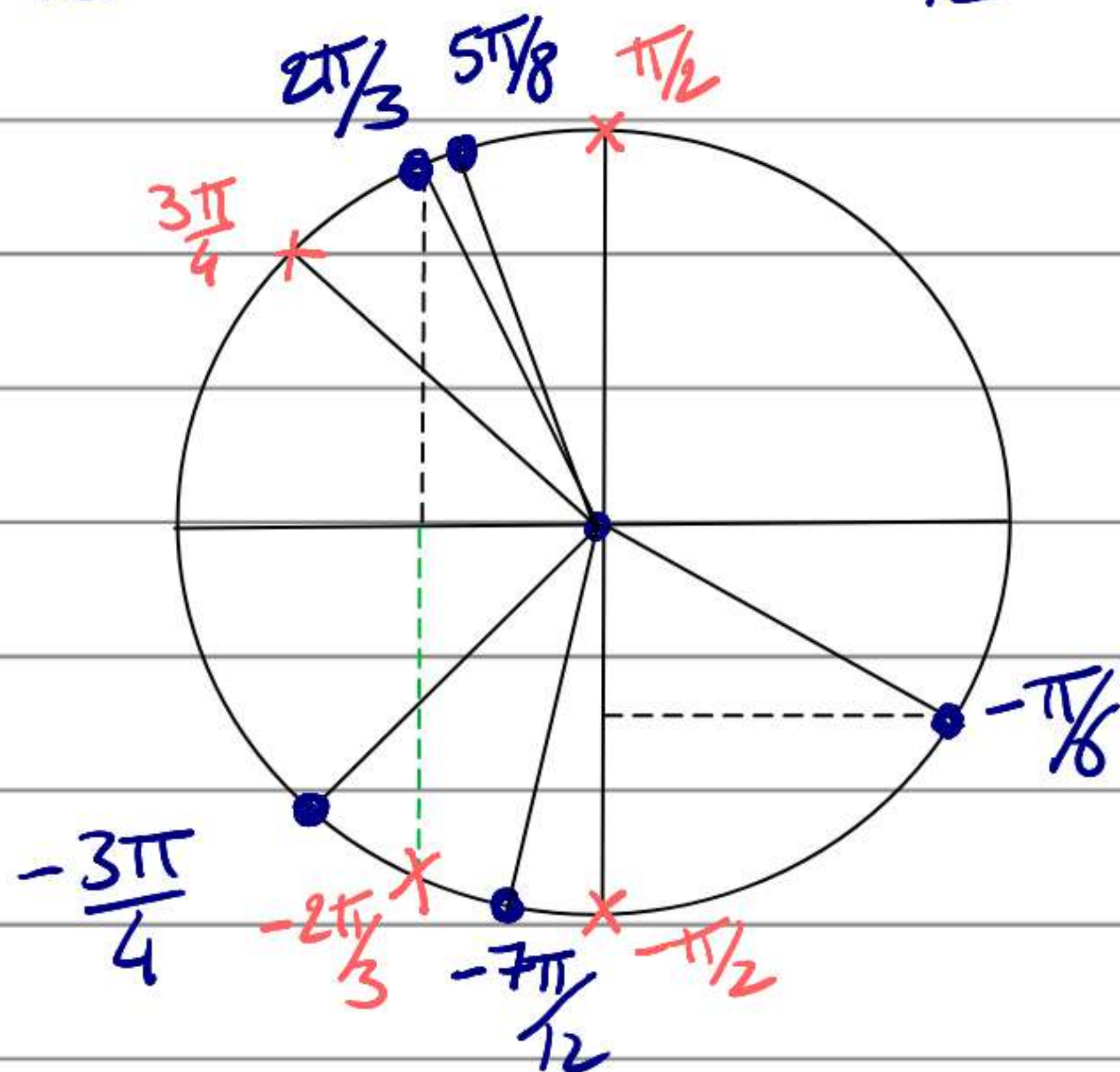
$I(0)$ $J(\pi/2)$ $K(\pi)$
 $A(\pi/4)$ $B(-\pi/4)$ $C(\pi/6)$ $D(\pi/3)$



EXO 2

Pour les deux derniers, noter que

- $\frac{5\pi}{8}$ est la moyenne de $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$
- $-\frac{7\pi}{12}$ est la moyenne de $-\frac{6\pi}{12} = -\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{8\pi}{12} = -\frac{2\pi}{3}$



$$\frac{2\pi}{3} = \frac{16\pi}{24} \text{ et } \frac{5\pi}{8} = \frac{15\pi}{24}$$

EXO 3

Très simple : dans chaque cas, on découpe le cercle en n arcs de même longueur.
Donc les abscisses cartésiennes des sommets sont $\frac{2\pi}{n} k$ avec $0 \leq k \leq n-1$

EX04

$$(a) \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(b) \frac{13\pi}{4} - 4\pi = \frac{13-16}{4}\pi = -\frac{3\pi}{4} \text{ donc } \frac{13\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 4\pi \\ \text{et } \sin\left(\frac{13\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$(c) \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$(d) \frac{20}{3} - 6 = \frac{2}{3} \text{ donc } \sin\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$(e) \cos\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$(f) \frac{15}{4} - 4 = -\frac{1}{4} \text{ donc } \sin\left(\frac{15\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$(g) \begin{array}{r} 1651 \\ 45 \overline{) 275} \\ 31 \overline{) 1} \end{array} \quad \frac{1651}{6} - 276 = \frac{1651 - 1656}{6} = -\frac{5}{6} \\ \text{donc } \cos\left(\frac{1651\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \pi\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$(h) -\frac{19}{6} + 4 = \frac{5}{6} \text{ donc } \sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - 4\pi\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

EX05

$$\text{Idée : } \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

ce qui permet de calculer les cos, sin et tan de ces réels grâce aux formules d'addition....

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Par quotient } \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \boxed{2 - \sqrt{3}}$$

Par $\frac{5\pi}{12}$, on peut noter que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ si bien que

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \dots = \boxed{2 + \sqrt{3}}$$

Enfin - et c'est diabolique ! - $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$ donc

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = +\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \boxed{-2 - \sqrt{3}}$$

Ce bel exercice a permis de retrouver plusieurs relations essentielles en trigonométrie. À retrouver sans modération !

EX06

- (a) $\cos(x-\pi) = \cos(x+\pi) = \boxed{-\cos(x)}$
- (b) $\sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \boxed{-\cos(x)}$
- (c) $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}-(-x)) = \sin(-x) = \boxed{-\sin(x)}$
- (d) $\sin(x-\pi) = \sin(x+\pi) = \boxed{-\sin(x)}$
- (e) $\cos(\frac{5\pi}{2}+x) = \cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin(x)$ cf. c)
 $\sin(x-\frac{7\pi}{2}) = \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}-(-x)) = \cos(-x) = \cos(x)$
 donc $\cos(\frac{5\pi}{2}+x) + \sin(x-\frac{7\pi}{2}) = \boxed{\cos(x) - \sin(x)}$
- (f) $\cos(21\frac{\pi}{2}-x) = \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x)$ et $\sin(13\frac{\pi}{2}-x) = \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$
 donc $\cos(21\frac{\pi}{2}-x) + \sin(13\frac{\pi}{2}-x) = \boxed{\cos(x) - \sin(x)}$
- (g) $\sin(2013\pi-x) = \sin(\pi-x) = \boxed{\sin(x)}$

$$\begin{cases} \frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi \\ -\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 4\pi \\ 21\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 10\pi \\ 13\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 6\pi \end{cases}$$

EX07

- (a) $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \underbrace{(\sin^2(x) + \cos^2(x))}_{=1} (\sin^2(x) - \cos^2(x)) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$
- (b) $2\sin^2(x)\cos^2(x) + \sin^4(x) + \cos^4(x) = (\cos^2(x) + \sin^2(x))^2 = 1$
 donc $2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1 - \cos^4(x) - \sin^4(x)$
- (c) $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$
 $(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$
 donc $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
- (d) $\frac{1}{\cos^4(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^4(x)} = 1 + \tan^2(x)$

EX08

$$1) 1+t^2 = 1 + \tan^2(\theta/2) = 1 + \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}$$

$$\text{donc } \cos^2(\theta/2) = \boxed{\frac{1}{1+t^2}}$$

$$2) \cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

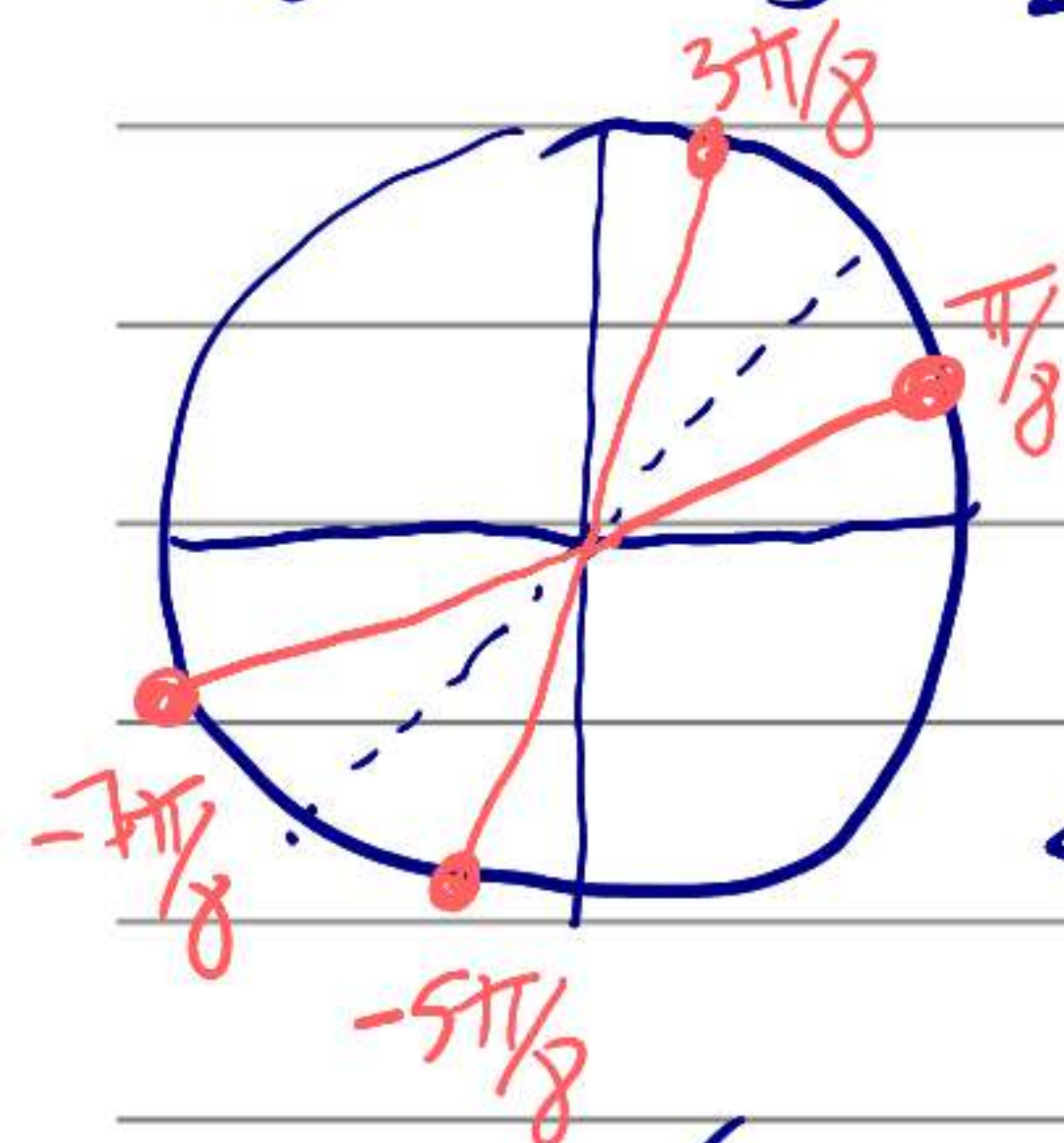
$$\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = 2\tan(\theta/2)\cos^2(\theta/2) = \boxed{\frac{2t}{1+t^2}}$$

$$3) \tan(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \boxed{\frac{2t}{1-t^2}}$$

EXO 9

$$(a) \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi} \text{ ou } \boxed{x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$(b) \sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

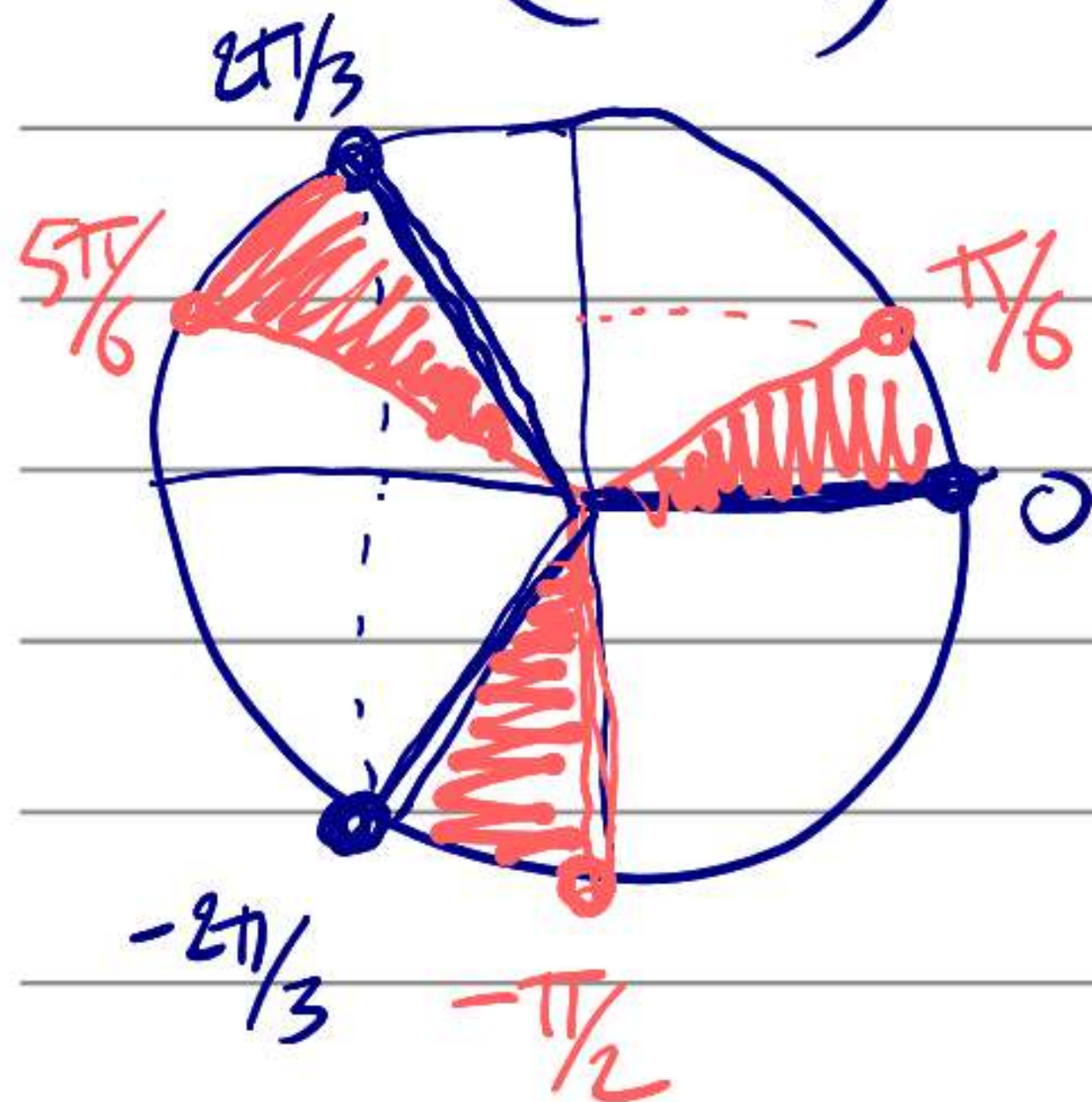


$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pi/8 + k\pi} \text{ ou } \boxed{x = 3\pi/8 + k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \underline{x = -7\pi/8, -5\pi/8, \pi/8 \text{ ou } 3\pi/8 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

$$(c) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$



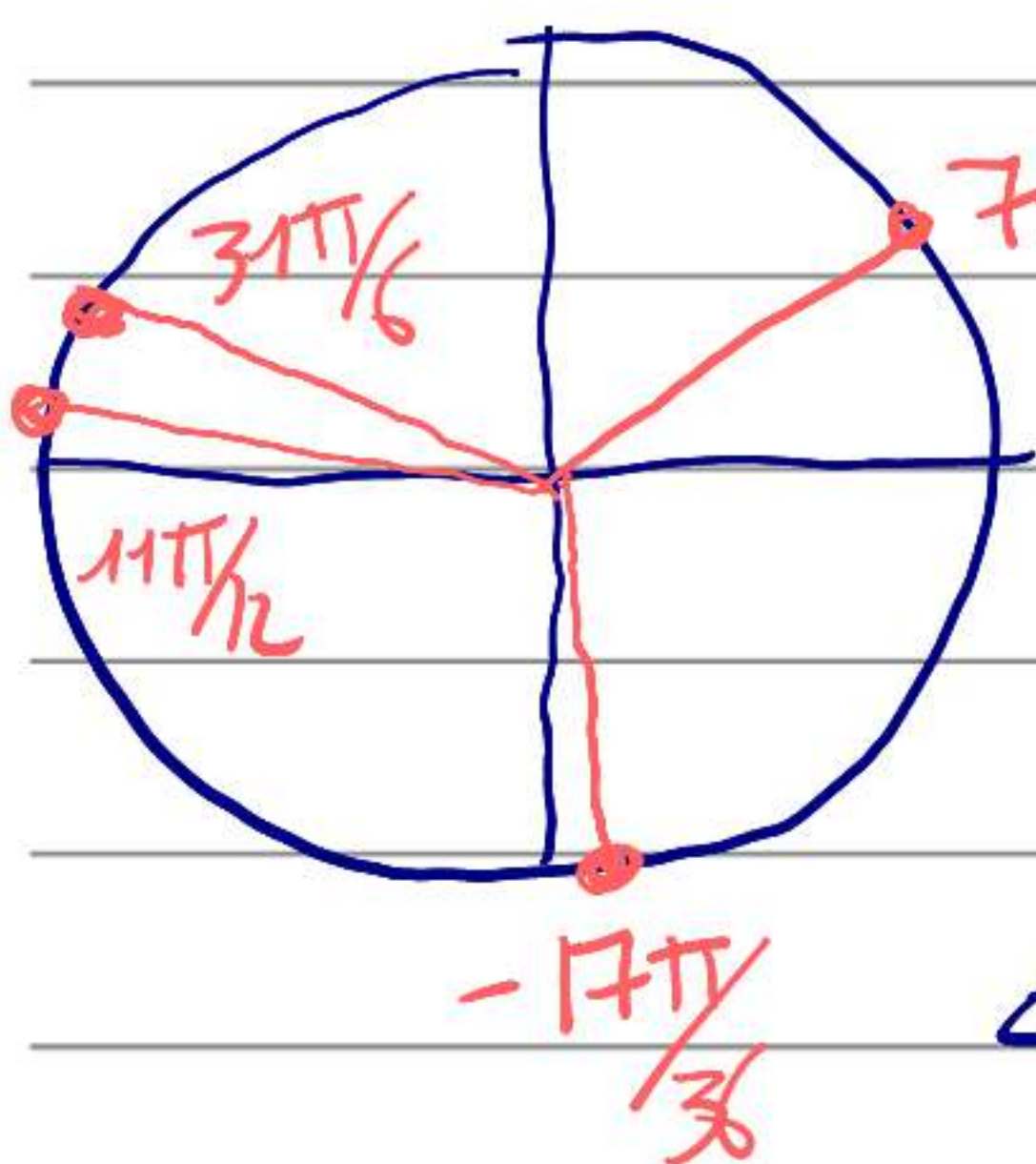
$$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pi/6 + 2k\pi/3} \text{ ou } \boxed{x = 2k\pi/3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \underline{x = -\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, -2\pi/3, 0, 2\pi/3 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})}$$

$$(d) \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$



$$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - 2x = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{3\pi}{4} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$= \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}} \text{ ou } \boxed{x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{17\pi}{36}, \frac{7\pi}{36}, \frac{31\pi}{36} \text{ ou } \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(d) \quad 4\sin^2(x) - 2(\sqrt{3}+1)\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \quad (E)$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 2(\sqrt{3}+1)x + \sqrt{3} = 0 \text{ en posant } x = \sin x$$

$$\Delta = 4(\sqrt{3}+1)^2 - 4 \times 4\sqrt{3} = 4(\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1^2 - 4\sqrt{3})$$

$$= 4(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1^2)$$

$$= 4(\sqrt{3}-1)^2$$

$$= [2(\sqrt{3}-1)]^2$$

$$x_1 = \frac{2(\sqrt{3}+1) - 2(\sqrt{3}-1)}{2 \times 4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2(\sqrt{3}+1) + 2(\sqrt{3}-1)}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(E) \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$$

EXO 10

C'est le même principe (1) et (2) sont dans l'exo 9

$$(3) : \tan(3x - \pi/5) = \tan(x + 4\pi/5)$$

$$\Leftrightarrow 3x - \pi/5 = x + 4\pi/5 + k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pi + k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi/2}$$

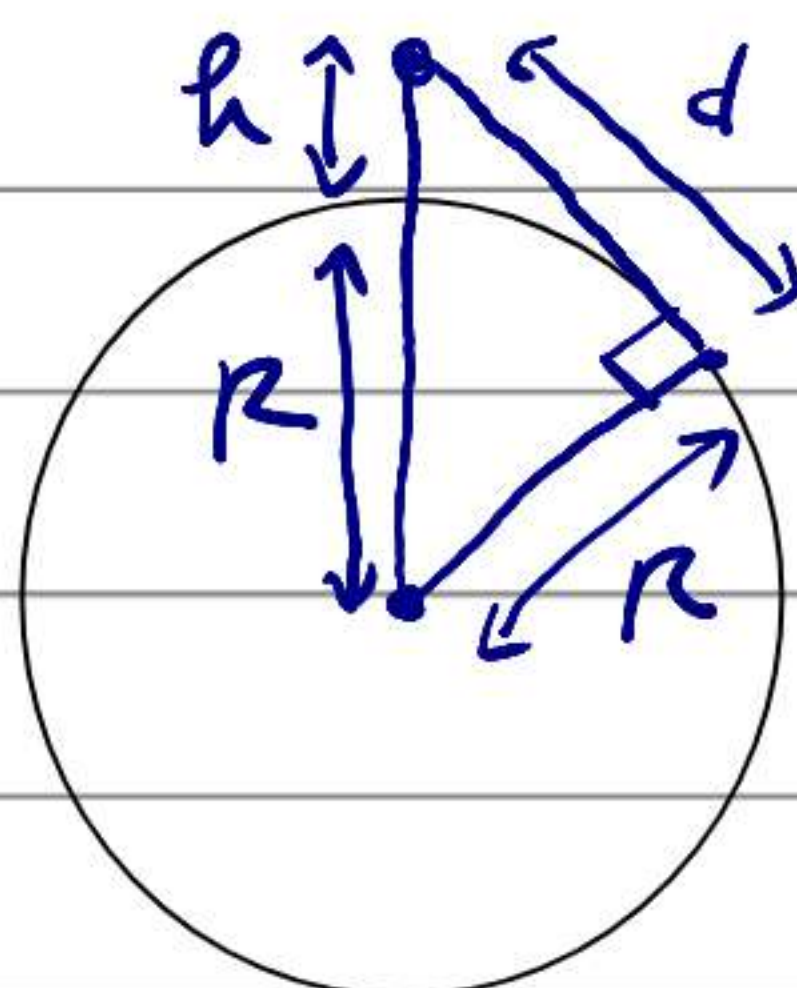
$$(4) \quad 2\tan^4(x) = 1/\cos^2(x)$$

$$\Leftrightarrow 2\tan^4(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \tan(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi}$$

EXO 11

Notons R le rayon de la Terre, h la hauteur du phare et d la distance depuis laquelle on l'aperçoit (en km).
Voici la situation :



$$(R+h)^2 = d^2 + R^2$$

$$\Rightarrow d^2 = (R+h)^2 - R^2$$

$$= (2R+h)h$$

$$R = 6400$$

$$h = 0,1$$

$$2R+h = 12800,1$$

$$h(2R+h) = 1280,01$$

$$\text{soit } d = \sqrt{(2R+h)h} = \sqrt{1280,01} \approx \boxed{35,78 \text{ km}}$$

C'est pas mal !

EXO 12

- $2\pi/3 \in [0, \pi]$ donc $\arccos(\cos \frac{2\pi}{3}) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$
- $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{2\pi}{3})$ donc $\arccos(\cos(-\frac{2\pi}{3})) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$
- $\cos(4\pi) = \cos(0)$ donc $\arccos(\cos(4\pi)) = \boxed{0}$
- $\tan(\frac{3\pi}{4}) = \tan(-\frac{\pi}{4})$ donc $\arctan(\tan(\frac{3\pi}{4})) = \boxed{-\frac{\pi}{4}}$

EXO 13

- $\arcsin(-\sqrt{2}/2) = \arcsin(\sin(-\pi/4)) = \boxed{-\pi/4}$
- $\arccos(-\sqrt{2}/2) = \arccos(\cos(3\pi/4)) = \boxed{3\pi/4}$
- $\arcsin(-1/2) = \arcsin(\sin(-\pi/6)) = \boxed{-\pi/6}$
- $\arccos(-1/2) = \arccos(\cos(2\pi/3)) = \boxed{2\pi/3}$

$$\arcsin(\sin \theta) = \theta$$

si $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$

$$\arccos(\cos \theta) = \theta$$

si $\theta \in [0, \pi]$

EXO 14

- $\arctan(-\sqrt{3}) = \arctan(\tan(-\pi/3)) = \boxed{-\pi/3}$
- $\arctan(-1) = \arctan(\tan(-\pi/4)) = \boxed{-\pi/4}$
- $\arctan(1/\sqrt{3}) = \arctan(\tan(\pi/6)) = \boxed{\pi/6}$
- $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \arcsin(\sin(\pi/3)) = \boxed{\pi/3}$

$$\arctan(\tan \theta) = \theta$$

si $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$

EXO 15

$$(a) \tan(\arcsin x) = \sin(\arcsin x) / \cos(\arcsin x)$$

Pour $x \in [-1, 1]$ on a $\sin(\arcsin x) = x$ par définition
et $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $\cos(\arcsin x) \geq 0$

$$\text{d'où } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2} \neq 0 \text{ ssi } x \in]-1, 1[$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Pour tout } x \in]-1, 1[\quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$(b) \text{ Pour } x \in [-1, 1], \text{ on a } \arccos(x) \in [0, \pi] \text{ donc } \sin(\arccos x) \geq 0$$
$$\text{et } \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Pour tout } x \in [-1, 1] \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}}$$

(On a montré de la même façon en (a) que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$)

$$(c) \text{ Pour } x \in \mathbb{R}, \text{ on a } \operatorname{arctan}(x) \in]-\pi/2, \pi/2[\text{ donc } \cos(\operatorname{arctan} x) > 0$$

$$\text{De plus, } \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \text{ donc } \cos^2(\operatorname{arctan} x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\operatorname{arctan} x)} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \cos(\operatorname{arctan} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

$$(d) \text{ Pour } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \sin(\theta) = \tan(\theta) \times \cos(\theta)$$

$$\text{En particulier } \sin(\operatorname{arctan} x) = \tan(\operatorname{arctan} x) \times \cos(\operatorname{arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\operatorname{arctan} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$$

Exo 16

$$(1) \begin{cases} \cos(2x) = \cos(7x-5x) = \cos(7x)\cos(5x) + \sin(7x)\sin(5x) \\ \cos(12x) = \cos(7x+5x) = \cos(7x)\cos(5x) - \sin(7x)\sin(5x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(2x) + \cos(12x) = 2\cos(7x)\cos(5x)$$

et l'équation proposée équivaut à $3\cos(5x) = 2\cos(7x)\cos(5x)$
soit $(3-2\cos(7x)) \times \cos(5x) = 0$

d'où $\cos(7x) = 3/2$ ou $\cos(5x) = 0$

Bien entendu, $\cos(7x) \leq 1 < 3/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$!

De plus, $\cos(5x) = 0 \Leftrightarrow 5x = \pi/2 + k\pi$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \pi/10 + k\pi/5} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = \pm \frac{9\pi}{10}, \pm \frac{7\pi}{10}, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{10}, \pm \frac{\pi}{10} + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(2) \begin{cases} \sin(x) = \sin(3x-2x) = \sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x) \\ \sin(5x) = \sin(3x+2x) = \sin(3x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(3x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(x) + \sin(5x) = 2\sin(3x)\cos(2x)$$

De la sorte, l'équation proposée devient $2\sin(3x)\cos(2x) - \sin(3x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(3x)(2\cos(2x) - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = 1/2$$

$$\sin(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi/3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = -2\pi/3, -\pi/3, 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos(2x) = 1/2 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi/3) \Leftrightarrow 2x = \pi/3 + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\pi/3 + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \pi/6 + 2k\pi/3} \text{ ou } \boxed{x = -\pi/6 + 2k\pi/3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = -\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, -5\pi/6, -\pi/6, \pi/2 + 2k\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

On réunit donc toutes ces solutions, ce qui en fait un assez
pequet !

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \cos(x) - \sqrt{3} \sin x &= 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x) = \frac{1}{2} \\
 &\Rightarrow \cos(\pi/3) \cos(x) - \sin(\pi/3) \sin(x) = 1/2 \\
 &\Leftrightarrow \cos(x - \pi/3) = 1/2 = \cos(\pi/3) \\
 &\Leftrightarrow x - \pi/3 = \pi/3 + 2k\pi \text{ ou } x - \pi/3 = -\pi/3 + 2k\pi \\
 &\Leftrightarrow \boxed{x = 2\pi/3 + 2k\pi} \text{ ou } \boxed{x = 2k\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (d) \quad (\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 &= 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = 8 = 2\sqrt{2} \\
 \text{donc l'équation proposée est équivalente à} \\
 \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cos(x) + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \sin(x) &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (E)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Notons } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos \theta &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \\
 (\text{possible car somme des carrés} &= 1) \\
 \text{et } \varphi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos \varphi &= \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (\text{possible car } |\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}| \leq 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } (E) &\Leftrightarrow \cos(\theta) \cos(x) + \sin(\theta) \sin(x) = \cos(\varphi) \\
 &\Leftrightarrow \cos(x - \theta) = \cos(\varphi) \\
 &\Leftrightarrow x - \theta = \varphi + 2k\pi \text{ ou } x - \theta = -\varphi + 2k\pi \\
 &\Leftrightarrow \boxed{x = \theta + \varphi + 2k\pi} \text{ ou } \boxed{x = \theta - \varphi + 2k\pi}
 \end{aligned}$$

BONUS (POUR LES ACHARNÉS !)

Comme $\cos \theta \geq 0$ et $\sin \theta \geq 0$ on a $\theta \in [0, \pi/2]$

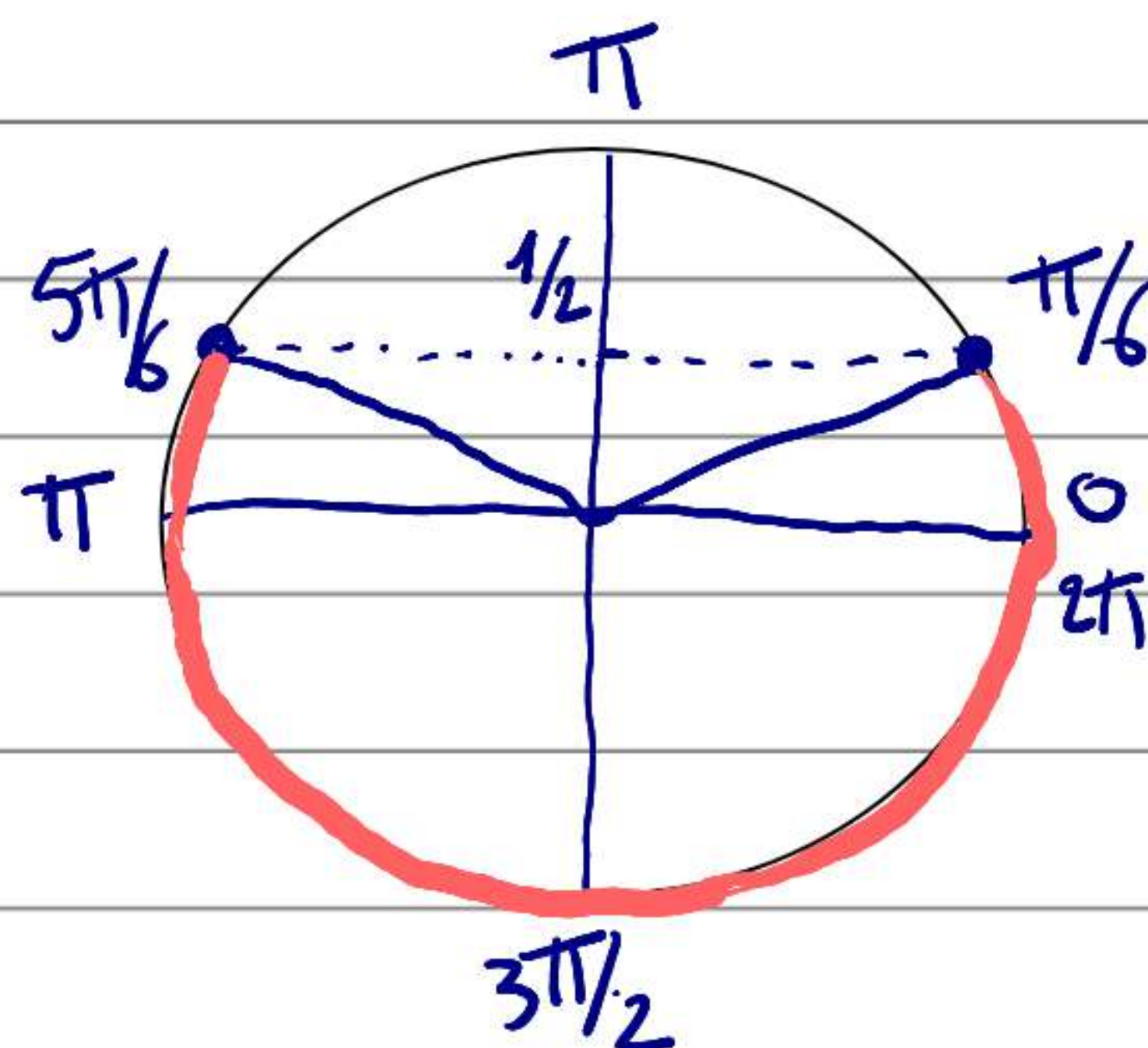
$$\text{donc } \theta = \arccos(\cos \theta) = \boxed{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)}$$

$$\text{Pour } \varphi, \text{ on est libre de prendre } \boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)}$$

EXO 17

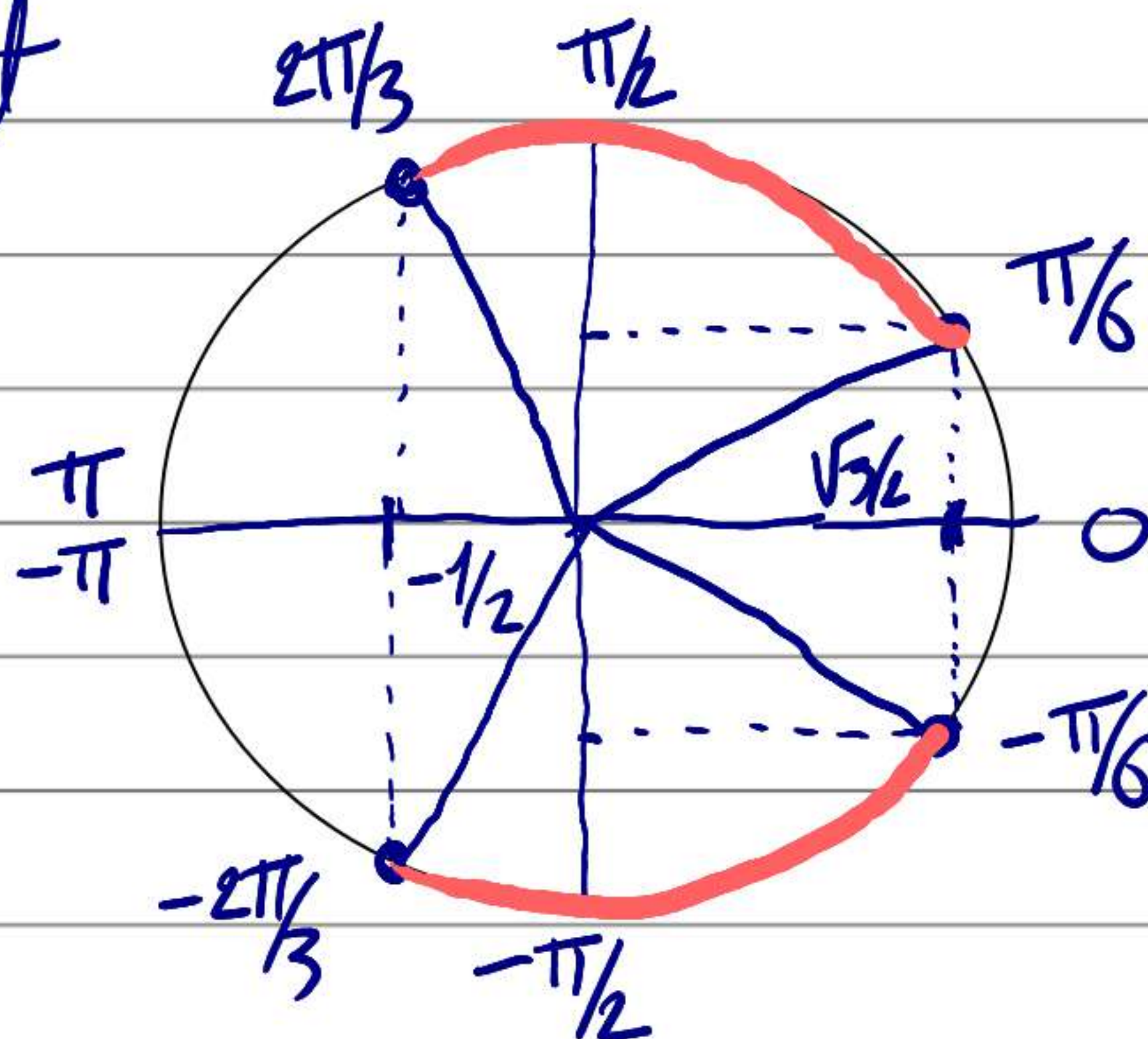
1) Par lecture graphique du
le cercle à-centre, on a:

$$\mathcal{G} = [0, \pi/6[\cup]5\pi/6, 2\pi]$$



2) Ce nouveau cercle est encore
plus magnifique que le précédent
et permet de voir que

$$\mathcal{G} =]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}[\cup]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}[$$



CHAPITRE 3

EXO 1

- 1) $\text{NON } P$ 2) $Q \Rightarrow P$ 3) $\text{NON } Q \text{ ou } P$ 4) $\text{NON } P \text{ et } \text{NON } Q$

EXO 2

$$\begin{aligned} (\text{NON } P \text{ et } Q) \text{ ou } (\text{NON } P \text{ et } \text{NON } Q) &\Leftrightarrow \text{NON } P \text{ et } (Q \text{ ou } \text{NON } Q) \\ &\Leftrightarrow \text{NON } P \text{ et } \text{VRAI} \\ &\Leftrightarrow \text{NON } P \end{aligned}$$

donc l'assertion proposée se simplifie en
 $(\text{NON } P) \text{ ou } (P \text{ et } Q)$

soit $(\text{NON } P \text{ ou } P) \text{ et } (\text{NON } P \text{ ou } Q)$

donc $\text{VRAI et } (\text{NON } P \text{ ou } Q)$

c'est $\boxed{\text{NON } P \text{ ou } Q}$

EXO 3

(1) $\text{NON } (a \leq -2 \text{ ou } a \geq 3) : a > -2 \text{ et } a < 3$

$$\Leftrightarrow \boxed{-2 < a < 3}$$

(2) $\text{NON } (a \leq 5 \text{ et } a > -1) : \boxed{a > 5 \text{ ou } a \leq -1}$

(3) $\text{NON } (a \leq 5 \text{ et } 3 > a) : a > 5 \text{ ou } 3 \leq a$
 $\Leftrightarrow \boxed{a \geq 3}$

EX04

Si nous partons, il n'y a personne (Pas faux)
 Si je reste ou que tu pars, alors il y a quelqu'un (Euh...)

EX05

$$1) \text{NON} (\text{NON} P \text{ ET } Q) : P \text{ OU } \text{NON} Q$$

$$\text{NON} (\text{NON} P \text{ OU } Q) : P \text{ ET } \text{NON} Q$$

$$2) \text{NON} (P \text{ OU } (Q \text{ ET } R)) : (\text{NON} P) \text{ ET } (\text{NON} Q \text{ OU } \text{NON} R)$$

$$\text{NON} (P \text{ ET } (Q \text{ OU } R)) : (\text{NON} P) \text{ OU } (\text{NON} Q \text{ ET } \text{NON} R)$$

$$3) P \Rightarrow \text{NON} Q \text{ s'écrit } \text{NON} P \text{ OU } \text{NON} Q \sim \text{négat}^\circ : P \text{ ET } Q$$

$$P \Leftrightarrow Q \text{ s'écrit } P \Rightarrow Q \text{ ET } Q \Rightarrow P$$

$$\text{soit } (\text{NON} P \text{ OU } Q) \text{ ET } (\text{NON} Q \text{ OU } P)$$

$$\text{Négation: } (P \text{ ET } \text{NON} Q) \text{ OU } (Q \text{ ET } \text{NON} P)$$

$$4) (\text{NON} P \text{ ET } Q) \Rightarrow R \text{ s'écrit } \text{NON} (\text{NON} P \text{ ET } Q) \text{ OU } R$$

$$\text{soit } P \text{ OU } \text{NON} Q \text{ OU } R$$

$$\text{Négation: } \text{NON} P \text{ ET } Q \text{ ET } \text{NON} R$$

EX06

$$1) (P \text{ ET } Q) \Rightarrow P \text{ s'écrit } \text{NON} (P \text{ ET } Q) \text{ OU } P$$

$$\text{soit } \text{NON} P \text{ OU } \text{NON} Q \text{ OU } P \text{ ce qui fait } \boxed{\text{VRAI}}$$

$$2) P \Rightarrow (P \text{ OU } Q) \text{ s'écrit } \text{NON} P \text{ OU } P \text{ OU } Q \text{ ce qui fait encore } \boxed{\text{VRAI}}$$

$$3) P \text{ OU } (P \Rightarrow Q) \text{ s'écrit } P \text{ OU } \text{NON} P \text{ OU } Q \text{ et est toujours } \boxed{\text{VRAI}}$$

EX07

1) Soient x et $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Si $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$, alors $x-1 = y-1$ donc $x=y$

Ainsi $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x=y$ d'où $x \neq y \Rightarrow \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$
par contraposée

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$

Supposons que n est impair : il s'écrit $n=2p+1$ avec $p \in \mathbb{Z}$

$$\text{d'où } n^2-1 = (n+1)(n-1) = (2p+2)2p = 4p(p+1)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } p \text{ est pair, } p(p+1) \text{ est multiple de 2 donc } 4p(p+1) \text{ multiple de 8} \\ \text{Si } p \text{ est impair, } p+1 \text{ est pair et } 4p(p+1) \text{ multiple de 8 encore} \end{array} \right.$

Dans tous les cas, n^2-1 est un multiple de 8

Par conséquent : si n est impair, alors n^2-1 est un multiple de 8

Par contraposée : si n^2-1 n'est pas divisible par 8, alors n est pair

3) Soit $a \in \mathbb{Z}$

Si $a/2$ est pair, alors $\frac{a}{2} = 2m$ avec $m \in \mathbb{Z}$

donc $a^2 = (4m)^2 = 16m^2$ est un multiple de 16

Par contraposée : si a^2 n'est pas un multiple de 16, alors $a/2$ n'est pas pair

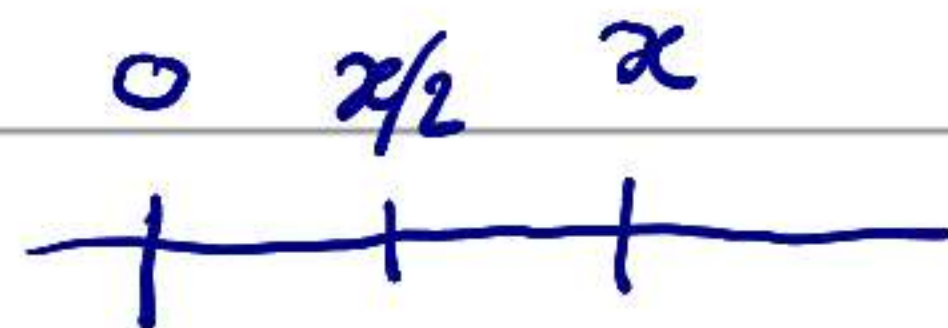
EXO 8

HYPOTHÈSE

1) Soit x un nombre réel tel que $x \leq \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $x > 0$

Considérons alors le réel $\varepsilon = \frac{x}{2}$



• $\varepsilon > 0$ puisque $x > 0$

• $x - \varepsilon = \frac{x}{2} > 0$ donc $x > \varepsilon$

Il existe ainsi un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On en déduit, par l'absurde, que $x \leq 0$

2) Soit n le carré d'un entier non nul

Raisonnons par l'absurde et supposons que $2n$ est le carré d'un entier

Alors

• $n = p^2$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

• $2n = q^2$ avec $q \in \mathbb{N}^*$

d'où $2 = (q/p)^2$ et $\sqrt{2} = p/q \notin \mathbb{Q}$: CONTRADICTION !

On en déduit par l'absurde que $2n$ n'est pas le carré d'un entier

EXO 9

Raisonnons par l'absurde et supposons que chaque tiroir contient au plus une paire de chaussettes.

Comme on a n tiroirs, on a donc au plus $n \times 1 = n$ paires de chaussettes. Ainsi $n+1 \leq n$ d'où $1 \leq 0$: CONTRADICTION !

On en déduit par l'absurde qu'au moins l'un des tiroirs contient deux paires de chaussettes.

EXO 10 Soient A, B et C trois points non alignés
Notons (Δ_1) la médiatrice de $[AB]$ et (Δ_2) celle de $[AC]$
Raisonnons par l'absurde et supposons que $(\Delta_1) \parallel (\Delta_2)$

- Par définition $(AB) \perp (\Delta_1)$
Or $(\Delta_2) \parallel (\Delta_1)$ donc $(\Delta_2) \perp (AB)$
- Or $(\Delta_2) \perp (AC)$ par définition
Comme $(\Delta_2) \perp (AB)$, alors $(AB) \parallel (AC)$ donc A, B et C
sont alignés : CONTRADICTION !

On a ainsi prouvé par l'absurde que (Δ_1) et (Δ_2)
sont sécantes

CHAPITRE 4

EXO 1

(a) Pour $x > 0$ $x^2 - 5x + 6 = x(x-5) + 6$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-5) = +\infty$ par somme d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-5) = +\infty$ par produit

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x-5) + 6 = +\infty$ par somme de limites soit $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5x + 6 = +\infty}$

(b) La factorisation menant à " $\infty \times 0$ " on utilise la quantité conjuguée :

Pour $x > 0$ $\sqrt{x^2+1} - x = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1) = +\infty$ par somme d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ par composition

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} + x = +\infty$ par somme soit enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$ par quotient

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = 0}$$

(c) Il faut mettre au même dénominateur pour calculer la différence puis factoriser :

pour $x > 0$ $\frac{x^3}{x^2+1} - x = \frac{x^3 - x(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} = \frac{-1}{x + 1/x}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty$ par somme de limites d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x + 1/x} = 0$ par quotient

Ainsi, on a établi que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2+1} - x = 0}$$

Dans cet exercice, les utilisations des opérations sur les limites ont été rédigées en détail : voici comment procéder à l'écrit (DM, DS ou concours). Il faudrait évidemment faire de même dans les exos suivants... rédigés plus rapidement pour gagner de la place et du temps !

EXO 2

(a) On a $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$ d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}}{x} = +\infty}$ par quotient de limites

De même, $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x}}{x} = -\infty}$

(b) et (c): on a affaire à des F.I " $\frac{0}{0}$ ", qui nécessitent d'utiliser les quantités conjuguées pour factoriser par x le terme comportant une racine carrée

(b) Pour $x \geq -4$ et $x \neq 0$, on a

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{(\sqrt{4+x}+2)(\sqrt{4+x}-2)}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}$ (fonction définie en 0) alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \frac{1}{4}}$

(c) Pour $x \in [-1; 1]$ et $x \neq 0$, on a

$$\frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-x^2})} = \frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{1-1+x^2} = \frac{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2} = 1+\sqrt{1-x^2}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 1+\sqrt{1-x^2} = 2$ (fonction définie en 0) alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}} = 2}$

(d) C'est plus simple, se manipule comme un quotient de polynômes: pour $x > 0$,

$$\frac{\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x} + 3\sqrt{x}} = \frac{1}{3+\sqrt{x}} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3+\sqrt{x}} = \frac{1}{3} \text{ (fonction définie en 0)}$$

d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} = \frac{1}{3}}$

Pas de grosse difficulté ici, il faut simplement bien analyser les problèmes pour utiliser les méthodes adéquates

EXO 3

(a) On a $\lim_{x \rightarrow -2} (x+4) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 3x + 2 = 4 - 6 + 2 = 0$ (fonctions définies en -2)

Le trinôme $x^2 + 3x + 2$ a pour racines -2 et -1

F.I. " $\frac{1}{0}$ " $\rightarrow$ signe!

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$	
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi, $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x^2 + 3x + 2) = 0^+$ donc par quotient

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x+4}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$$

et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x^2 + 3x + 2) = 0^-$ d'où

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{x+4}{x^2 + 3x + 2} = -\infty$$

(b) F.I. " $\frac{0}{0}$ " $\leadsto$ factorisation!

On a $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\text{donc } \frac{x+2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{x+2}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+1} = -1$ (fonction définie en -2) alors

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 + 3x + 2} = -1$$

(c) $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ cf. racines évidentes -2 et 3

$2x^2 + 5x + 2 = 2(x+2)(x + \frac{1}{2})$ cf. racines évidentes -2 et -1/2

$$\text{donc } \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{(x+2)(x-3)}{2(x+2)(x + \frac{1}{2})} = \frac{x-3}{2x+1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}\}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{2x+1} = \frac{5}{3}$ (fonction définie en -2) alors

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{5}{3}$$

EXO 4 F.I. " $\infty - \infty$ "

(a) Pour $x > 0$,
$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}})(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}})}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = +\infty = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{1}{x}}$

si bien que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} = 0$ par quotient soit
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}} = 0$$

(b) La F.I. " $\frac{0}{0}$ " pousse à utiliser la quantité conjuguée pour faire apparaître le facteur $x-4$, qui est le coupable ! Pour tout $x \in [2, 4[$, on a alors

$$\frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})(\sqrt{2x+1} + 3)} = \frac{(2x+1-9)(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{(x-2-2)(\sqrt{2x+1} + 3)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})}{\sqrt{2x+1} + 3} \quad \text{comme } 2x+1-9 = 2x-8 = 2(x-4) \\ \text{et } x-2-2 = x-4$$

Cette expression est parfaitement définie en 4 et vaut $\frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ pour $x=4$
de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(c) Pour $x > 1$
$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} = \frac{(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{x^2+1 - (x^2-1)}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2+1 = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2-1$ par somme donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2-1} = +\infty$ par composition

d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = 0$ par somme et quotient. Ainsi
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = 0$$

(d) Pour $x > 3$, $\frac{x+3}{x-3} = \frac{x(1+3/x)}{x(1-3/x)} = \frac{1+3/x}{1-3/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ (quotients puis sommes puis quotient!)

Or $\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{y} = 1$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = 1}$ par composition de limites

(e) F.I. " $\frac{0}{0}$ " $\leadsto$ il faut factoriser par une puissance de $x+1$, le coupable!

Pour $x > -1$, on a $\frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3} = \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}$

$\lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+1} = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow -1} (x+3)\sqrt{x+1} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}} = +\infty$

Ainsi $\boxed{\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3} = +\infty}$

(f) F.I. " $\frac{0}{0}$ " $\leadsto$ utilisation de la quantité conjuguée pour factoriser par $x-1$

Pour tout $x > 1$, on a $\frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2} = \frac{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} = \frac{(1-x)(\sqrt{x+3}+2)}{x+3-2}$

$= -(\sqrt{x+3}+2)$ comme $x+3-2 = x-1$ et $1-x = -(x-1)$

Or $\lim_{x \rightarrow 1} -(\sqrt{x+3}+2) = -4$ donc

$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x+3}-2} = -4}$

EX05

Pour $x > 0$, $\frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^m} = \frac{(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})(\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m})}{x^m(\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m})} = \frac{2x^m}{x^m(\dots)}$

$= \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} \times x^{m-m}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^m} + \sqrt{1-x^m}} = 1$ (fonction définie en 0), tout dépend de x^{m-m}

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Si } m > n, \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = 0 \\ \bullet \text{ Si } m = n, \lim_{x \rightarrow 0} x^{m-n} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = 1 \\ \bullet \text{ Si } m < n, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{m-n} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} = +\infty \end{array} \right.$$

EX06

(a) Pour tout $x \neq 0$, $|x \sin(1/x)| = |x| \cdot |\sin(1/x)| \leq |x|$
 Or $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$ (Thème des Gendarmes)

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $-1 - 3x \leq \cos(x) - 3x \leq 1 - 3x$
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 3x) = -\infty$ par produit et somme de limites.
 On déduit alors du Thème de Majoration que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos x - 3x) = -\infty}$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc $x^2 + 1 \leq x^2 + 2 - \cos(x) \leq x^2 + 3$
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ par somme donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - \cos(x)) = +\infty$ Thème de minoration
 On conclut alors par quotient que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2 + 2 - \cos x} = 0}$

EX07

(a) Pour $x > 0$, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$

(b) Pour $x < 0$, $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1 - 1}{x} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$

Pour $x > 0$, $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x \ln x + 1 - 1}{x} = \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ donc $\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0}$

(c) Pour $x \neq 0$ $\frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \frac{1}{1+|x|} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc h est dérivable en 0 et $h'(0)=1$

EXO 8

(a) Pour $x \neq 1$ $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{|x^2+2x-3|}{x-1} = \frac{|x-1| \times |x+3|}{x-1} = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x > 1 \\ -|x+3| & \text{si } x < 1 \end{cases}$

donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 4$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -4$

f est dérivable à gauche et à droite uniquement

(b) Pour $x \neq 1$ $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ donc g est dérivable en 1 et $g'(1)=0$

(c) Pour $x > 1$ $\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \frac{e^{x-1}-1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ cf. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Pour $x < 1$ $\frac{h(x)-h(1)}{x-1} = \frac{x \ln x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ cf. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$

Ainsi h est dérivable en 1 et $h'(1)=0$

EXO 9

(a) f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 21x^6 - x^3$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(b) g est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$

Pour $x > 0$ $g(x) = 4x^{1/2} - x^{-3/2}$ donc $g'(x) = 2x^{-1/2} + \frac{3}{2}x^{-5/2} = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

(c) h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ cf. produit de fonctions dérivables

et $h'(x) = -\sin(x) \times \sin(x) + \cos(x) \times \cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(d) Comme $x^2+1 > 0$ sur $\mathbb{R}$, k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée)

et $k'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

(e) l est polynomiale donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composition :

$$l'(x) = 7x(2x+1) \times (x^2+x)^6 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2-2	$+$	0	$-$	$+$

(f) m est définie pour $x^2-2 \geq 0$ et dérivable pour $x^2-2 > 0$
Ainsi m est dérivable sur $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et

$$m'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-2}}$$

EXO 10

(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -\sin(x) \times (-\sin(\cos(x))) = \sin(x) \times \sin(\cos(x)) \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

(b) g est définie lorsque $\frac{x+1}{x-1} \geq 0$ et dérivable lorsque $\frac{x+1}{x-1} > 0$ (composée)

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$	$+$	0	$-$	$+$

g définie sur $]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$
et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$\left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{1 \times (x-1) - (x+1) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\text{donc } g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = \frac{-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{(x-1)^2}$$

(c) h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée) et $h'(x) = 3 \times 2 \cos(3x+2) \sin(3x+2)$
 $= 6 \cos(3x+2) \sin(3x+2)$

(d) $k = \sin^{-4}$ est définie et dérivable lorsque $\sin x \neq 0$,
c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. Sur cet ensemble, on a

$$k'(x) = -4 \sin'(x) \sin^{-5}(x) = \frac{-4 \cos(x)}{\sin^5(x)}$$

EXO 11 Il suffit de reconnaître des dérivées

(a) $f(x) = x^2 - 2/x$ sur $\mathbb{R}^*$ $\rightsquigarrow$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} - 2 \ln|x| \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

(b) $g(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} = x^{-5/2}$ sur $]0, +\infty[$ $\rightsquigarrow$

$$G(x) = \frac{-2}{3} x^{-3/2} = \frac{-2}{3x\sqrt{x}} \text{ sur }]0, +\infty[$$

(c) Notons $u(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $u'(x) = 2x$ donc

$$h(x) = \frac{1}{2} u'(x) e^{u(x)} \rightsquigarrow$$

$$H(x) = \frac{e^{u(x)}}{2} = \frac{e^{x^2+1}}{2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

(d) Notons $u(x) = \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$. Alors $u'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ donc

$$k(x) = 2 u'(x) e^{u(x)} \rightsquigarrow$$

$$K(x) = 2 e^{u(x)} = 2 e^{\sqrt{x}} \text{ sur }]0, +\infty[$$

(e) Notons $u(x) = x^2 + 3$ sur $\mathbb{R}$. Alors $u'(x) = 2x$ donc

$$l(x) = \frac{1}{2} u' \sqrt{u} = \frac{1}{2} u' u^{1/2} \rightsquigarrow$$

$$L(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{(x^2+3)^{3/2}}{3} \text{ sur } \mathbb{R}$$

(f) De même, $m(x) = \frac{1}{2} \frac{u'}{u^3} = \frac{1}{2} u' u^{-3} \rightsquigarrow$

$$M(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u^{-2}}{-2} = \frac{-1}{4(x^2+3)^2} \text{ sur } \mathbb{R}$$

(g) Notons $u(x) = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$. Alors $u'(x) = 1/x$ donc

$$n(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ sur }]0, 1[\cup]1, +\infty[\rightsquigarrow$$

$$N(x) = \ln|u| = \ln|\ln(x)| \text{ sur }]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

(h) Notons $u(x) = 2e^x + 5$ sur $\mathbb{R}$. Alors $u'(x) = 2e^x$ donc

$$p(x) = \frac{1}{2} \frac{u'}{u} \rightsquigarrow$$

$$P(x) = \frac{1}{2} \ln|u| = \ln\sqrt{2e^x+5} \text{ sur } \mathbb{R}$$

À PARTIR DE LA h , IL EST JUDICIEUX D'INTRODUIRE UNE FONCTION AUXILIAIRE u ET DE TOUT EXPRIMER EN FONCTION DE u ET u' AFIN DE RECONNAÎTRE LA DÉRIVÉE D'UNE COMPOSÉE

EXO 12

1) $f: x \mapsto (1+x)^\alpha$ dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$
En particulier $f'(0) = \alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$

donc $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha$ soit $\boxed{(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x}$

AUTRE MÉTHODE

Pour $x > -1$, on a $\ln((1+x)^\alpha) = \alpha \ln(1+x)$ donc $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \alpha \ln(1+x) = 0$ et que $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$,

on obtient $(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha \ln(1+x)} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$

2) C'est une généralisation des croissances comparées vues au cours.

Pour $x > 0$ $\frac{x^\alpha}{a^x} = x^\alpha a^{-x} = x^\alpha e^{-x \ln(a)}$

Prenons $X = -x \ln(a)$: comme $a > 1$, $\ln(a) > 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = -\infty$ (produit)
De plus, $x = -X / \ln(a)$ d'où $\frac{x^\alpha}{a^x} = (-X)^\alpha e^X / (\ln(a))^\alpha$

Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} (-X)^\alpha e^X = 0$ par croissances comparées donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0}$

EXO 13

(a) $6x - 7 = o(x^2)$ donc $-4x^2 + 6x - 7 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -4x^2$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 = -\infty$ par produit, alors

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^2 + 6x - 7 = -\infty}$$

(b) On a $2x^2 - 3x + 5 \underset{+\infty}{\sim} 2x^2$ et $x^3 + x - 3 \underset{+\infty}{\sim} x^3$ donc $\frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + x - 3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x}$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ par quotient donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 5}{x^3 + x - 3} = 0}$$

(c) De même, $2x - \sqrt{x} \sim 2x$ et $\sqrt{x} - 3 \sim \sqrt{x}$

donc $\frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ par produit,

alors $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} = +\infty}$

EXO 14

1) $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ donc $\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$ d'où $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\ln(1+2x)}{x \ln x} \sim \frac{2x}{x \ln x} = \frac{2}{\ln(x)}$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\ln(x)} = 0$ par quotient de limites, alors $\boxed{g(x) = o_{x \rightarrow 0}(f(x))}$

2) Pour $x < -1$ $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) = \ln|x+1| - \ln|x|$
si bien que $\frac{g(x)}{f(x)} = (x+1) \ln|x+1| - (x+1) \ln|x|$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln|x+1| = 0$ par croissance comparées.
De plus, $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln|x| = 0$ par produit d'où $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Ainsi, on a $\boxed{g(x) = o_{x \rightarrow -1}(f(x))}$

AUTRE VERSION $\frac{g(x)}{f(x)} = (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = x \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ pour $x < -1$

Comme $\lim_{x \rightarrow -1} 1 + \frac{1}{x} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow 0} X \ln X = 0$,

alors $\lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ par composition d'où $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ (produit)

$$3) f(x) = x^{-1/x} = e^{-\ln(x)/x} \text{ pour } x > 0$$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \ln(x) e^{\frac{\ln(x)}{x}} = x \times \frac{\ln(x)}{x} e^{\frac{\ln(x)}{x}}$$

Posez $X = \frac{\ln(x)}{x}$: on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = -\infty$ par quotient

Or $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ (c.c.) donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 0$ par composition

d'où par produit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

Ainsi $\boxed{g(x) = o\left(f(x)\right)_{x \rightarrow 0}}$

EXO 15

(a) Pour $x > 0$: $\cos x \geq -1$ et $\sin x \geq -1$ donc $2 + \cos x \geq 1$

d'où $x(2 + \cos x) \geq x$ et $x(2 + \cos x) + \sin x \geq x - 1$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \cos x) + \sin x = +\infty}$ (Théorème minoration)

(b) Comme $\sin$ et $\cos$ sont bornés et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$,
alors $\cos(x) = o(x)$ et $\sin(x) = o(x)$

De ce fait $2x + \sin(x) \sim 2x$ et $x - 4\cos(x) \sim x$ d'où $\frac{2x + \sin(x)}{x - 4\cos(x)} \sim 2$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sin(x)}{x - 4\cos(x)} = 2}$$

(c) Comme $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} 2x$ et que $\sin u \sim u$,
alors $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(3x) \sim 3x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) \sim 2x$ d'où $\frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} \sim \frac{3}{2}$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)} = \frac{3}{2}}$$

(d) Pour $x > 0$, $x^x - 1 = e^{x \ln(x)} - 1$

Or $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$ (croissances comparées) et $e^u - 1 \sim u$

donc $e^{x \ln(x)} - 1 \sim x \ln(x)$ d'où $\frac{x^x - 1}{\ln(x)} \sim x$

Ainsi $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln(x)} = 0}$

(e) Pour $x > 0$ $x^{\sin(x)} - 1 = e^{\sin(x) \ln(x)} - 1$

Or $\sin(x) \sim x$ donc $\sin(x) \ln(x) \sim x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

Comme $e^u - 1 \sim u$, alors $e^{\sin(x) \ln(x)} - 1 \sim \sin(x) \ln(x) \sim x \ln(x)$

d'où $\frac{x^{\sin(x)} - 1}{x \ln(x)} \sim 1$. Ainsi $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\sin(x)} - 1}{x \ln(x)} = 1}$

(f) Pour $x \neq \pm a$, on a $\frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2} = \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} \times \frac{\sin(x) + \sin(a)}{x + a}$

• Par définition de la dérivée, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) - \sin(a)}{x - a} = \sin'(a) = \cos(a)$

• Si $a \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x) + \sin(a)}{x + a} = \frac{2 \sin(a)}{2a} = \frac{\sin(a)}{a}$ (fonction définie en a)

et donc

$\boxed{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x^2 - a^2} = \frac{\sin(a) \cos(a)}{a}}$ par produit de limites

• Si $a = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ car $\sin x \sim x$ donc

$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 1}$

EXO 17

(a) Pour $x > 1$, l'expression $x^2 + 2x - 3$ est positive donc $\sqrt{x^2 + 2x - 3}$ est bien définie

Comme $x^2 + 2x - 3 \underset{+\infty}{\sim} x^2$, alors $\boxed{\sqrt{x^2 + 2x - 3} \underset{+\infty}{\sim} x}$

On peut aussi écrire $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} = x \times \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} \sim x$

b) $\frac{\pi x}{2x+1} \sim \frac{\pi x}{2x} = \frac{\pi}{2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2}$

De ce fait $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = 1$ par composition et $\cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) \sim \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)}$

Or $\frac{\pi x}{2x+1} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi x}{2x+1} - \frac{\pi(x+\frac{1}{2})}{2x+1} = \frac{-\pi}{4x+2}$ d'où $\frac{\pi x}{2x+1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4x+2}$

De ce fait $\cos\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4x+2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4x+2}\right) \sim \frac{\pi}{4x+2} \sim \frac{\pi}{4x}$
 car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4x+2} = 0$ et $\sin(u) \sim u$ $u \rightarrow 0$

Ainsi

$$\cos \frac{\pi x}{2x+1} \sim \frac{4x}{\pi}$$

(Question assez difficile!)

(c) Faut utiliser la quantité conjuguée! Pour $x > 0$, on a

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

De plus, $\sqrt{x+\sqrt{x}} = \sqrt{x(1+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \sqrt{x} \times \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}$ car $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

De même, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} &= \sqrt{x+\sqrt{x^2(\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}})}} = \sqrt{x(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}})} \\ &= \sqrt{x} \times \sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}} \end{aligned}$$

si bien que

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}}} + 1 \right) \sim 2\sqrt{x}$$

et donc

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}$$

EXO 18

$$(a) \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{2 \cos x - \sin^2 x}{\sin^2 x \times \cos x} \quad \text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos(x) - \sin^2(x) = 2 \quad (\text{fonction définie en } 0) \quad \text{donc } 2 \cos(x) - \sin^2(x) \underset{0}{\sim} 2$$

$$\text{et } \sin^2 x \times \cos x \underset{0}{\sim} \sin^2(x) \underset{0}{\sim} x^2 \quad \text{puisque } \cos(x) \underset{0}{\sim} 1 \text{ et } \sin(x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\text{donc } \boxed{\frac{2}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\cos(x)} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^2}}$$

$$(b) \sin x + \cos x - \tan x - 1 = \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} + \cos x - 1 = \frac{\sin x}{\cos x} (\cos x - 1) + (\cos x - 1) \\ = (1 + \tan(x))(\cos x - 1)$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \tan(x) = 1 \quad (\text{fonction définie en } 0) \quad \text{donc } 1 + \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$$

$$\text{et } \cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \quad \text{donc } \sin x + \cos x - \tan x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$$

$$\text{si bien que } \boxed{\frac{\sin(x) + \cos(x) - \tan(x) - 1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{2}}$$

$$(c) \text{ On va utiliser } e^u - 1 = u + o(u) \quad \text{soit } e^u = 1 + u + o(u), \text{ et } \sin u = u + o(u)$$

$$\text{Comme } \lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x), \text{ alors } \begin{cases} e^{\sin(2x)} = 1 + \sin(2x) + o(\sin(2x)) \\ e^{\sin(x)} = 1 + \sin(x) + o(\sin(x)) \end{cases}$$

$$\text{donc } e^{\sin(2x)} - e^{\sin(x)} = \sin(2x) - \sin(x) + o(\sin(2x)) - o(\sin(x))$$

$$= 2x + o(2x) - (x + o(x)) + o(\sin(2x)) - o(\sin x)$$

$$= x + o(2x) - o(x) + o(\sin 2x) - o(\sin x)$$

Or $\sin(2x) \sim 2x$ et $\sin(x) \sim x$ donc $o(\sin 2x) = o(x)$, $o(\sin x) = o(x)$
 si bien que $o(2x) - o(x) + o(\sin 2x) - o(\sin x) = o(x)$
 et donc $e^{\sin(2x)} - e^{\sin(x)} \sim x$

Enfin $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \sim \sin x \sim x$ d'où $\boxed{\frac{e^{\sin(2x)} - e^{\sin(x)}}{\tan(x)} \sim 1}$

EXO 19

(a) Pour $x > 0$ $(1+x)^{\ln(x)+1} = e^{(\ln(x)+1)\ln(1+x)} = e^{\ln(x)\ln(1+x) + \ln(1+x)}$

Comme $\ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $\ln(1+x) \sim x$ d'où $\ln(x)\ln(1+x) \sim x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (C.C.)

donc $\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x)\ln(1+x) + \ln(1+x)] = 0$ par somme de limites

si bien que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln(x)+1} = 1}$ par composition

(b) Pour $x > 0$, on a $\ln(1+e^{-x})^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\ln(1+e^{-x}))\right)$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\ln(1+u) \sim u$, alors $\ln(1+e^{-x}) \sim e^{-x}$

si bien que $\ln(1+e^{-x}) = e^{-x} + o(e^{-x}) = e^{-x}(1+o(1))$

Il en découle que $\ln(\ln(1+e^{-x})) = \ln(e^{-x}) + \ln(1+o(1)) = -x + \ln(1+o(1))$

et $\frac{1}{x} \ln(\ln(1+e^{-x})) = -1 + \frac{\ln(1+o(1))}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$ car $\ln(1+o(1)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$

Par composition, on en déduit que

$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x})^{1/x} = e^{-1} = 1/e}$

(c) Pour $x > 3$, $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = \exp\left[x \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right]$. Or $\frac{x+1}{x-3} - 1 = \frac{x+1-(x-3)}{x-3} = \frac{4}{x-3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
 donc $\frac{x+1}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3}$ d'où $\ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = \ln\left(1 + \frac{4}{x-3}\right) \sim \frac{4}{x-3} \sim \frac{4}{x}$

Ainsi $x \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) \sim 4$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) = 4$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = e^4}$

par composition de limites

CHAPITRE 5

EX01

Voici les parties de $\{a, b, c, d\}$, groupées par cardinalité

$\emptyset$

$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$

$\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{a, d\}$ $\{b, c\}$ $\{b, d\}$ $\{c, d\}$

$\{a, b, c\}$ $\{a, b, d\}$ $\{a, c, d\}$ $\{b, c, d\}$

$\{a, b, c, d\}$

Il y en a $16 = 2^4$... et c'est normal.

EX02

1) $A \subset (A \cup B)$ donc $A \cap (A \cup B) = A$

2) Implication réciproque

Si $A = B$, alors $A \cap B = A = A \cup B$ donc $A \cap B = A \cup B$

Implication directe

Ainsi $A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B$

Supposons que $A \cap B = A \cup B$

Comme $B \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B$, alors $B \subset A \cup B = A \cap B = B$ soit $A \cup B = A \cap B = B$

De même, $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$ donc $A \subset A \cup B = A \cap B = A$ soit $A \cup B = A \cap B = A$

Ainsi $A = B$

On a bien montré que $A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B$

$$\begin{aligned} 3) (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) &= [\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})] \cup (A \cap B) \\ &= (\bar{A} \cap E) \cup (A \cap B) \\ &= \bar{A} \cup (A \cap B) \\ &= (\underbrace{\bar{A} \cup A}_E) \cap (\bar{A} \cup B) = \bar{A} \cup B \end{aligned}$$

$$4) A \text{ et } B \text{ disjointes} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = E \\ \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = E$$

EXO 3

1) Implication réciproque

Supp que $A \subset C$ et $B \subset C$

Pour tout $x \in A \cup B$, on a $x \in A$ ou $x \in B$

* Si $x \in A$, alors $x \in C$ puisque $A \subset C$

* Si $x \in B$, alors $x \in C$ puisque $B \subset C$

Ainsi $x \in C$ dans tous les cas, si bien que $A \cup B \subset C$

$$A \subset C \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$$

Implication directe

Supposons que $A \cup B \subset C$

Comme $A \subset A \cup B$, alors $A \subset A \cup B \subset C$ d'où $A \subset C$

De même, $B \subset A \cup B \subset C$ d'où $B \subset C$

Ainsi $A \subset C$ et $B \subset C$

$$A \cup B \subset C \Rightarrow A \subset C \text{ et } B \subset C$$

2) Implication directe

Supposons que $A \cap C = A \cup B$

Comme $B \subset A \cup B$, alors $B \subset A \cap C$. Or $A \cap C \subset A$ d'où $B \subset A$

Comme $A \subset A \cup B$, alors $A \subset A \cap C$. Or $A \cap C \subset C$ d'où $A \subset C$

Ainsi $B \subset A \subset C$

$$A \cap C = A \cup B \Rightarrow B \subset A \subset C$$

Implication réciproque

Supposons que $B \subset A \subset C$. Alors $A \cup B = A = A \cap C$ soit $A \cup B = A \cap C$

$$B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$$

EXO 4

- 1) Il existe une voiture rapide qui n'est pas rouge.
- 2) $\exists \varepsilon > 0, \forall q \in \mathbb{R}, q \leq 0 \text{ ou } q \geq \varepsilon$
- 3) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
- 4) Il existe un triangle rectangle sans angle droit
- 5) Tous les montres écossais sont entièrement blancs.

EXO 5

- 1) $\forall m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n \geq m$: VRAI, il suffit de prendre $m = n$
 $\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq m$: VRAI aussi, on prend $m = 0$
- 2) Vrai dans les deux cas, il suffit de prendre $m = 0$
- 3) $\forall m \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{Z}, n \geq m$: VRAI avec $m = n$
 $\exists m \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq m$: signifie que $\mathbb{Z}$ possède un minimum ... ce qui est faux
- 4) Vrai dans les deux cas, il suffit de prendre $m = 0$

EXO 6

- 1) Le plus simple est de dresser le tableau de variations de f sur A .

x	-1	0	4
$f(x)$	1	0	16

On lit dedans que $f(A) = [0, 16]$

- 2) $B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

(a) Supposons que $B \subset C$ et montrons que $f(B) \subset f(C)$

• Soit $x \in f(B)$: il existe $b \in B$ tel que $x = f(b)$

• Comme $B \subset C$, alors $b \in C$ donc $x \in f(C)$

Ainsi $x \in f(B) \Rightarrow x \in f(C)$ d'où $f(B) \subset f(C)$

On a bien démontré

$$B \subset C \Rightarrow f(B) \subset f(C)$$

(b) Idée : utiliser le contre-exemple pour exhiber deux parties disjointes B et C ayant la même image directe
 $B = \{1\}$ et $C = \{2\}$. Alors $f(B) = \{1\} = f(C)$ mais $B \neq C$
 ce qui prouve que $f(B) = f(C) \Rightarrow B = C$ est fausse.

EXO 7

1) Soit $x \in \mu(A \cup A')$

Par définition, il existe $a \in A \cup A'$ tel que $x = \mu(a)$

On a deux cas : 1) soit $a \in A$... auquel cas $x \in \mu(A) \subset \mu(A) \cup \mu(A')$

2) soit $a \in A'$... auquel cas $x \in \mu(A') \subset \mu(A) \cup \mu(A')$

Ainsi pour tout $x \in \mu(A \cup A')$, on a $x \in \mu(A) \cup \mu(A')$ c'est-à-dire $\mu(A \cup A') \subset \mu(A) \cup \mu(A')$

Soit $x \in \mu(A) \cup \mu(A')$

1) Si $x \in \mu(A)$, il existe $a \in A$ tel que $x = \mu(a)$

Comme $A \subset A \cup A'$, on a donc $x \in \mu(A \cup A')$

2) Si $x \in \mu(A')$, il existe $a \in A'$ tel que $x = \mu(a)$

Comme $A' \subset A \cup A'$, on a donc $x \in \mu(A \cup A')$

Ainsi $x \in \mu(A \cup A')$ pour tout $x \in \mu(A) \cup \mu(A')$ c'est-à-dire $\mu(A) \cup \mu(A') \subset \mu(A \cup A')$

Par double inclusion, on a bien prouvé que $\mu(A \cup A') = \mu(A) \cup \mu(A')$

2) Soit $x \in \mu(A \cap A')$: il existe $a \in A \cap A'$ tel que $x = \mu(a)$

• Comme $A \cap A' \subset A$, $a \in A$ donc $x \in \mu(A)$

• Comme $A \cap A' \subset A'$, $a \in A'$ donc $x \in \mu(A')$

Ainsi $x \in \mu(A)$ et $x \in \mu(A')$ c'est-à-dire $x \in \mu(A) \cap \mu(A')$

On a bien montré que

$$\mu(A \cap A') \subset \mu(A) \cap \mu(A')$$

Pour montrer que l'inclusion inverse est fautive, on prend $\mu: x \mapsto x^2$ et on utilise la parabole pour exhiber deux parties disjointes ayant la même image.

$$A = \{1\} \quad A' = \{-1\} \quad \mu(A) = \{1\} = \mu(A') \quad \text{donc } \mu(A \cap A') = \{1\}$$

cependant $A \cap A' = \emptyset$ donc $\mu(A \cap A') = \emptyset$

3) Montrons l'inclusion $\mu(A) \cap \mu(A') \subset \mu(A \cap A')$ dans le cas où μ est injective

Soit $x \in \mu(A) \cap \mu(A')$

• $x \in \mu(A)$ donc il existe $a \in A$ tel que $x = \mu(a)$

• $x \in \mu(A')$ — — — $a' \in A'$ tel que $x = \mu(a')$

Ainsi $\mu(a) = \mu(a')$: comme μ est injective, il en découle que $a = a'$

Enfin $a \in A \cap A'$ de ce fait, si bien que $x = \mu(a) \in \mu(A \cap A')$

On a bien montré que

$$\mu(A) \cap \mu(A') \subset \mu(A \cap A') \text{ si } \mu \text{ est injective}$$

soit $\mu(A) \cap \mu(A') = \mu(A \cap A')$

EX08

1) Supposons que $g \circ f$ est injective

Soient x et $y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$

Alors $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ d'où $x = y$ par injectivité de $g \circ f$

Ainsi $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, ce qui prouve que f est injective

2) Supposons que $g \circ f$ est surjective.

Soit $y \in G$: par surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$

Ainsi il existe $z = f(x) \in F$ tel que $y = g(z)$: ceci étant vrai pour tout $y \in G$, on en déduit que g est surjective

EXO 9

1) On suppose que f et g sont injectives

Soient x et $y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$

Alors $g(f(x)) = g(f(y))$ d'où $f(x) = f(y)$ par injectivité de g
d'où $x = y$ par injectivité de f

Ainsi $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$, ce qui montre que $g \circ f$ est injective

2) On suppose que f et g sont surjectives

Soit $z \in G$: comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$

De même, f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$

Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$

Ceci étant vrai pour tout $z \in G$, on en déduit que $g \circ f$ est surjective

3) Si f et g sont bijectives, elles sont injectives et surjectives donc, d'après les questions 1) et 2), $g \circ f$ est injective et surjective, c'est-à-dire $g \circ f$ est bijective

EXO 10

Dans chaque cas, il faut se restreindre à un intervalle de stricte monotonie pour assurer l'injectivité et prendre l'ensemble des valeurs atteintes comme ensemble d'arrivée pour assurer l'injectivité

1) $f'(x) = 2x$ du signe de x donc
 $f \uparrow$ sur $]0, +\infty[$ et $f \downarrow$ sur $] -\infty, 0]$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

f est une bijection de $]0, +\infty[$
sur $[-1, +\infty[$

2) g est str $\uparrow$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction str $\uparrow$. Via le tableau,

g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3) Même chose pour h (tableau de variations identique à celui de g)

EXO 11

1) $f'(x) = 3e^{3x} + 2e^x > 0$
donc f est str $\uparrow$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi

f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-5, +\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-5	$+\infty$

2) $g'(x) = 3x^2e^{x^3} \geq 0$ et ne s'annule qu'en 0 donc g est str $\uparrow$ sur $\mathbb{R}$, donc

g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, +\infty[$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	-1	$+\infty$

3) $h'(x) = \frac{2}{x} + 3x^2 + 1 > 0$ sur $]0, +\infty[$
donc h est strictement $\uparrow$ sur $]0, +\infty[$ et

h est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

x	0	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

CHAPITRE 6

EXO 1

$$(a) \quad z_1 = \frac{x+iy}{(x-1)+iy} = \frac{(x+iy)((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x(x-1)+y^2+i(y(x-1)-y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{Re}(z_1) = \frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_1) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}}$$

$$(b) \quad z_2 = (x+iy)^2 + \frac{1}{x+iy} + 2-i = x^2-y^2+2ixy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} + 2-i$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{Re}(z_2) = x^2+y^2 + \frac{x}{x^2+y^2} + 2} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_2) = 2xy - \frac{y}{x^2+y^2} - 1}$$

$$(c) \quad z_3 = \frac{-i(x+iy)-1}{(x+1)+iy} = \frac{((y-1)-ix)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{(x+1)(y-1)-xy+i(-y(y-1)-x(x+1))}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{Re}(z_3) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(z_3) = \frac{-x+y-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}}$$

EXO 2

$$(a) \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow (\bar{z}-i)(z-i) = (\bar{z}+i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - i(z+\bar{z}) - 1 = z\bar{z} + i(z+\bar{z}) - 1$$

$$\Leftrightarrow 2i(z+\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$$

$$\text{donc} \quad \boxed{z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = -\frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow (\bar{z}-i)(z-i) = -(\bar{z}+i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - i(z+\bar{z}) - 1 = -z\bar{z} - i(z+\bar{z}) + 1$$

$$\Leftrightarrow 2(z\bar{z} - 1) = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

$$\text{donc} \quad \boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1}$$

(b) Pour $z = x + iy$ (avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) on obtient

$$Z = (x + iy)^2 + x + iy + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1 \\ = x^2 + x - y^2 + 1 + i(2xy + y) =$$

donc $\boxed{Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0}$ et $\boxed{Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + x - y^2 + 1 = 0}$

en notant $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$

(c) $Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{z^2}{z+2i} = \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}-2i} \Leftrightarrow z^2\bar{z} - 2iz^2 = z\bar{z}^2 + 2i\bar{z}^2 \\ \Leftrightarrow z\bar{z}(z-\bar{z}) - 2i(z^2 + \bar{z}^2) = 0$

Avec $z = x + iy$, on obtient $(x^2 + y^2)2iy - 2i(2x^2 - 2y^2) = 0$

soit $\boxed{Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2y(x^2 + y^2) + 4y^2 - 4x^2 = 0}$ en notant $x = \operatorname{Re}(z)$
 $y = \operatorname{Im}(z)$

De même, $\bar{Z} = -Z \Leftrightarrow z^2\bar{z} - 2iz^2 = -z\bar{z}^2 - 2i\bar{z}^2$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}(z+\bar{z}) - 2i(z^2 - \bar{z}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}(z+\bar{z}) - 2i(z+\bar{z})(z-\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)2x - 2i(2x)(2iy) = 0$$

soit $\boxed{Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x(x^2 + y^2 + 4xy) = 0}$

(d) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = Z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-1} = \frac{z+i}{z-1} \Leftrightarrow (\bar{z}-i)(\bar{z}-1) = (\bar{z}-1)(z+i)$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - i\bar{z} - \bar{z} + i = z\bar{z} - \bar{z} + i\bar{z} - i$$

$$\Leftrightarrow -i(z+\bar{z}) + \bar{z} - \bar{z} + 2i = 0$$

Avec $z = x + iy$ on obtient $-i2x + 2iy + 2i = 0$ soit $y + 1 - x = 0$

De ce fait $\boxed{Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y + 1 - x = 0}$

De même, $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow z\bar{z} - i\bar{z} - \bar{z} + i = -z\bar{z} + \bar{z} - i\bar{z} + i$

$$\Leftrightarrow 2z\bar{z} - i(\bar{z} - \bar{z}) - (\bar{z} + \bar{z}) = 0$$

Avec $z = x + iy$, on obtient $2(x^2 + y^2) - i 2iy - 2x = 0$
 De ce fait, $\boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + y = 0}$ en notant $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$

EX03

- (a) $(1+i)(1+2i) = 1 + 2i + i - 2 = -1 + 3i$
 (b) $i(5-i)(i-1) = (1+5i)(i-1) = i - 1 - 5 - 5i = -6 - 4i$
 (c) $\frac{18+26i}{-2+2i} = \frac{9+13i}{-1+i} = \frac{(9+13i)(-1-i)}{|-1+i|^2} = \frac{-9-9i-13i+13}{2} = 2-11i$
 (d) $\frac{1}{2+i} - \frac{1}{3-i} = \frac{2-i}{|2+i|^2} - \frac{3+i}{|3-i|^2} = \frac{2-i}{5} - \frac{3+i}{10} = \frac{4-2i-(3+i)}{10} = \frac{1-3i}{10}$
 (e) $\frac{1}{2+3i} - \frac{1}{4+5i} = \frac{2-3i}{13} - \frac{4-5i}{41} = \frac{82-123i-(52-65i)}{13 \times 41} = \frac{30-58i}{533}$
 (f) $(1+2i)^3 = (1+2i)(1+2i)^2 = (1+2i)(1+4i-4) = (1+2i)(-3+4i) = -3+4i-6i-8 = -11-2i$

EX04

$$\bar{\alpha} = 2 + \bar{z}z = \alpha \text{ donc } \boxed{\alpha \in \mathbb{R}} \quad \bar{\beta} = \bar{z}^2 - z^2 = -\beta \text{ donc } \boxed{\beta \in i\mathbb{R}}$$

$$\bar{\gamma} = (\bar{z} - iz)(z + i\bar{z}) = \gamma \text{ donc } \boxed{\gamma \in \mathbb{R}} \quad \delta = -iz\bar{z} = -i|z|^2 \text{ donc } \boxed{\delta \in i\mathbb{R}}$$

EX05

$$2\bar{z} + 1 - i = i\bar{z} + 2 \Leftrightarrow (2-i)\bar{z} = 1+i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{2+i+2i-1}{5} = \frac{1+3i}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{z} = \frac{1+3i}{5}}$$

EX06

$$|z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + i(z-\bar{z}) + 1 = z\bar{z} + i(\bar{z}-z) + 1$$

$$\Leftrightarrow 2i(z-\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad \text{CQFD}$$

EXO 7

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z}' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

si bien que $|z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$

et donc

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

EXO 8

Posons $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z+z' = 2x$ et $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

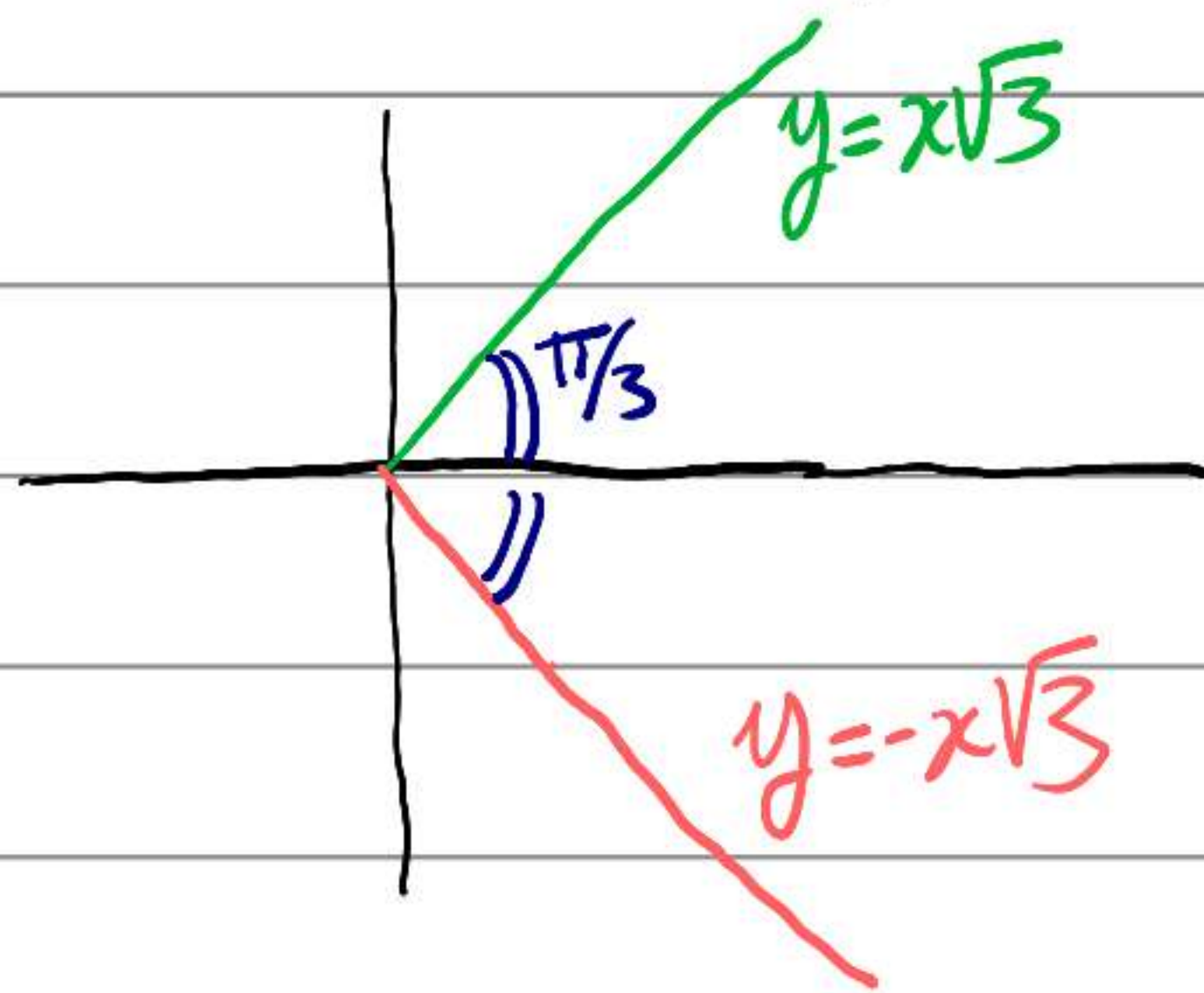
de sorte que $z+\bar{z} = |z| \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } 4x^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } y^2 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } (y = x\sqrt{3} \text{ ou } y = -x\sqrt{3})$$

L'ensemble recherché est la réunion des demi-droites d'équations $y = x\sqrt{3}$ et $y = -x\sqrt{3}$ situées dans le demi-plan $x \geq 0$



EXO 9

(a) Posons $A(-1+i)$. Alors $|z+1-i| = |2+i| \Leftrightarrow |z_M - z_A| = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow AM = \sqrt{5}$$

L'ensemble des points considérés est donc le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$

(b) Prenons $A(-2)$. Alors $|z| = |\bar{z} + 2| \Leftrightarrow |z| = |z + 2| \Leftrightarrow OM = AM$

$\Rightarrow$

Médiatrice du segment $[OA]$

(c) Prenons $A(1+4i)$ et $B(-8)$. Alors $|-1+z-4i| = 2|z+8| \Leftrightarrow AM = 2BM...$
et on verra dans le chapitre de géométrie plane comment gérer ceci...

EXO 10

$$\begin{aligned} 1) \quad (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) &= |x+iy|^2 \times |z+it|^2 = |(x+iy)(z+it)|^2 \\ &= |(xz - yt) + i(xt + yz)|^2 \\ &= (xz - yt)^2 + (xt + yz)^2 \end{aligned}$$

En posant $X = xz - yt$ et $Y = xt + yz \in \mathbb{Z}$, on obtient
bien $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = X^2 + Y^2$

$$2) \quad 34 = 5^2 + 3^2 \quad \text{et} \quad 58 = 7^2 + 3^2$$

$$3) \quad 1972 = 34 \times 58 = (5^2 + 3^2)(7^2 + 3^2) = X^2 + Y^2$$

$$\text{avec } X = 5 \times 7 - 3 \times 3 = 26 \quad \text{et} \quad Y = 5 \times 3 + 3 \times 7 = 36$$

d'après la question 1), c'est-à-dire que

$$1972 = 26^2 + 36^2 \quad \dots \text{quelle trouvaille!}$$

EXO 11

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6} \quad \text{donc} \quad (\sqrt{3} + i)^{10} = 2^{10} e^{5i\pi/3} = \boxed{2^{10} e^{-i\pi/3}}$$

$$|\sqrt{2} + i| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \quad \text{donc} \quad \sqrt{2} + i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + i \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\sqrt{3} e^{i\theta}} \quad \text{avec } \theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{si bien que} \quad \frac{7}{\sqrt{2} + i} = \frac{7}{\sqrt{3} e^{i\theta}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{3}} e^{-i\theta}} \quad (\text{cf argument } \in [0, \pi/2])$$

• $|3-4i|=5$ donc $3-4i=5\left(\frac{3}{5}-i\frac{4}{5}\right)=5e^{i\theta}$ avec $\theta=\arcsin(-4/5)$

• $(1+i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (d'argument $\in [-\pi/2, 0]$)

donc $\frac{3-4i}{(1+i)^2}=\frac{5e^{i\theta}}{2e^{i\pi/2}}=\boxed{\frac{5}{2}e^{i(\theta-\pi/2)}}$

EXO 12

• $1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-i\pi/3}$ donc $(1-i\sqrt{3})^{1991}=2^{1991}e^{-i\frac{1991\pi}{3}}$

$$\begin{array}{r|l} 1991 & 3 \\ 19 & 663 \\ 11 & \\ 2 & \end{array}$$
 donc $663 < \frac{1991}{3} < 665$

et $\frac{1991\pi}{3}-664\pi=\frac{1991-1992}{3}\pi=-\frac{\pi}{3}$ donc $\frac{1991\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+664\pi$

si bien que $-\frac{1991\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-664\pi$

Ainsi

$$(1-i\sqrt{3})^{1991}=2^{1991}e^{i\pi/3}$$

• $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\pi/3}$ et $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\sqrt{2}e^{i(\pi/3+\pi/4)}=\sqrt{2}e^{i7\pi/12}$ et $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}=2^5e^{i70\pi/12}$

$\frac{70}{12}=\frac{35}{6}=6-\frac{1}{6}$ donc $\frac{70\pi}{12}=-\frac{\pi}{6}+6\pi$ donc $\boxed{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10}=32e^{-i\pi/6}}$

• $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ donc $(1+i)^4=4e^{i\pi}$ et $(1-i)^3=2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$

donc $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}=\sqrt{2}e^{i7\pi/4}=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ (car $\frac{7\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi$) et $\frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (conjugue)

Or $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}+\sqrt{2}e^{i\pi/4}=\sqrt{2}\times 2\cos\pi/4=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ si bien que

$$\boxed{\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}=2}$$

• $i = e^{i\pi/2}$ et $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ donc $\frac{i}{1+i} = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$ et $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = 2^{-1002} e^{i501\pi}$
 Or $e^{501i\pi} = e^{i\pi} = -1$ d'où

$$\boxed{\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = -2^{-1002}}$$

EXO 13

ASTUCE : $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = \frac{1-u^7}{1-u} = 0$ car $u^7 = (e^{2i\pi/7})^7 = e^{2i\pi} = 1$

Ainsi $S+T = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = -1$

et $ST = (u + u^2 + u^4)(u^3 + u^5 + u^6) = u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10}$
 (on utilise $u^7 = 1$
 donc $u^8 = u$, $u^9 = u^2$ et $u^{10} = u^3$)

$$= u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^3 = 2 + (1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6) = 2$$

On obtient donc $S+T = -1$ et $ST = 2$

Ainsi $T = -1 - S$ et $2 = S(-1 - S) = -S - S^2$ soit $S^2 + S + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 8 = -7 = (i\sqrt{7})^2 \rightsquigarrow$ racines : $-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$

Comme S et T sont les deux racines de $X^2 + X + 2$, ces complexes valent $-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$. Pour les identifier, on va regarder leurs parties imaginaires

$S = u + u^2 + u^4 = e^{2i\pi/7} + e^{4i\pi/7} + e^{8i\pi/7}$ donc $\text{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$
 $= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ $\left(\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}\right)$

Or $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ par croissance de $\sin$ sur $[0, \pi/2]$

et $0 < \frac{4\pi}{7} < \pi$ donc $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$, si bien que $\text{Im}(S) > 0$

Il en découle ainsi que

$$\boxed{S = -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } T = -\frac{1-i\sqrt{7}}{2}}$$

EXO 14

• $u = e^{i\theta}$ donc $\frac{1}{u} = e^{-i\theta}$ (module = 1, argument = $-\theta$)

puis $-\frac{1}{u} = e^{i\pi} \times \frac{1}{u} = e^{i(\pi-\theta)}$ (module = 1, argument = $\pi-\theta$)

• $\frac{u-1}{u+1} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})} = \frac{2i \sin(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)} = i \tan(\theta/2)$ (u $\neq -1$ c'est $\theta \neq \pi + 2k\pi$)
 $= \tan(\theta/2) e^{i\pi/2}$

* Si $\tan(\theta/2) > 0$: module = $\tan(\theta/2)$, argument = $\pi/2$

* Si $\tan(\theta/2) < 0$: $\frac{u-1}{u+1} = -\tan(\theta/2) \times (-i) = -\tan(\theta/2) e^{-i\pi/2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{module} = -\tan(\theta/2) \\ \text{argument} = -\pi/2 \end{array} \right.$

• $\frac{u+1}{u-1} = \frac{1}{i} \cotan(\theta/2) = \cotan(\theta/2) e^{-i\pi/2}$ (u $\neq 1$ c'est $\theta \neq 2k\pi$)
 en notant $\cotan = \cos/\sin$

* Si $\cotan(\theta/2) > 0$: module = $\cotan(\theta/2)$, argument = $-\pi/2$

* Si $\cotan(\theta/2) < 0$: $\frac{u+1}{u-1} = -\cotan(\theta/2) i = -\cotan(\theta/2) e^{i\pi/2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{module} = -\cotan(\theta/2) \\ \text{argument} = \pi/2 \end{array} \right.$

EXO 15

1) $z_1 = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/6}$

$z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$

si bien que $z_1/z_2 = e^{i(\pi/4-\pi/6)} = e^{i\pi/12}$

2) Or $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{2 \times |1+i|^2} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Comme $e^{i\pi/12} = \cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12)$, on en déduit que $\boxed{\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

EXO 16

1) $\Delta = 4(1+2\cos\theta)^2 - 4(5+4\cos\theta) = 4(1+4\cos\theta+4\cos^2\theta-5-4\cos\theta)$
 $= 4(4\cos^2\theta-4) = 16(\cos^2\theta-1) = -16\sin^2\theta$

d'où $\Delta = (4i \sin \theta)^2$. On prend donc $S = 4i \sin(\theta)$: les solutions de notre équation sont

$$z_1 = \frac{2(1+2\cos\theta) - 4i\sin\theta}{2} = 1 + 2(\cos\theta - i\sin\theta) = \boxed{1 + 2e^{-i\theta}}$$

et $z_2 = \frac{2(1+2\cos\theta) + 4i\sin\theta}{2} = \boxed{1 + 2e^{i\theta}} = \bar{z}_1$

2) $\triangle$ C'EST N'EST PAS UNE EQUATION DU 2^o DEGRÉ À CAUSE DES z ET $\bar{z}$

$\Rightarrow$ ON POSE $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $\bar{z} = x - iy$, de sorte que

$$(E) \quad z^2 - \bar{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy - x + iy + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + 2 + i(2xy + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x + 2 = 0 \\ (2x+1)y = 0 \end{cases}$$

Or $(2x+1)y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -1/2$

1^{er} cas

Si $y = 0$, $(E) \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$. $\Delta = 1 - 8 < 0 \Rightarrow$ pas de solution sur $\mathbb{R}$ (et $x \in \mathbb{R}$!) Dans ce cas, (E) n'admet pas de solution.

2nd cas

Si $x = -1/2$, $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$$

Conclusion: l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \right\}}$$

3). Pour $\sin(\alpha) = 0$, on a $\cos^2(\alpha) = 1$ et l'équation devient $5 = 0$: pas de solution.

• Pour $\sin(\alpha) \neq 0$, on obtient une "vraie" équation du 2nd degré et on peut appliquer nos bonnes vieilles recettes !

$$\Delta = 16 \sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha (4 + \cos^2 \alpha) = -4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (2i \sin \alpha \cos \alpha)^2$$

On prend donc $\delta = 2i \sin \alpha \cos \alpha$ et on obtient pour solutions

$$z_1 = \frac{4 \sin \alpha - 2i \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \boxed{\frac{1}{2 \sin \alpha} - i \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \boxed{\frac{1}{2 \sin \alpha} + i \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

$$4) \Delta = (3+4i)^2 - 4(5i-1) = 9-16+24i-20i+4 = -3+4i$$

On recherche δ sous la forme $\delta = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Alors } \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -3+4i \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ et } y=2 \\ x=-1 \text{ et } y=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \delta = \pm (1+2i)$$

On prend $\delta = 1+2i$. Les solutions de notre équation sont alors

$$z_1 = \frac{3+4i-1-2i}{2} = \boxed{1+i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+4i+1+2i}{2} = \boxed{2+3i}$$

$$5) \Delta = (5+i)^2 - 4(1+i)(6+4i) = 25-1+10i-4(6+4i+6i-4) \\ = 24+10i-8-40i = 16-30i = 2(8-15i)$$

On recherche δ sous la forme $\delta = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de sorte que

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = 16-30i \\ x^2 + y^2 = 2\sqrt{64+225} = 2 \times \sqrt{289} = 2 \times 17 = 34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 9 \\ xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ et } y=-3 \\ x=-5 \text{ et } y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \delta = \pm (5-3i)$$

$$2i = (1+i)^2$$

$$\text{On prend } \delta = 5-3i, \text{ ce qui nous conduit à } z_1 = \frac{5+i-(5-3i)}{2(1+i)} = \frac{2i}{2(1+i)} = \frac{1+i}{1+i} = \boxed{1+i} \\ \text{et } z_2 = \frac{5+i+5-3i}{2(1+i)} = \frac{10-2i}{2(1+i)} = \frac{5-i}{1+i} = \frac{(5-i)(1+i)}{(1+i)(1+i)} = \frac{5-1-i-5i}{2} = \boxed{2-3i}$$

$$6) \Delta = \alpha^2(\alpha+i)^2 - 4i\alpha^3 = \alpha^2((\alpha+i)^2 - 4i\alpha) = \alpha^2(\alpha^2 + 2i\alpha + i^2 - 4i\alpha) \\ = \alpha^2(\alpha^2 - 2i\alpha + i^2) = \alpha^2(\alpha-i)^2$$

donc on peut prendre $S = \alpha(\alpha-i)$. Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1 = \frac{\alpha(\alpha+i) - \alpha(\alpha-i)}{2} = \boxed{i\alpha} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\alpha(\alpha+i) + \alpha(\alpha-i)}{2} = \boxed{\alpha^2}$$

$$7) \text{ Pour } z \neq -2, \text{ on pose } Z = \frac{z-3i}{z+2i}; \text{ l'équation devient } Z^2 - 6Z + 13 = 0$$

$$\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2 \Rightarrow \text{solutions: } z_1 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i \text{ et } z_2 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

1^{re} cas

$$z = 3-2i \Leftrightarrow \frac{z-3i}{z+2i} = 3-2i \Leftrightarrow z-3i = (3-2i)z + 6i + 4$$

$$\Leftrightarrow (2-2i)z = -4-9i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-4-9i}{2(1-i)} = \frac{(-4-9i)(1+i)}{2 \times 2} = \frac{-4-4i-9i+9}{4} = \boxed{\frac{5-13i}{4}}$$

2nd cas

$$z = 3+2i \Leftrightarrow \frac{z-3i}{z+2i} = 3+2i \Leftrightarrow z-3i = (3+2i)z + 6i - 4$$

$$\Leftrightarrow (2+2i)z = 4-9i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-9i}{2(1+i)} = \frac{(4-9i)(1-i)}{2 \times 2} = \frac{4-4i-9i-9}{4} = \boxed{\frac{-5-13i}{4}}$$

Les solutions de l'équation sont donc $\frac{5-13i}{4}$ et $\frac{-5-13i}{4}$

$$8) \text{ Posons } Z = z^2: \text{ alors } z^4 - 32z^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 32Z - 144 = 0$$

$$\Delta = 32^2 + 4 \times 144 = 4(16^2 + 144) = 4 \times (256 + 144) = 4 \times 400 = (40)^2$$

Les solutions de l'équation du second degré sont alors $z_1 = \frac{32-40}{2} = -4$

et $z_2 = \frac{32+40}{2} = 36$. Comme $Z = z^2$, on en déduit enfin que

$$z^2 = -4 \text{ ou } z^2 = 36, \text{ soit } z = \boxed{-2i, 2i, -6 \text{ ou } 6}$$

EXO 17

$$1) \bullet \cos(\theta) (1 + i \tan(\theta)) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$$

$$\text{donc } (\cos a \cos b \cos c) z = e^{i(a+b+c)}$$

$$\bullet z = (1 - \tan a \tan b + i(\tan a + \tan b))(1 + i \tan c)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z) &= \tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c \\ &= \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c} \quad \text{cf. } z = \frac{e^{i(a+b+c)}}{\cos a \cos b \cos c} \end{aligned}$$

$$2) \text{ De fait, } \tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \sin(a+b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow a+b+c = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$3) a = \frac{5\pi}{12}, b = \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{12}, c = \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{12} : \text{ alors } a+b+c = \pi$$

$$\text{donc } \tan a + 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan(a) \text{ d'après Q2)}$$

$$\text{soit } 1 + \sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) \tan(a)$$

$$\text{et } \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan \frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

EXO 18

$$(a) (a+b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{donc } \cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}$$

$$= \frac{2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6}{16} = \boxed{\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}}$$

$$(b) (a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{donc } \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{2i\sin(3x) - 6i\sin(x)}{-8i}$$

soit $\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)$

(c) $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ donc $\frac{\sin^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \sin^2(x) \cos^2(x) = (\sin x \cos x)^2$
 $\frac{\sin^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{4} \sin^2(2x)$

or $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$
 donc $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ d'où $\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$

Ainsi $\frac{\sin^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos(4x)$

(d) $\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4}$

donc $\sin(x) \cos^2(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \times \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{e^{3ix} + 2e^{ix} - e^{-ix} - 2e^{-3ix}}{8i}$
 $= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{8i} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{4} = \frac{1}{4} \sin(3x) + \frac{1}{4} \sin(x)$

(e) $\cos(x) \sin(3x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} = \frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{4i} + \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$
 $= \frac{1}{2} \sin(4x) + \frac{1}{2} \sin(2x)$

EXO 19

$e^x \cos(2x) = e^x \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} e^{(1+i)x} + \frac{1}{2} e^{(1-i)x}$

PRIMITIVE : $\frac{e^{(1+i)x}}{2(1+i)} + \frac{e^{(1-i)x}}{2(1-i)} = \frac{(1-i)e^{(1+i)x} + (1+i)e^{(1-i)x}}{2(1+i)(1-i)}$

$= \frac{e^x}{4} \left((1-i)e^{ix} + (1+i)e^{-ix} \right) = \frac{e^x}{4} \left(\underbrace{e^{ix} + e^{-ix}}_{2\cos(x)} - i \underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})}_{2i\sin(x)} \right)$
 $= \frac{1}{2} e^x (\cos(x) + \sin(x))$

CHAPITRE 7

EXO 1

- Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x^2 + x + 1 \neq 0$ (à cause du quotient)

Or ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 < 0$, donc il ne s'annule jamais

AINSI $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

- Le nombre $g(x)$ est défini lorsque $1 + \cos(x) \geq 0$ (à cause de la racine)

Or $\cos(x) \geq -1$ donc $1 + \cos(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

AINSI $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$

- Le nombre $h(x)$ est défini lorsque $1+x \neq 0$ (quotient) et $\frac{1-x}{1+x} \geq 0$ (racine)

Dressons un tableau de signes:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	-	0	+	+
$1-x$	+	+	0	-
$\frac{1-x}{1+x}$	-	//	+	-

AINSI $\mathcal{D}_h =]-1; 1]$

EXO 2

Le but est ici de déterminer les positions relatives de $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$

(a) Pour $x > 0$ $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 > \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow x^4 > x$

$\Leftrightarrow x^3 > 1 = 1^3$

$\Leftrightarrow x > 1$ par croissance de la fonction cube

AINSI $\mathcal{D}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}_g$ sur $[1; +\infty[$ et en dessous sur $[0; 1]$

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$ $f(x) > g(x) \Leftrightarrow 2x+3 > x$

$\Leftrightarrow x > -3$

AINSI $\mathcal{D}_f$ est au-dessus de $\mathcal{D}_g$ sur $[-3; +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty; -3]$

EXO 3

- 1) Pour $x \neq 0$ $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1/x) = 1/(1/x) = x$
donc $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^*}$, ce qui montre que f est une bijection et que $f^{-1} = f$
- 2) Pour $x \in \mathbb{R}$ $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 5x^2 - 8$
et $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5x - 8) = (5x - 8)^2 = 25x^2 - 80x + 64$
... ce qui permet de rappeler que $f \circ g \neq g \circ f$

EXO 4

- $f_1: x \mapsto x^2$ est $\downarrow$ sur $]-\infty; 0]$ donc $f_2: x \mapsto -x^2$ est $\uparrow$ sur $]-\infty; 0]$
 $f_3: x \mapsto 2x$ est $\uparrow$ sur $]-\infty; 0]$ car $2 > 0$
Par somme, $f = f_2 + f_3$ est $\uparrow$ sur $]-\infty; 0]$
- $g_1: x \mapsto x$ est $\uparrow$ et ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$
 $g_2: x \mapsto \sqrt{x}$ est $\uparrow$ et ≥ 0 sur $\mathbb{R}_+$
Par produit, $g = g_1 \times g_2$ est $\uparrow$ sur $\mathbb{R}_+$
- $h_1: x \mapsto x^2$ est $\uparrow$ sur $]0; +\infty[$
 $h_2: x \mapsto 3x + 5$ est $\uparrow$ sur $\mathbb{R}$
Par composée $h_3 = h_2 \circ h_1$ est $\uparrow$ sur $]0; +\infty[$ et de plus strict > 0
 $h_4: x \mapsto \frac{1}{x}$ est $\downarrow$ sur $]0; +\infty[$
Par composée $h = h_4 \circ h_3$ est $\downarrow$ sur $]0; +\infty[$
- $k_1: x \mapsto \cos(x)$ est $\downarrow$ sur $[0; \pi]$ donc $k_2: x \mapsto 1 - \cos(x)$ est $\uparrow$ sur $[0; \pi]$
 $k_3: x \mapsto \sqrt{x}$ est $\uparrow$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $k_2(x) \geq 0$ sur $[0; \pi]$,
par composée $k = k_3 \circ k_2$ est $\uparrow$ sur $[0; \pi]$

EX05

1) D'après les tableaux $\mathcal{D}_\mu = \mathcal{D}_\nu = [0, 3]$

2) Sur $[0, 2]$

* ν est décroissante et $\nu(x) \in [1, 3]$ pour tout $x \in [0, 2]$

* μ est décroissante sur $[1, 3]$

PAR COMPOSITION $\mu \circ \nu$ est croissante sur $[0, 2]$

Sur $[2, 3]$

* ν est croissante et $\nu(x) \in [1, 2]$ pour tout $x \in [2, 3]$

* μ est décroissante sur $[1, 2]$

PAR COMPOSITION $\mu \circ \nu$ est décroissante sur $[2, 3]$

$$\mu \circ \nu(0) = \mu(\nu(0)) = \mu(3) = 0$$

$$\mu \circ \nu(2) = \mu(\nu(2)) = \mu(1) = 2$$

$$\mu \circ \nu(3) = \mu(\nu(3)) = \mu(2) = 1$$

x	0	2	3
$\mu \circ \nu(x)$	0	2	1

3) Sur $[0, 1]$ { * μ est croissante et à valeurs dans $[0, 2]$
 { * ν est décroissante sur $[0, 2]$

PAR COMPOSITION $\nu \circ \mu$ est décroissante sur $[0, 1]$

Sur $[1, 3]$ { * μ est décroissante et à valeurs dans $[0, 2]$
 { * ν est décroissante sur $[0, 2]$

PAR COMPOSITION $\nu \circ \mu$ est croissante sur $[1, 3]$

$$\nu \circ \mu(0) = \nu(0) = 3$$

$$\nu \circ \mu(1) = \nu(1) = 1$$

$$\nu \circ \mu(3) = \nu(0) = 3$$

x	0	1	3
$\nu \circ \mu(x)$	3	1	3

EXO 6

- f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0
- De plus, $f(-x) = (1-x)^n(1+x)^n = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
donc la fonction f est paire

EXO 7

- Sur $[-4, 0]$
 u est décroissante à valeurs dans $[3, 6]$ } v est décroissante
 v est croissante sur $[3, 6]$
- Sur $[0, 1]$
 u est décroissante à valeurs dans $[-2, 3]$ } v est croissante
 v est décroissante sur $[-2, 3]$
- Sur $[1, 5]$
 u est croissante à valeurs dans $[-2, 3]$ } v est décroissante
 v est décroissante sur $[-2, 3]$
- Sur $[5, 10]$
 u est décroissante à valeurs dans $[0, 3]$ } v est croissante
 v est décroissante sur $[0, 3]$

x	-4	0	1	5	10
$v(u)$	5	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		0	7	0	4

Et voilà le travail!

EXO 8

- 1) (a) $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(-x) + h(-x)$
 $= g(x) - h(x)$ grâce aux parités

(b) De ce fait $\begin{cases} g(x) + h(x) = f(x) \\ g(x) - h(x) = f(-x) \end{cases}$ soit $\boxed{g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
 et $\boxed{h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}}$

Ceci prouve l'unicité des fonctions g et h

2) Définissons sur $\mathbb{R}$ les fonctions $g: x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h: x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2g(-x) = f(-x) + f(x) = 2g(x)$ donc g est paire

$2h(-x) = f(-x) - f(x) = -2h(x)$ donc h est impaire

et $g(x) + h(x) = f(x)$ donc $\underline{f = g + h}$

Ceci montre qu'il existe une fonction paire g et une fonction impaire h telles que $f = g + h$

EXO 9

1) Pour $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

2) $[-2; 3]$ n'est pas symétrique par rapport à 0 donc $\boxed{g \text{ n'est ni paire, ni impaire}}$

3) Pour $x \in [-1; 1]$ $h(-x) = x^2 - x + 1$ qui n'est égal ni à $h(x)$, ni à $-h(x)$

C-exple: $h(\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$ $h(-\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$ donc $\boxed{h \text{ n'est ni paire, ni impaire}}$

4) Les fonctions polynômes paires sont celles ne contenant que des puissances paires, et les impaires celles ne contenant que des puissances impaires

EN EFFET si $P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$

alors $P(-x) = \sum_{n \geq 0} a_{2n} x^{2n} - \sum_{n \geq 0} a_{2n+1} x^{2n+1}$

donc $\left[\begin{array}{l} P \text{ paire} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(-x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ a_{2n+1} = 0 \\ P \text{ impaire} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(-x) = -P(x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ a_{2n} = 0 \end{array} \right.$

EXO 10

1) Si f est paire, on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d'où en dérivant $-f'(-x) = f'(x)$ — — — : f' est impaire

2) Si f est impaire, on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d'où en dérivant $-f'(-x) = -f'(x)$ — — —

soit $f'(-x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: f' est paire

• Si f est T -périodique, on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

soit en dérivant $f'(x+T) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: f' est T -périodique

EXO 11

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x/3) = \cos(x/3 + 2\pi) = \cos(\frac{x+6\pi}{3})$
 $= f(x+6\pi)$

donc la fonction f est 6π -périodique

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x+\pi) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = g(x)$

donc la fonction g est π -périodique

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x+\pi) = (-\sin x) \times (-\cos x) = \sin(x) \cos(x) = h(x)$

donc la fonction h est π -périodique

EXO 12

Notons $T > 0$ une période de f et $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction n'est pas constante :
il existe alors a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Pour établir notre
contradiction, on va maintenant définir deux suites (u_n) et (v_n)
par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a + nT$ et $v_n = b + nT$

$$\text{D'une part, } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \quad (\text{car } T > 0)$$

$$\text{si bien que } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = l \quad (\text{composition de limites})$$

Or la fonction f étant T -périodique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(u_n) = f(a + nT) = f(a) \quad \text{et} \quad f(v_n) = f(b + nT) = f(b)$$

On en déduit par passage à la limite que $l = f(a)$ et $l = f(b)$
d'où $f(a) = f(b)$: CONTRADICTION !

Ceci montre que la fonction f est nécessairement constante

CHAPITRE 8

EXO 1

1) $f: x \mapsto x^2 - 6x + 9$ définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 3

Notons que $f(x) = x^2 - 6x + 9 + 11 = (x-3)^2 + 11$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

De ce fait, on a pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$f(3+h) = h^2 + 11 \quad \text{et} \quad f(3-h) = h^2 + 11 = f(3+h)$$

si bien que $\mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à la droite $\Delta: x=3$

2) $x^2 - x + 1$ ne s'annule jamais ($\Delta < 0$) donc $g: x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$

De plus, $x^2 - x + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

et $x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} - 3 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

de sorte que $g(x) = \frac{(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

De ce fait, on a pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$g(\frac{1}{2}+h) = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{3}{4}} \quad \text{et} \quad g(\frac{1}{2}-h) = \frac{h^2 - \frac{9}{4}}{h^2 + \frac{3}{4}} = g(\frac{1}{2}+h)$$

si bien que $\mathcal{G}_g$ est symétrique par rapport à la droite $\Delta: x = \frac{1}{2}$

3) $f: x \mapsto \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ensemble symétrique par rapport à 1

De plus, $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 1 - 2 = (x-1)^2 - 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

de sorte que $f(x) = \frac{(x-1)^2 - 2}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$

On a ainsi pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ $f(1+h) = \frac{h^2 - 2}{h^2} = f(1-h)$

si bien que $\mathcal{G}_f$ est symétrique par rapport à la droite $\Delta: x = 1$

EX02

1) $f: x \mapsto \frac{3x-1}{2x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/2\}$, symétrique par rapport à $-1/2$

$$\text{Pour tout } h \neq 0, f(-\frac{1}{2}+h) = \frac{3(-\frac{1}{2}+h)-1}{2(-\frac{1}{2}+h)+1} = \frac{3h-5/2}{2h} = \frac{3}{2} - \frac{5}{4h}$$

$$\text{si bien que } f(-\frac{1}{2}-h) = \frac{3}{2} + \frac{5}{4h} \text{ et } f(-\frac{1}{2}+h) + f(-\frac{1}{2}-h) = 2 \times \frac{3}{2}$$

De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $A(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

2) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{6}$ est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à $-1/2$

$$f(-\frac{1}{2}+h) = \frac{1}{3}(-\frac{1}{2}+h)^3 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}+h)^2 - 2(-\frac{1}{2}+h) + \frac{7}{6}$$
$$= \frac{1}{3}(-\frac{1}{8} + \frac{3h}{4} - \frac{3h^2}{2} + h^3) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} - h + h^2) + 1 - 2h + \frac{7}{6}$$

$$= -\frac{1}{24} + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{1}{8} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2} + 1 - 2h + \frac{7}{6}$$

$$= \frac{1}{24}(-1+3+24+28) + \frac{h}{4}(1-2-8) + \frac{h^3}{3}$$

$$= \frac{54}{24} - \frac{9h}{4} + \frac{h^3}{3} = \frac{9}{4} - \frac{9h}{4} + \frac{h^3}{3} \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } f(-\frac{1}{2}-h) = \frac{9}{4} + \frac{9h}{4} - \frac{h^3}{3} \text{ et } f(-\frac{1}{2}+h) + f(-\frac{1}{2}-h) = 2 \times \frac{9}{4}$$

De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $A(-1/2, 9/4)$

3) $f: x \mapsto \frac{x^2-2}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, symétrique par rapport à 1

$$\text{Pour } h \neq 0, f(1+h) = \frac{(1+h)^2-2}{h} = \frac{h^2+2h-1}{h} = h+2-\frac{1}{h}$$

$$\text{donc } f(1-h) = -h+2-\frac{1}{-h} \text{ et } f(1+h) + f(1-h) = 2 \times 2$$

De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $A(1; 2)$

EXO 3

1) $f: x \mapsto -1 + \frac{2}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -1$ donc $\Delta_1: y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1/3 \\ x > 1/3}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1/3 \\ x < 1/3}} f(x) = -\infty$ donc $\Delta_2: x = 1/3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$

2) $g: x \mapsto \frac{5-2x}{3x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = -\frac{2}{3}$ donc $\Delta_1: y = -\frac{2}{3}$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1/3 \\ x > -1/3}} g(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1/3 \\ x < -1/3}} g(x) = -\infty$ donc $\Delta_2: x = -1/3$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$

3) $h: x \mapsto 2-5x + \frac{3}{x+4}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x+4} = 0$ donc $\Delta_1: y = 2-5x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} h(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} h(x) = -\infty$ donc $\Delta_2: x = -4$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$

4) $f: x \mapsto \frac{x^2+x+1}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x+1 & x-1 \\ \hline -(x^2-x) & x+2 \\ \hline 2x+1 & \\ \hline -(2x-2) & 3 \end{array}$$

De plus, $x^2+x+1 = (x+2)(x-1) + 3$

si bien que $f(x) = x+2 + \frac{3}{x-1}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

On en déduit comme précédemment que $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptotes les droites

$\Delta_1: y = x+2$ (en $+\infty$ et en $-\infty$) et $\Delta_2: x = 1$

5) $R(x) = x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_R$ admet pour asymptotes les droites $\Delta_1: y = x + 1$ (en $\pm\infty$) et $\Delta_2: x = 0$

6) ℓ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $\ell(x) = \frac{x\sqrt{x} + x - \sqrt{x} + 1}{1 + \sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x} + x - (\sqrt{x} + 1) + 2}{1 + \sqrt{x}}$
$$= x - 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{x}} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

donc la courbe $\mathcal{C}_\ell$ admet la droite $\Delta: y = x - 1$ pour asymptote en $+\infty$

EXO 4

C'est comme l'exercice 2!

COURBE DE f

- Les asymptotes se coupent en $A(1/3, -1)$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ est symétrique par rapport à $1/3$
- Pour $h \neq 0$, on a $f(1/3 + h) = -1 + \frac{2}{3h}$ et $f(1/3 - h) = -1 - \frac{2}{3h}$

d'où $f(\frac{1}{3} + h) + f(\frac{1}{3} - h) = 2 \times (-1)$

AINSI la courbe de f admet le point $A(1/3, -1)$ pour centre de symétrie

COURBE DE g

- Les asymptotes se coupent en $B(-1/3, -2/3)$
 - $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$ est symétrique par rapport à $-1/3$
 - Pour $h \neq 0$, on a : $g(-1/3 + h) = \frac{5 + 4/3 - 2h}{3h} = -\frac{2}{3} + \frac{17}{9h}$ et $g(-1/3 - h) = -\frac{2}{3} - \frac{17}{9h}$
- d'où $g(-\frac{1}{3} + h) + g(-\frac{1}{3} - h) = 2 \times (-\frac{2}{3})$

AINSI la courbe de g admet le point $B(-1/3, -2/3)$ pour centre de symétrie

COURBE DE h

- Les asymptotes se coupent en $C(-4; 22)$
 - $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ est symétrique par rapport à -4
 - Pour $u \neq 0$, on a $h(-4+u) = 22 - 5u + \frac{3}{u}$ et $h(-4-u) = 22 + 5u - \frac{3}{u}$
d'où $h(-4+u) + h(-4-u) = 2 \times 22$
- AINSI la courbe de h est symétrique par rapport à $C(-4; 22)$

COURBE DE j

- Les asymptotes se coupent en $D(1; 3)$
- $\mathcal{D}_j = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est symétrique par rapport à 1
- Pour $u \neq 0$, on a $j(1+u) = \frac{(1+u)^2 + (1+u) + 1}{u} = \frac{u^2 + 3u + 3}{u} = u + 3 + \frac{3}{u}$
donc $j(1+u) = -u + 3 - \frac{3}{u}$ et $j(1+u) + j(1-u) = 2 \times 3$

AINSI la courbe de j est symétrique par rapport à $D(1; 3)$

EXO 5

1) Pour $x > 0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

et $f(x) - x = \sqrt{x^2 + 4x + 3} - x = \frac{x^2 + 4x + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x} = \frac{4x + 3}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + x} = \frac{4 + \frac{3}{x}}{\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$

AINSI $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta_1: y = x + 2$ pour asymptote en $+\infty$

Pour $x < 0$, les calculs sont semblables mais $x = -\sqrt{x^2} \dots$ ce qui change les résultats
On trouve $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = -2$ et $\mathcal{C}_f$ admet $\Delta_2: y = -x - 2$ pour asymptote en $-\infty$

2). Pour $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet la droite $\Delta_1: y=0$ pour asymptote en $+\infty$

• Pour $x < 0$, $g(x) = \sqrt{x^2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} - x = -x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) \sim -2x$ $x \rightarrow -\infty$

et $g(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$

donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet la droite $\Delta_2: y = -2x$ pour asymptote en $-\infty$

3) Pour la division euclidienne:



$$\begin{array}{r|l} x^3+9 & x^2-1 \\ - (x^3-x) & x \\ \hline & x+9 \end{array}$$

$x^3+9 = x(x^2-1) + x+9$
donc $\boxed{h(x) = x + \frac{x+9}{x^2-1}}$ pour $|x| \neq 1$

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+9}{x^2-1} = 0$ (cf équivalent $1/x$) donc $\Delta_1: y=x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ et en $-\infty$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} h(x) = +\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} h(x) = -\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} h(x) = -\infty$ $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} h(x) = +\infty$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+	-	+	+

donc $\Delta_2: x=1$ et $\Delta_3: x=-1$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_h$

FINALEMENT la division euclidienne permet d'étudier h à peu près aussi facilement qu'une fonction d'expression

$$\boxed{ax+b + \frac{c}{x-x_0}}$$

EX06

1) Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$, alors $f': x \mapsto 2ax + b$

donc les conditions imposées à f et f' nous conduisent à

$$\begin{cases} f(0) = c = 2 \\ f(-1) = a - b + c = 5 \\ f'(-1) = -2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ a - b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 \\ -a = 5 & (L2) + (L3) \\ a - b = 3 & (L2) \end{cases}$$

d'où $a = -5$, $b = a - 3 = -8$ et $c = 2$

Au passage, $f: x \mapsto -5x^2 - 8x + 2$

2) Cette tangente a pour équation $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = 2(x+1) + 5$
soit $y = 2x + 7$

EX07

1) Commençons par déterminer leur point d'intersection $I(x, y)$.

Ses coordonnées vérifient
$$\begin{cases} y = -x^2 + \frac{7x}{2} - \frac{1}{2} & (L1) \\ y = 2x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{5}{2} & (L2) \end{cases}$$

d'où $3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad (L2) - (L1)$

soit $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ et $x = 1$.

Il en découle que $y = 2 - \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 2$: effectivement, les deux paraboles ont un unique point d'intersection, le point $I(1, 2)$

2) Déterminons les tangentes en I

1^{ère} courbe : $f: x \mapsto -x^2 + \frac{7x}{2} - \frac{1}{2}$ et $f': x \mapsto -2x + \frac{7}{2}$ donc $f'(1) = \frac{3}{2}$

2^{ème} courbe : $g: x \mapsto 2x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{5}{2}$ et $g': x \mapsto 4x - \frac{5}{2}$ donc $g'(1) = \frac{3}{2}$

AINSI les deux tangentes en I ont la même pente $\frac{3}{2}$: elles sont donc parallèles
Comme elles ont un point commun, elles sont confondues !

EXO 8

1) Comme $f: x \mapsto a + \frac{b}{x+c}$, on a $f': x \mapsto \frac{-b}{(x+c)^2}$ donc les conditions imposées à la fonction f se traduisent par

$$\begin{cases} f(0) = a + \frac{b}{c} = -3 \\ f(2) = a + \frac{b}{c+2} = 0 \\ f'(2) = \frac{-b}{(c+2)^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (c+2)^2 \quad (\text{grâce à } f'(2)) \\ a + c + 2 = 0 \\ a + \frac{(c+2)^2}{c} = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = (c+2)^2 \\ a = -(c+2) \\ -c(c+2) + (c+2)^2 = -3c \end{cases} \quad \begin{array}{l} (c+2)(c+2-c) = -3c \\ \Leftrightarrow 2(c+2) + 3c = 0 \\ \Leftrightarrow 5c + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow c = -4/5 \end{array}$$

AINSI $c = -4/5$, $a = -6/5$ et $b = 36/25$, d'où $f: x \mapsto -\frac{6}{5} + \frac{36}{25x-20}$

2) Cette tangente a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -(x-2)$
soit $y = 2-x$

EXO 9 Notons $f: x \mapsto \frac{3-3x}{2x+1}$ la fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
La tangente au point d'abscisse a ayant pour pente $f'(a)$, on cherche donc les réels a tels que $f'(a) = -1$

$$\text{OR } f'(x) = \frac{-3 \times (2x+1) - (3-3x) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{-6x-3-6+6x}{(2x+1)^2} = \frac{-9}{(2x+1)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f'(a) = -1 &\Leftrightarrow \frac{-9}{(2a+1)^2} = -1 \Leftrightarrow (2a+1)^2 = 9 \Leftrightarrow 2a+1 = 3 \text{ ou } -3 \\ &\Leftrightarrow 2a = 2 \text{ ou } -4 \\ &\Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = -2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{S} = \{ -2, 1 \}$$

EXO 10

• $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x+2)(x-2)$ pour $x \in \mathbb{R}$
 négatif entre ses racines et positif ailleurs

$f(x) \sim x^3$ (pour les limites)

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			16		-16		$+\infty$

$\begin{cases} f(2) = -16 \\ f(-2) = 16 \end{cases}$

NOTONS QUE f EST IMPAIRE

• $g(x) = x^{3/2}$ pour $x \in [0, +\infty[$ et $g'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x} > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	0	$+\infty$

g est une BISSECTION strictement croissante de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$

$\frac{2x}{x^2+2} \quad \frac{2\sqrt{2}}{4}$

• $h'(x) = \frac{2x(x^2+2) - 2x \times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2} = \frac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x^2+2)^2}$

positif entre ses racines et négatif en dehors

pour $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	0	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0	

$h(x) \sim \frac{2}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

$h(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $h(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

NOTONS QUE h EST IMPAIRE

N.B. les tableaux de variations permettent de détecter après coup des parités ou symétries qui auraient pu nous échapper

• $j(x) = \frac{3x-1}{2x+1}$ pour $x \neq -\frac{1}{2}$ et $j'(x) = \frac{3(2x+1) - 2(3x-1)}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2} > 0$ pour $x \neq -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$j'(x)$	+		
$j(x)$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{2}$

• $j(x) \sim \frac{3}{2}$

$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (3x-1) = -\frac{5}{2} < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x+1) = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} (2x+1) = 0^- \end{array} \right.$

Ne pas oublier la valeur interdite !

• $k(x) = \frac{x^2-2}{x-1}$ pour $x \neq 1$ et $k'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2-2) \times 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 + 2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 2}{(x-1)^2}$ pour $x \neq 1$

Or $x^2 - 2x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$ donc a trois racines
N'a pas de racines et reste toujours strictement positif. Ainsi $k'(x) > 0$ pour tout $x \neq 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$k'(x)$	+		
$k(x)$	$-\infty$		$+\infty$

$k(x) \sim x$ (pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$)

$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2-2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0^+ \end{array} \right.$

On obtient un tableau de variations semblable au précédent.

Une fois de plus, attention à ne pas oublier la valeur interdite : la dérivée est strictement positive sur l'ensemble de définition, mais celui-ci est la réunion de deux intervalles.

• $l'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$x^2 + x - 2$ ont pour racines évidentes 1 et -2 (cf. produit = -2)

donc $l'(x) = 6(x-1)(x+2)$... négatif entre ses racines et positif en dehors

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$l'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$l(x)$	$-\infty$	$\nearrow 27$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

• $l(x) \sim 2x^3$ (pour les limites)

$\begin{cases} l(1) = 0 \\ l(-2) = 27 \end{cases}$

EXO 12

On étudie les variations des fonctions proposées pour déterminer leurs maximums et minimums sur les intervalles proposés

1) $f'(x) = 10x - 3$ pour tout $x \in [0, 4]$

$f(0) = -2$ $f(4) = 66$

$f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{45}{100} - \frac{9}{10} - 2 = \frac{45 - 90 - 200}{100}$
 $= \frac{-245}{100} = -2,45$

x	0	$\frac{3}{10}$	4
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	-2	$\searrow -2,45$	$\nearrow 66$

On déduit de l'étude de variations que

$-2,45 \leq f(x) \leq 66$ pour tout $x \in [0, 4]$

2) $g'(x) = -4x + 4 = 4(1-x)$ sur $[-3, 5]$

$g(-3) = -18 - 12 + 3 = -27$ $g(1) = 5$

$g(5) = -50 + 20 + 3 = -27$

x	-3	1	5
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nwarrow -27$	$\nearrow 5$	$\searrow -27$

On en déduit que

$-27 \leq g(x) \leq 5$ pour tout $x \in [-3, 5]$

3) $h'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1)$ pour tout $x \in]-2; 2]$

$2x^2 - x - 1$ admet pour racine évidente 1

La seconde racine est $-1/2$ (cf. produit $= -1/2$)

Ainsi $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2}) \dots$ négatif entre ses racines et positif ailleurs.

x	-2	$-1/2$	1	2	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	-32	$\nearrow \frac{7}{4}$	$\searrow -5$	$\nearrow 2$	

$h(2) = 8 \quad h(-2) = -32$

$h(1) = -5$

$h(-1/2) = -4/8 - 3/4 + 6/2$

$= -1/2 - 3/4 + 3 = 7/4$

On en déduit que $\boxed{-32 < h(x) \leq 2}$ pour tout $x \in]-2; 2]$

EXO 11

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (produit et somme de fonctions usuelles)
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) - \cos^4(x+2\pi) = \cos(x) - \cos^4(x) = f(x)$
donc f est 2π -périodique $\Rightarrow$ on peut restreindre son étude à $[-\pi, \pi] = I$
- l'intervalle I est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in I$, on a
 $f(-x) = \cos(-x) - \cos^4(-x) = \cos(x) - \cos^4(x) = f(x)$ donc f est paire $\Rightarrow$ on peut restreindre son étude à $[0, \pi]$

Pour $x \in I$, $f'(x) = -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = (2\cos(x) - 1)\sin(x)$

Étudions son signe sur $[0, \pi]$ (elle est impaire cf expression ci-dessus)

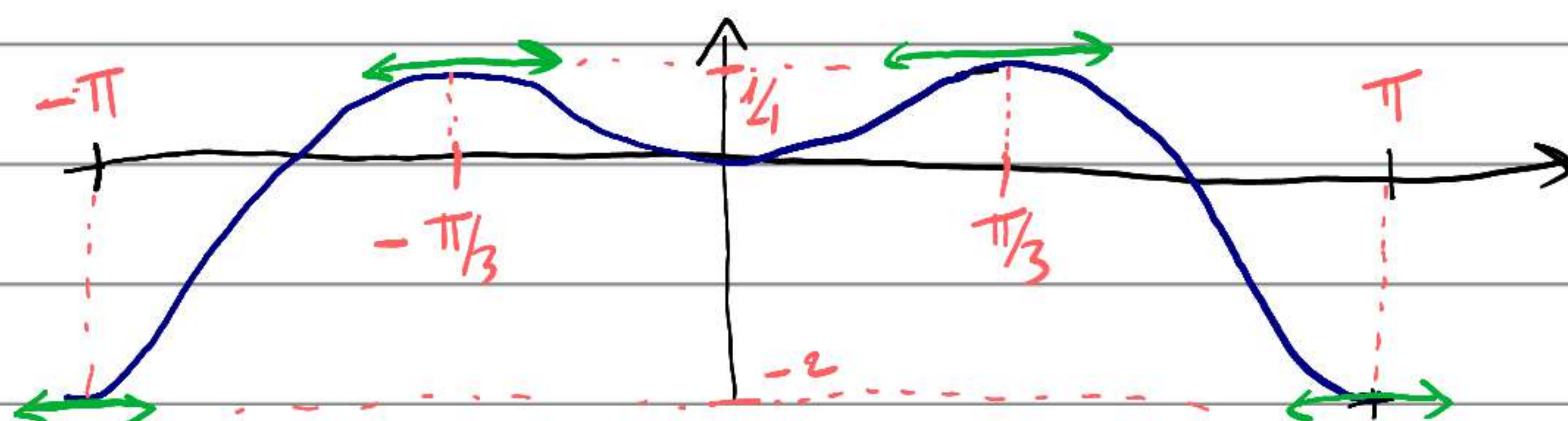
* $\sin(x) \geq 0$ sur $[0, \pi]$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\cos(x) - 1$

* $2\cos(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} = \cos(\pi/3) \Leftrightarrow x \in [0, \pi/3]$ car $\cos \downarrow$ sur $[0, \pi]$

De ce fait, $f'(x) \geq 0$ sur $[0, \pi/3]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[\pi/3, \pi]$

Comme f est impaire, on en déduit son signe sur $[-\pi, 0]$ par symétrie

x	$-\pi$	$-\pi/3$	0	$\pi/3$	π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-2	$\nearrow 1/4$	0	$\nwarrow 1/4$	-2



EXO 13

1) Notons $f_1: x \mapsto x - \sin(x)$ sur $[0, +\infty[$

On a $f_1'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ donc f_1 est $\uparrow$

Comme $f_1(0) = 0$, alors $f_1(x) \geq 0$ soit $x \geq \sin(x)$ pour tout $x \in [0, +\infty[$

Notons $f_2: x \mapsto \cos(x) - 1 + x^2/2$ sur $[0, +\infty[$

On a $f_2'(x) = -\sin(x) + x = f_1(x) \geq 0$ donc f_2 est $\uparrow$

Comme $f_2(0) = 0$, alors $f_2(x) \geq 0$ soit $\cos(x) \geq 1 - x^2/2$ pour tout $x \geq 0$

Notons $f_3: x \mapsto \sin(x) - x + x^3/6$ sur $[0, +\infty[$

On a $f_3'(x) = \cos(x) - 1 + x^2/2 = f_2(x) \geq 0$ donc f_3 est $\uparrow$

Comme $f_3(0) = 0$, alors $f_3(x) \geq 0$ soit $\sin(x) \geq x - x^3/6$ pour tout $x \geq 0$

Notons $f_4: x \mapsto 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cos(x)$ sur $[0, +\infty[$

On a $f_4'(x) = -x + x^3/6 + \sin(x) = f_3(x) \geq 0$ donc f_4 est $\uparrow$

Comme $f_4(0) = 0$, alors $f_4(x) \geq 0$ soit $1 - x^2/2 + x^4/24 \geq \cos(x)$ pour $x \geq 0$

Les encadrements en découlent alors.

2) Pour tout $x > 0$, on a $-\frac{x^3}{6} \leq \sin(x) - x \leq 0$ d'où $0 \leq \frac{x - \sin(x)}{x^2} \leq \frac{x}{6}$

On déduit du Théorème des Gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$

Par imparité, on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0}$

Pour tout $x > 0$, $-\frac{x^2}{2} \leq \cos(x) - 1 \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ d'où $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} \leq \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$

Gendarmes: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ Parité: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}}$

N.B $f: x \mapsto \frac{x - \sin(x)}{x^2}$ impaire car $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{-x + \sin(x)}{x^2} = -f(x)$

$g: x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ paire car $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ et $g(-x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = g(x)$

EXO 14

1) Soit $f: x \mapsto e^x - 1 - x$ sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable car 
et $f'(x) = e^x - 1 = e^x - e^0$ est du signe de x (exp ↑)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

$f(0) = 1 - 1 - 0 = 0$

On déduit du tableau que

$f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

d'où

$\boxed{e^x \geq x + 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$

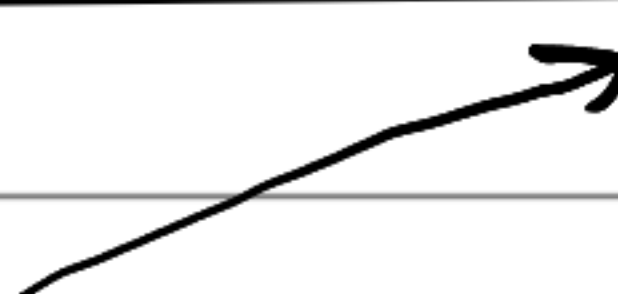
2) Posons $f: x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $g: x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$ sur $[0; +\infty[$

Ces deux fonctions sont dérivables car 

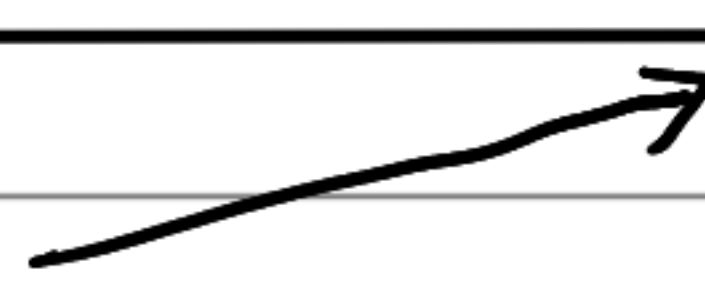
Étudions leurs variations



$$\bullet f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

$$\bullet g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	

$$f(0) = 0 - \ln 1 = 0$$

$$g(0) = \ln 1 - 0 + 0 = 0$$

On déduit de ces deux tableaux de variations que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, si bien que

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \text{ pour tout } x \geq 0$$

3) Posons $f: x \mapsto x - \sin(x)$ et $g: x \mapsto \sin(x) - \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$

Ces deux fonctions sont dérivables car $\sin$ est dérivable

Étudions leurs variations sur $[0, \pi/2]$

$$\bullet f'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$$

$$\cos - 1 \leq \cos(x) \leq 1$$

x	0	$\pi/2$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	

$$f(0) = 0 - \sin(0) = 0$$

donc $f(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$

$$\bullet g'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi} = \cos(x) - \cos(\theta)$$

$$\text{avec } \theta = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right) \in [0, \pi/2]$$

donc $g'(x)$ est du signe de $\theta - x$ ($\cos \downarrow$)

x	0	θ	$\pi/2$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0		

$$g(0) = \sin 0 - 0 = 0 \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 0$$

donc $g(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$

On en déduit que

$$\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x \text{ pour } x \in [0, \pi/2]$$

EXO 15

1) $(B_0) \Leftrightarrow \forall t \geq 0, 1 \geq 1$: c'est vrai

$(B_1) \Leftrightarrow \forall t \geq 0, 1+t \geq 1+t$: c'est encore vrai !

Jusqu'à là, tout va bien

2) (a) $\varphi'(x) = m(1+x)^{m-1} - m$ et $\varphi''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$ pour tout $x \geq 0$

(b) Pour $x \geq 0$, on a $\varphi''(x) > 0$ donc φ' est strictement croissante

Ainsi $\varphi'(0) = m - m = 0$ et le minimum de φ' sur $[0, +\infty[$

si bien que $\varphi'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$

(c) Il en découle que φ est croissante sur $[0, +\infty[$

Son minimum est alors $\varphi(0) = 1 - 1 - 0 = 0$, si bien que $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$

Autrement dit, (B_m) est vraie

EXO 16

1) $f: x \mapsto x^2$

• La tangente à Γ_f au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ a pour équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = 2a(x-a) + a^2 \text{ soit } y = 2ax - a^2$$

• Considérons alors $d: x \mapsto x^2 - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2$

On a $d(x) = (x-a)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui montre

que Γ_f est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a

• Ceci étant vrai pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, il en découle que Γ_f est située au-dessus de toutes ses tangentes

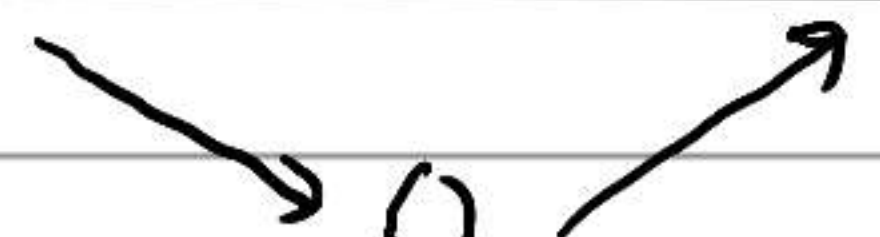
$g: x \mapsto \exp(x)$

Dans la suite, on note (T_a) la tangente au point d'abscisse a

• $(T_a): y = g'(a)(x-a) + g(a) = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a(1-a)$

• Posons $d: x \mapsto e^x - e^a x - e^a(1-a)$

$$\text{On a } d'(x) = e^x - e^a$$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$			

qui est du signe de $x-a$ par croissance de $\exp$
 $d(a) = e^a - e^a = 0$ est le minimum de d
donc $d(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est
en-dessus de sa tangente (T_a)

2)

$$h: x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } [0, +\infty[$$

• Pour $a > 0$, $(T_a): y = h'(a)(x-a) + h(a) = \frac{x-a}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \frac{x+a}{2\sqrt{a}}$

• Posons $d: x \mapsto \sqrt{x} - \frac{x+a}{2\sqrt{a}}$ sur $[0, +\infty[$

On a $d'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$, qui est du signe
de $(a-x)$ par croissance de la fonction racine carrée

x	0	a	$+\infty$
$d'(x)$	$+$	0	$-$
$d(x)$			

$$d(a) = \sqrt{a} - \frac{2a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$$

donc $d(x) \leq 0$ pour tout $x \geq 0$

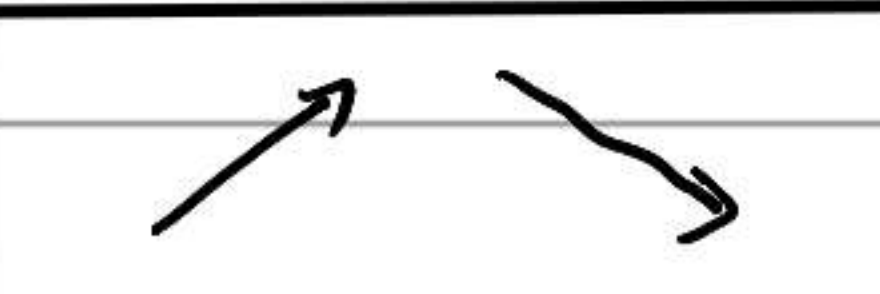
Ainsi, pour tout $a > 0$, la courbe $\mathcal{C}_h$ est située
en-dessous de sa tangente (T_a)

$$\ln \text{ sur }]0, +\infty[$$

• Pour $a > 0$, $(T_a): y = \frac{x-a}{a} + \ln(a) = \frac{x}{a} + \ln(a) - 1$

• Posons $d: x \mapsto \ln(x) - \frac{x}{a} - \ln(a) + 1$ sur $]0, +\infty[$

On a $d'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{a-x}{ax}$ qui est du signe de $a-x$ car $ax > 0$

x	0	a	$+\infty$
$d'(x)$	$+$	0	$-$
$d(x)$			

$$d(a) = \ln(a) - 1 - \ln(a) + 1 = 0$$

donc $d(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$

Ainsi, pour tout $a > 0$, la courbe $\mathcal{C}_\ln$ est située
en-dessous de sa tangente (T_a)

EXO 17

• f dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{6x}{16} = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3x}{8}$ pour $x > 0$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 est donc

$$(T): y = f'(4)(x-4) + f(4) = \left(3 - \frac{3}{2}\right)(x-4) + (8-3) = \frac{3}{2}x - 6 + 5 = \frac{3x}{2} - 1$$

• Posons $d: x \mapsto x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{16} - \frac{3x}{2} + 1$ sur $[0, +\infty[$

$$\text{On a } d'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3x}{8} - \frac{3}{2} = \frac{12\sqrt{x} - 3x - 12}{8} = -\frac{3}{8}(x - 4\sqrt{x} + 4) \text{ pour } x > 0$$

$$\text{Or } x = (\sqrt{x})^2$$

$$\text{d'où } x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0$$

si bien que $d'(x) \leq 0$ pour tout $x > 0$:

d est décroissante sur $[0, +\infty[$

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$d'(x)$		-	-
$d(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

• Enfin $d(4) = 0$ (cf. les courbes se coupant pour $x=4$)

si bien que $d(x)$ est positif sur $]-\infty, 4]$ et négatif sur $[4, +\infty[$

Ainsi $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T) sur $]-\infty, 4]$ et en-dessous sur $[4, +\infty[$

EXO 18

Il y en a trop, je m'avoue vaincu!

EXO 19: les allures des courbes sont données à la fin

EXO 19

(a) $f: x \mapsto e^{\frac{-x}{x^2+1}}$ définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

• $\frac{-x}{x^2+1} \sim \frac{-1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \exp(0) = 1$ par composition de limites

• $u: x \mapsto \frac{-x}{x^2+1}$ a pour dérivée $u': x \mapsto \frac{-1 \cdot (x^2+1) - (-x) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$

Or $x^2 - 1$ s'annule en -1 et 1 , et > 0 en dehors de ses racines

et < 0 à l'intérieur de ses racines

Enfin $f = e^u$ a pour dérivée $f' = u' e^u$, du signe de u' donc de $x^2 - 1$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			$\sqrt{e}$		$\frac{1}{\sqrt{e}}$	

Diagram showing the function $f(x)$ passing through $(-1, \sqrt{e})$ and $(1, \frac{1}{\sqrt{e}})$ with horizontal tangents. The value at $-\infty$ is 1 and at $+\infty$ is 1.

$$f(1) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

$$f(-1) = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet Δ pour asymptote en $+\infty$ et $-\infty$, avec $\Delta: y=1$
Elle possède deux tangentes horizontales en $(-1, \sqrt{e})$ et en $(1, 1/\sqrt{e})$

(b) $g: x \mapsto e^{-x} + \frac{1-x}{x+1}$ définie lorsque $x+1 \neq 0$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $\frac{1-x}{1+x} \sim -1$; comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ (composée) alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -1$ (somme)

De même $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow -1} 1-x = 2 > 0$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (1+x) = 0^+$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty$$

(quotient et somme)

$$\lim_{x \rightarrow -1} e^{-x} = e$$

de même

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^-$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty$$

- $(e^{-x})' = -e^{-x} < 0$ et $\left(\frac{1-x}{x+1}\right)' = \frac{-1x(x+1) - (1-x)x}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} < 0$

donc $g'(x) = -e^{-x} - \frac{x}{(x+1)^2} < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	$+\infty$		-1

Diagram showing the function $g(x)$ decreasing from $+\infty$ at $-\infty$ to -1 at $+\infty$, with a vertical asymptote at $x=-1$.

La courbe $\mathcal{C}_g$ admet $\Delta_1: x=-1$ pour asymptote et $\Delta_2: y=-1$ pour asymptote en $+\infty$
(En $-\infty$, elle admet $\mathcal{C}: y=e^{-x}-1$ pour asymptote car $g(x) - (e^{-x}-1) \rightarrow 0$)

- (c). La fonction h est définie sur $[1; +\infty[$ et $h(x) = (x-1)^{5/2}$ pour $x > 1$
 • $h(1) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ par produit et composition
 • h est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $h'(x) = \frac{5}{2}(x-1)^{3/2} > 0$

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	0	+
$h(x)$	0	$\nearrow +\infty$

Superbe bijection de $[1; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$
 Pas grand chose à signaler sinon : $h'(1) = 0$
 car $\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{(x-1)^{5/2}}{x-1} = (x-1)^{3/2} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$
 donc $\mathcal{C}_h$ admet une tangente horizontale en 1

On retrouve le comportement typique d'une fonction puissance d'exposant > 1

- (d). $1+x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

De plus, $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est une fonction paire.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} 1+x^2 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ par somme et composition

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ est du signe de x

COURBE SYMÉTRIQUE
PAR RAPPORT À (Oy)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow \circ \nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = \ln(1) = 0$$

$f'(0) = 0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet (Ox) pour tangente en 0

En $+\infty$, pas de droite asymptote. Par contre, $f(x) - 2\ln(x) = \ln(x^2+1) - \ln(x^2)$
 donc la courbe $\mathcal{C}: y = 2\ln(x)$ est asymptote
 à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$$

(e). $f: x \mapsto x-4 + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est définie lorsque $x+1 \neq 0$ et $\frac{x}{x+1} > 0$ (q. ln)

Ainsi $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
x	-	-	0	+
$x+1$	-	0	+	+
$\frac{x}{x+1}$	+	-	0	+

• $\frac{x}{x+1} \sim \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$ par continuité de ln

On en déduit par somme de limites que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

On en déduit aussi que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x-4)] = 0$: ainsi, la droite $\Delta_1: y = x-4$ est asymptote à la courbe $\frac{x \rightarrow \pm\infty}{-\infty}$ de f en $-\infty$ et en $+\infty$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x+1 = 1$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x}{x+1} = 0^+$ puis $\lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$ (quotient et composée)

On en déduit par somme de limites que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ | Ainsi $\Delta_2: x=0$ EST ASYMPTOTE

• $\lim_{x \rightarrow -1} x = -1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x+1 = 0^-$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x}{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$ (quotient et composée)

On en déduit par somme de limites que $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ | Ainsi $\Delta_3: x=-1$ EST ASYMPTOTE

• f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ car $\frac{x}{x+1}$ et $f(x) = x-4 - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x-4 - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

d'où $f'(x) = 1 - \frac{-1/x}{1+1/x} = 1 + \frac{1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$ pour $x \in \mathcal{D}_f$ ($x(x+1) > 0$, comme $\frac{x}{x+1}$)

⚠ NE PAS ÉCRIRE $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln(x) - \ln(x+1)$ CAR C'EST FAUX SUR $]-\infty, -1[$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	+	/	/	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ON PEUT VOIR S'IL Y A UNE SYMÉTRIE EN $x = -1/2$ (C'EST LE CAS !)

f) $l: x \mapsto x - \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

* $\sin(x) = o(x)$ donc $l(x) \sim x$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} l(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} l(x) = -\infty$$

N.B $l(x) \sim x$ mais $l(x) - x$ n'a pas de limite en $\infty \Rightarrow$ pas d'asymptote

* l dérivable sur $\mathbb{R}$ car $l'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ car $\cos(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

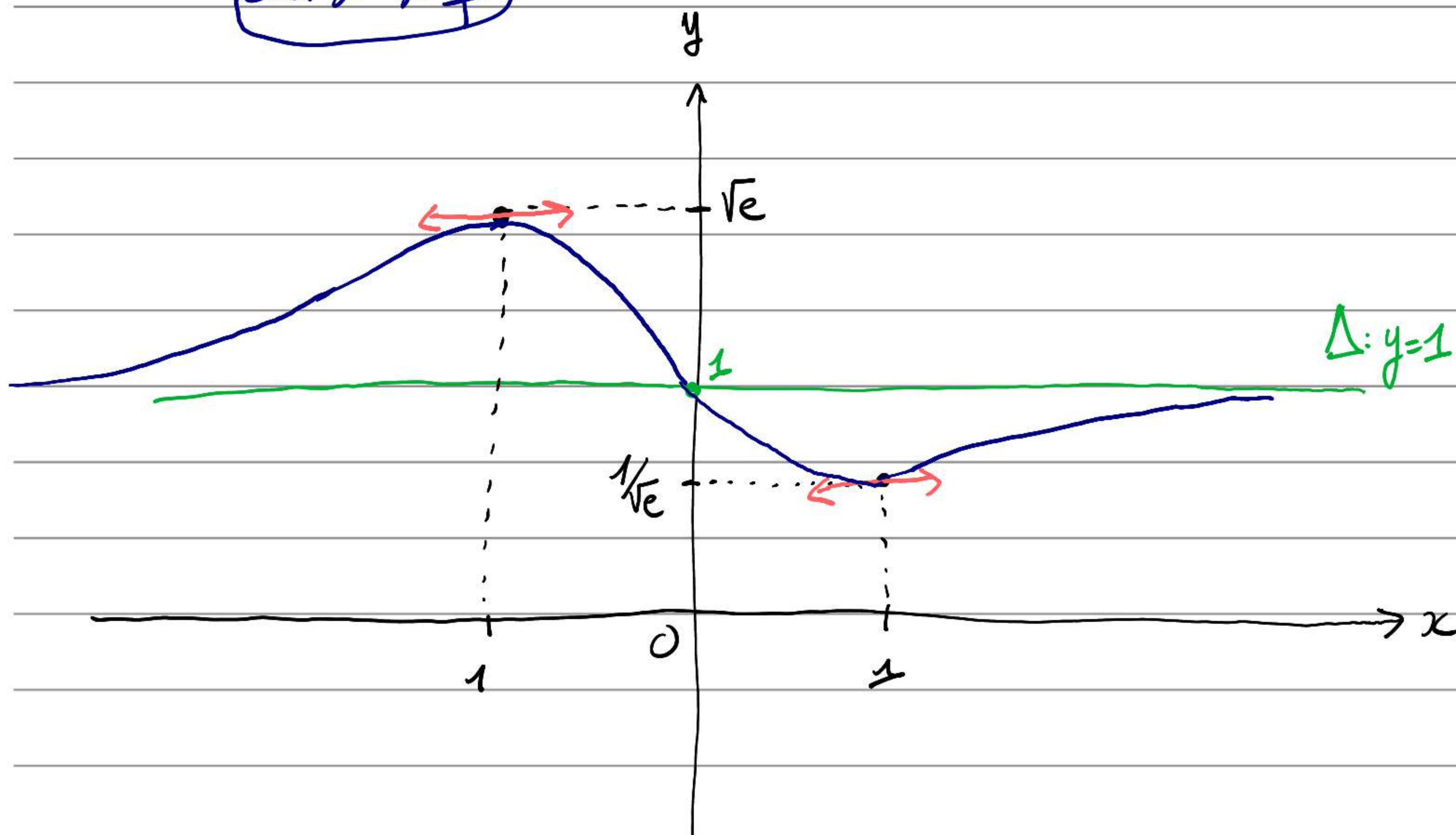
Notons que $l'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$: multitude de tangentes horizontales!

* $l(-x) = -x + \sin x = -l(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

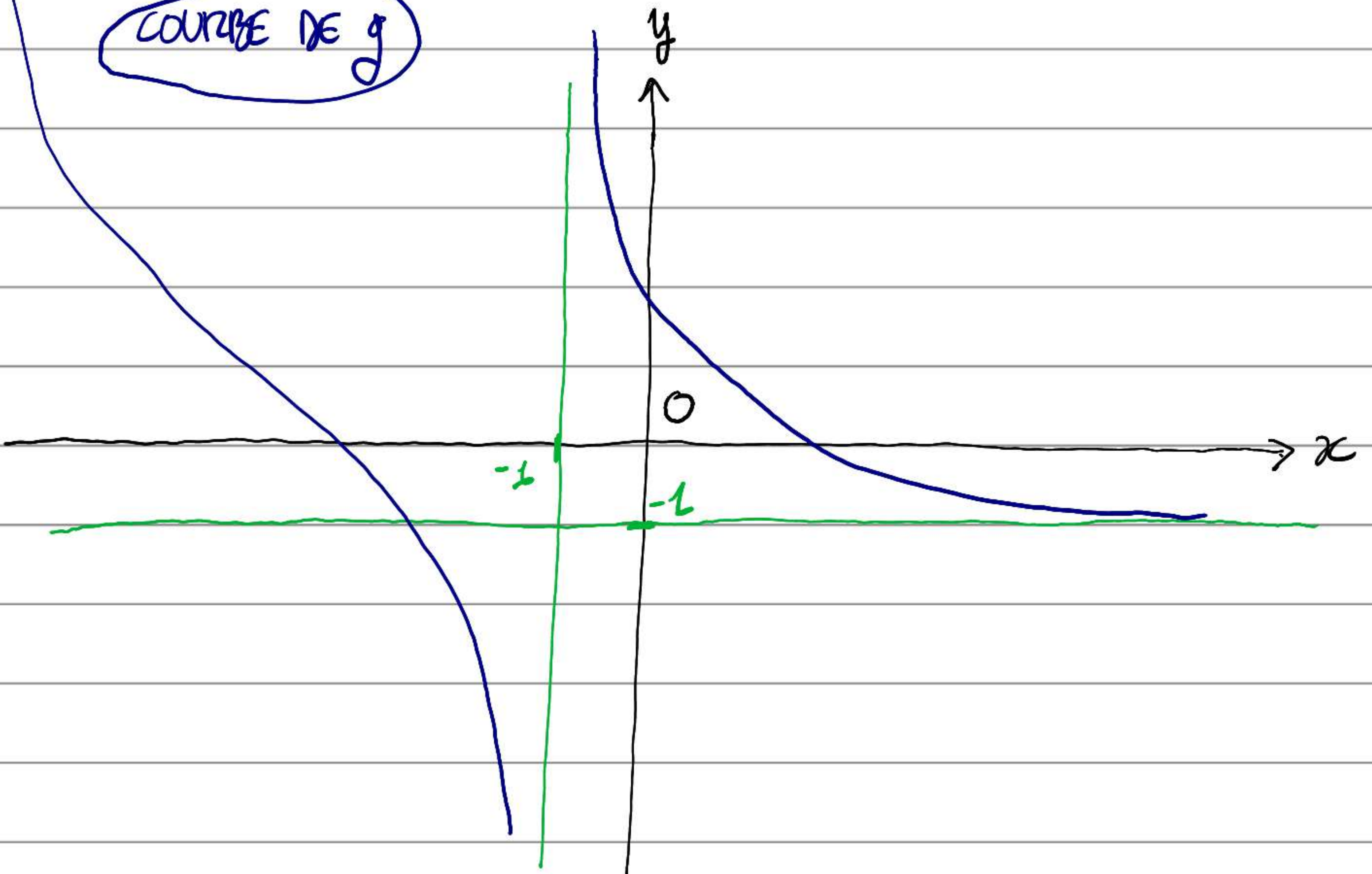
donc l est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à $O(90)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$l'(x)$	$+$	0	$+$
$l(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

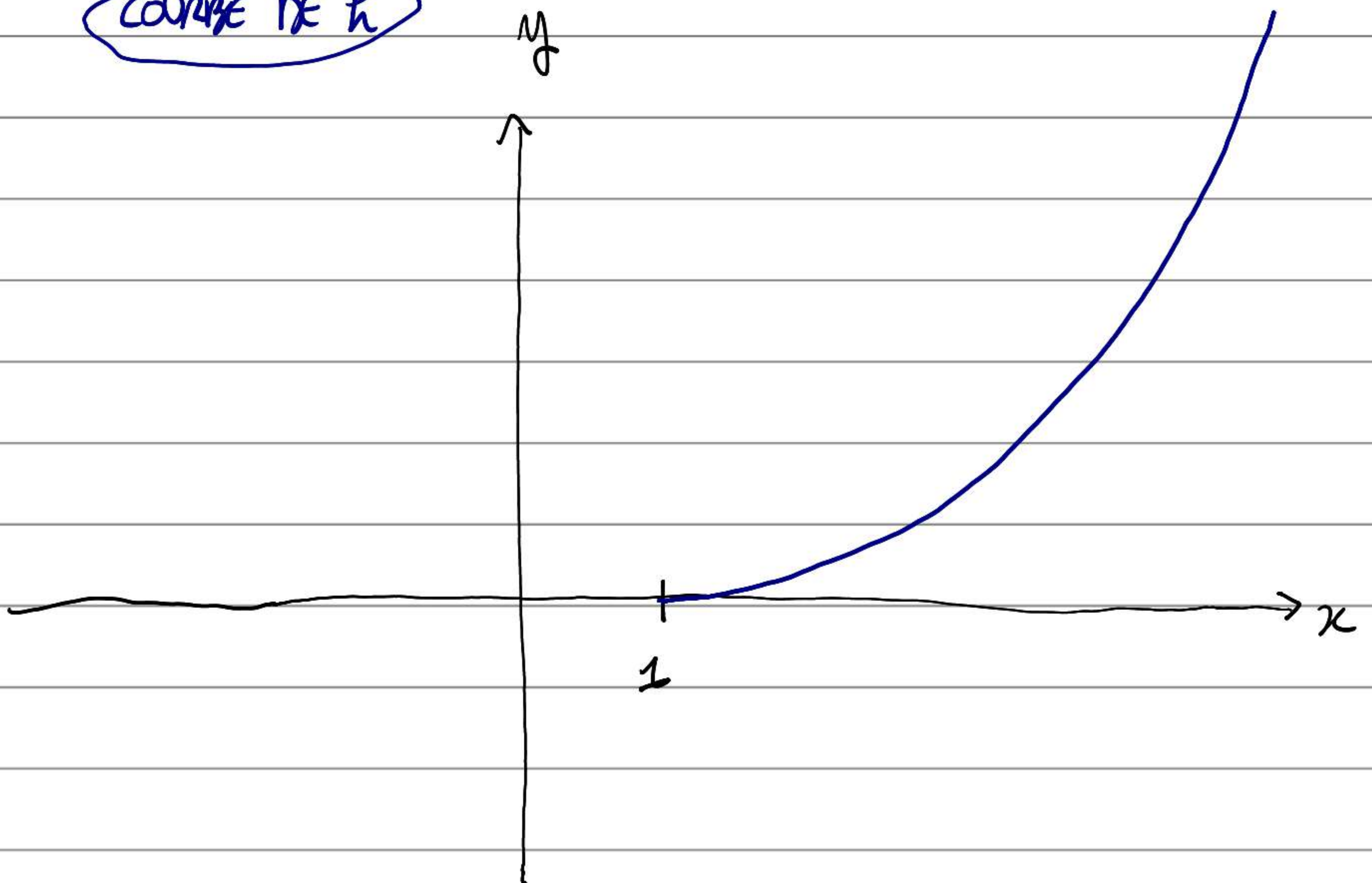
COURBE DE f



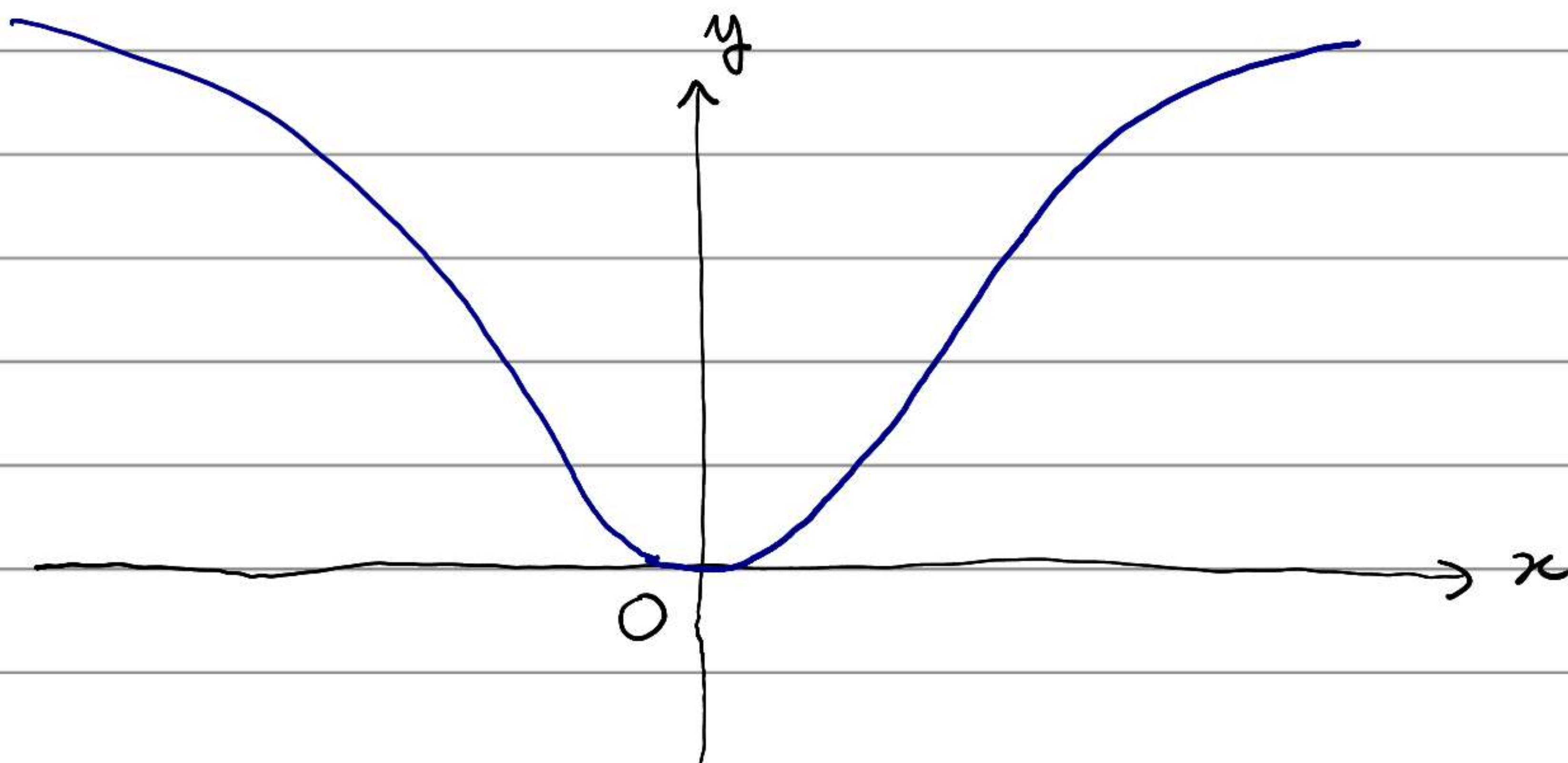
COURBE DE g



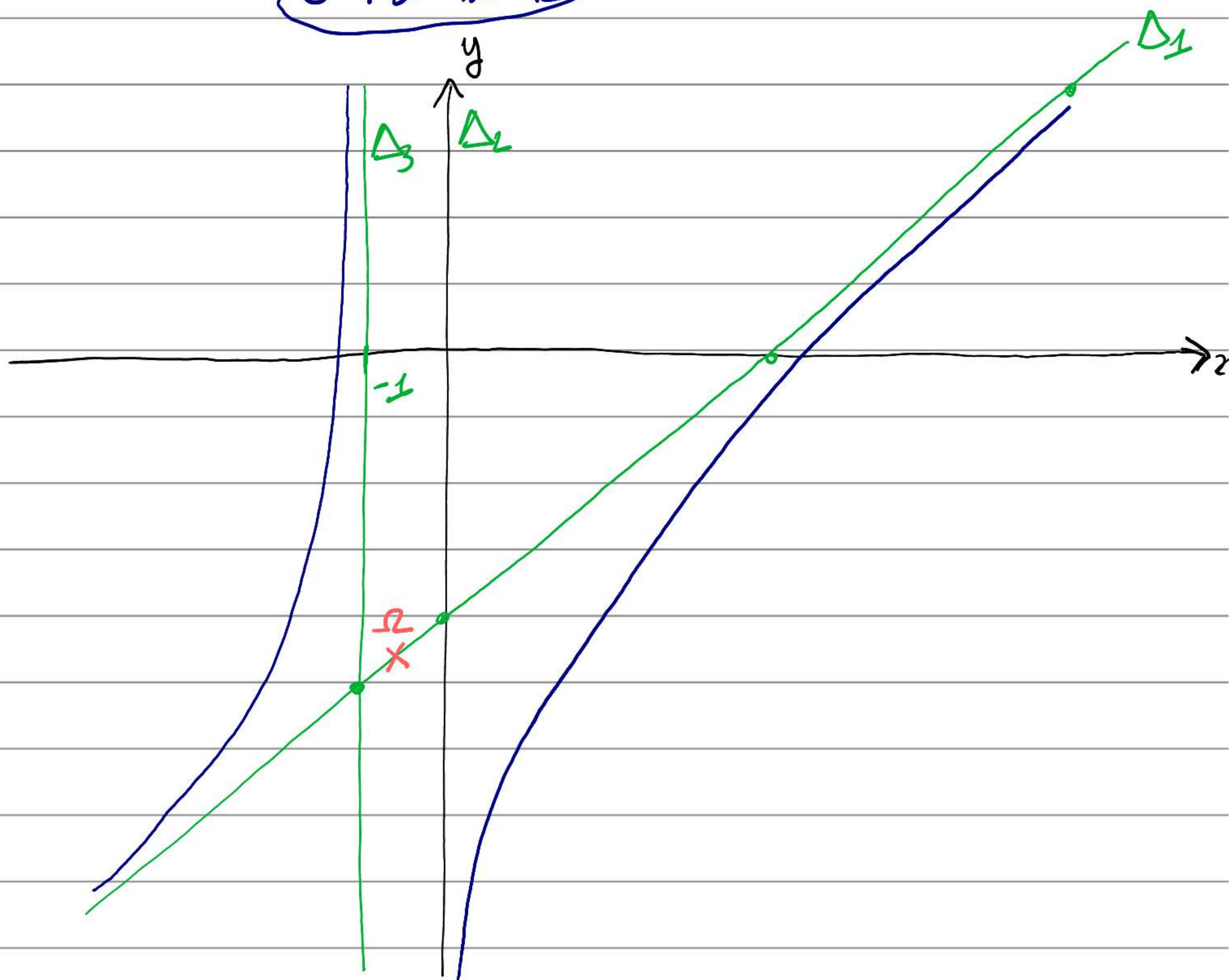
COURBE DE h



COURBE DE J



COURBE DE h



COURBE DE l

