

Univers et support d'une variable

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Chercher - Déterminer un univers adapté à chacune des expériences aléatoires suivantes :

- On lance un dé cubique équilibré. On s'intéresse au numéro affiché.
- Un sac contient 5 jetons numérotés de 1 à 5 et deux jetons portant le numéro 6. On extrait au hasard un jeton de l'urne. On s'intéresse au numéro obtenu de la façon suivante :
 - Les événements élémentaires ne sont pas forcément équiprobables.
 - Les événements élémentaires sont équiprobables.
- Une urne contient 19 boules dont 5 bleues, 3 rouges et 11 vertes. On tire au hasard une poignée de 4 boules de l'urne.
 - On s'intéresse à l'ordre des couleurs de boules obtenues, et certaines probabilités d'événements élémentaires peuvent être nulles.
 - On s'intéresse aux couleurs obtenues, avec toutes les probabilités d'événements élémentaires non nulles.
 - On s'intéresse au nombre de boules de chaque couleur, avec toutes les probabilités d'événements élémentaires non nulles.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - Cours -

On choisit au hasard trois personnes dans une population. Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on considère l'événement P_k : "La $k^{\text{ème}}$ personne a un rhésus positif".

Exprimer, en fonction de P_1, P_2, P_3 les événements suivants :

- A = "Les trois personnes ont un rhésus positif".
- B = "Les trois personnes ont le même rhésus".
- D = "Au moins une personne a un rhésus positif".

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Modéliser - Cours -

Dans l'exercice 1, on reprend l'exemple de la question 3. (Une urne contient 19 boules dont 5 bleues, 3 rouges et 11 vertes. On tire au hasard une poignée de 4 boules de l'urne.)

- Quitte à numéroté les boules (vous préciserez une façon de faire), déterminer un univers où tous les événements élémentaires sont équiprobables.
 - Calculer la probabilité d'un événement élémentaire.
- Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de boules rouges obtenues. Déterminer un support S de la variable et établir la loi de X .

Espaces probabilisés quelconques

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Chercher - ☆
Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$
Montrer que

$$P(A) - P(\overline{B}) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$$

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] - Cours -
Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que

$$P(A) = P(B) = 0,5$$

Montrer que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cap B)$.

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] - Chercher -
Soient A, B, C trois événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ tels que

$$A \cup B \cup C = \Omega; \quad P(B) = 2P(A); \quad P(C) = 3P(A).$$

Montrer que $P(A) \geq \frac{1}{6}$.

Espaces probabilisés finis

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] - Cours -
On considère un jeu de fléchettes dont la cible comporte 3 zones. On lance une fléchette sur la cible. (On estime qu'on ne la rate pas.)
On construit l'univers $\{A_1, A_2, A_3\}$, où A_k représente l'événement

A_k : "La fléchette atteint la zone k "

On suppose qu'il existe une probabilité p définie sur l'univers probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ telle que

$$P(A_1) = c; \quad P(A_2) = 2c; \quad P(A_3) = 3c$$

Déterminer c .

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Cours – Mobiliser –

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Un jeu consiste à tourner un disque dont les zones sont numérotées dans $\Omega = \{0, \dots, n\}$. En sachant que la probabilité de l'événement $\{k\}$: "tomber sur la zone k " est

$$p(k) = \beta k(n - k) \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

1. Déterminer β en fonction de n .
2. a) Déterminer, en fonction de n et $N = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, la probabilité de l'événement A_p : "obtenir un nombre pair".
b) En déduire que :

$$p(A_p) \begin{cases} < \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ = \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

- c) En déduire que quelquesoit la parité de n , la probabilité de tomber sur un nombre impair est supérieure à $p(A_p)$.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – Raisonner – "Problème du tricheur"

Une population contient une proportion de p tricheurs (p réel et $0 \leq p \leq 1$). On fait tirer quatre cartes dans un jeu de 52 cartes à un individu choisi au hasard dans la population. Si c'est un tricheur, il obtient toujours un carré (i.e. "obtenir 4 cartes de même valeur").

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un carré pour une personne quelconque (c'est à dire qui n'est pas un tricheur) ?
2. Il obtient un carré. Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ? (*on pourra utiliser le fait que "être ou non un tricheur" est un système complet et s'aider éventuellement d'un arbre de probabilité qui explicite la situation.*)

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Cours – Modéliser – Calculer –

Soit $(p, q) \in]0, 1[^2$.

Un enfant entreprend d'arracher par grosses poignées des touffes d'herbe dans le petit jardin de ses parents. Malheureusement, il ne s'occupe pas de savoir s'il s'agit uniquement de mauvaises herbes ou de belles fleurs soigneusement plantées.

- à chaque essai, la probabilité pour lui d'arracher une jolie plante dans sa poignée d'herbe est de p .

- Pour k poignées contenant en effet des jolies fleurs, la probabilité que ses parents soient obligés de replanter est de $1 - q^k$.

Il arrache n poignées. On note F le nombre de poignées qui contenaient des jolies fleurs et A l'événement "les parents sont obligés de retourner à la jardinerie."

1. Déterminer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $p(F = k)$.
2. Montrer, en utilisant le système complet $(F = k)_{k \in \{0, \dots, n\}}$, que

$$P(A) = 1 - \sum_{k=0}^n q^k P(F = k)$$

3. En déduire la valeur de $P(A)$ (et se demander si c'est cohérent avec ce qu'il risque d'advenir si les parents n'interviennent pas assez rapidement !)

 σ -additivité et Système (quasi-)complets

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer – On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'ensembles 2 à 2 incompatibles tels que

$$p(\{A_n\}) = 2^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que la famille $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet.
2. Calculer $p\left(\bigcup_{n \geq 3} A_k\right)$.

EXERCICE 12: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

Soit a un réel non nul et $\Omega = \{3^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On considère la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$p_n = \frac{1}{4} \left(\frac{1 + a^n}{n!} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

On sait que l'application $p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(3^k) = p_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est une loi de probabilité. Déterminer a .

EXERCICE 13: [Indications] [Correction] – Mobiliser – Raisonner –

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application $p : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$p(\{k\}) = (ak + 1)e^{-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Supposons que p soit une loi de probabilité.

1. Calculer $p(\{0\})$ et en déduire $p(\{1\})$. Quelle est l'unique valeur de a possible ?
2. Avec la valeur de a trouvée en 1), déterminer $p(\{2\})$. Qu'en déduit-on ?

EXERCICE 14: [Indications] [Correction] – Chercher – Raisonner – Calculer –

Soient $\lambda > 0$, $p \in]0, 1[$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système quasi complet d'événements tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$p(B_n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad p_{B_n}(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p(A_k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

EXERCICE 15: [Indications] [Correction] Montrer que si A et B sont des événements indépendants, alors $\bar{A}$ et B ainsi que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

EXERCICE 16: [Indications] [Correction] La mafia subtilise 15% des colis expédiés de New York par avion. Dominique veut envoyer deux cadeaux de Noël à sa petite soeur. Elle peut faire soit deux paquets séparés indépendants, soit un paquet groupé.

Déterminer dans les deux cas suivants la meilleure stratégie :

1. Les deux cadeaux doivent arriver.
2. Un cadeau au moins doit arriver.

Fonction de répartition

EXERCICE 17: [Indications] [Correction] – *Cours* – On pose $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction de répartition définie par

$$F(x) = \begin{cases} b & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } 1 < x < 2 \\ 3a & \text{si } 2 < x < 5 \\ 5a & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

1. Compléter les valeurs manquantes dans la définition de F . (i.e. $F(1), F(2)$ et $F(5)$).
2. Déterminer l'unique valeur possible de (a, b) .
3. Déterminer $\text{Supp}(X)$ ainsi que $P(X = x)$ pour tout $x \in \text{Supp}(X)$.

EXERCICE 18: [Indications] [Correction] – *Cours* –

Une entreprise fabrique des rames de métro. Une étude a montré qu'elle vend un nombre aléatoire $R \in \{0, \dots, 4\}$ rames par mois.

On a $p(R = 0) = 0,1$; $p(R = 1) = 0,25$; $p(R = 2) = 0,35$; $p(R = 3) = 0,25$

1. a) Calculer la probabilité que l'entreprise vende au moins une rame en un mois.
- b) Calculer $P(R \leq 1)$.
2. a) Déterminer de manière générale la fonction de répartition de R .
- b) En déduire $p(R = 4)$

EXERCICE 19: [Indications] [Correction] – *Cours* – *Chercher* – On choisit au hasard 2 numéros distincts de l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Soit X le produit de ces deux numéros.

1. Déterminer un espace probabilisé adapté à cette expérience.
2. Déterminer la loi de X .

3. Déterminer la fonction de répartition de X .

EXERCICE 20: [Indications] [Correction] – *Cours* – Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et X une v.a. a priori quelconque. On pose $Y = aX + b$

1. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X notée F_X .
2. a) *Application* : On pose $a = 2$, $b = 1$. Supposons que X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Déterminer la formule et le graphique de la fonction de répartition de Y .
- b) Quelle semble être la loi de Y ? L'expliquer intuitivement.

EXERCICE 21: [Indications] [Correction] – *Calculer* – *Cours* – Soient X, Y deux v.a. indépendantes de fonction de répartition F_X, F_Y . Déterminer en fonction de F_X et F_Y les fonctions de répartition des v.a.

1. $\max(X, Y)$
2. $\min(X, Y)$.

EXERCICE 22: [Indications] [Correction] – *Calculer* – Soit X une v.a. de fonction de répartition F_X . Déterminer, en fonction de F_X , la fonction de répartition de la v.a. Y , où

1. $Y = \ln X$. (avec X strictement positive.)
2. $Y = e^X$.

Problèmes divers

EXERCICE 23: [Indications] [Correction] – *Chercher* – Problème des portes de Monty-Hall ☆☆

Le jeu de Monty Hall se présente de la façon suivante : trois portes sont fermées. Derrière l'une d'entre elles se trouve une voiture, derrière chacune des deux autres portes se trouve un porte-clés. Le candidat se place devant l'une des portes. Le présentateur, qui sait quelle est la porte cachant la voiture, ouvre alors l'une des deux autres portes, derrière laquelle, bien sûr, se trouve un porte-clés. Sachant que le candidat gagnera se qui se trouve derrière la porte qu'il aura finalement choisie, que doit-il faire ; conserver son choix où changer de porte ?

EXERCICE 24: [Indications] [Correction] – *Mobiliser* –

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. On dispose d'une urne contenant $n - 1$ boules numérotées de 1 à $n - 1$, et de n boîtes $B_1, \dots, B_n$.

Pour tout i compris entre 1 et n , la boîte B_i contient i jetons numérotés de 1 à i . On tire une boule de l'urne, et si la boule tirée porte le numéro i , on tire un jeton de la boîte B_i et un jeton de la boîte B_{i+1} . On dit qu'il y a succès si les deux jetons portent le même numéro.

1. Quelle est la probabilité p_2 de succès lorsque $n = 2$?
2. Supposons maintenant n quelconque.
- a) Quelle est la probabilité de tirer la boule i dans l'urne de départ ?

- b) Supposons que l'on tire un jeton de la boîte i et un jeton de la boîte $i + 1$. Quelle est la probabilité que les numéros soient identiques ?
- c) En déduire sous forme de somme la probabilité p_n de succès lorsque $n \geq 2$?
3. a) Montrer que pour tout k entier naturel non nul :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

et en déduire un équivalent au voisinage de l'infini de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ☆

- b) Donner un équivalent de p_n , pour n au voisinage de l'infini.

EXERCICE 25: [Indications] [Correction] – *Calculer – Mobiliser –*

Dans un quiz télévisé, les joueurs sont opposés de la manière suivante. La première manche est disputée par les joueurs A_0 et A_1 . Le gagnant est opposé dans la deuxième manche à un nouveau joueur A_2 , le gagnant de la deuxième manche est opposé le troisième jour à un joueur A_3 , etc...

Le premier joueur à avoir remporté trois manches consécutives remporte le prix. Tous les joueurs sont de même force et chacun a donc une probabilité $\frac{1}{2}$ de remporter une manche à laquelle il participe.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note p_n la probabilité que A_n joue au moins une fois et q_n celle qu'il remporte le prix.

1. Calculer q_0, q_1, q_2, q_3 .
2. a) Si le joueur A_n joue, quels joueurs est-il susceptible d'affronter lors de la première manche qu'il dispute ? ☆
- b) Montrer que pour $n \geq 4$, on a

$$p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{4}p_{n-2}$$

3. Calculer pour tout entier naturel n les probabilités p_n et q_n .

Exercice 6 [Correction]

Vérifier que $P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$.

Exercice 8 [Correction]

2. a) Penser à faire un système complet avec l'ensemble des nombres pairs possibles entre 0 et N .

Exercice 10 [Correction]

1. Penser aux variables connues.

Exercice 12 [Correction]

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Exercice 18 [Correction]

2. a) On pourra commencer par établir $P(R \leq t)$ pour tout $t < 0$, puis $P(R \leq t)$ pour tout $t \geq 4$.
Ensuite, on pourra établir les différents $P(R \leq k)$ pour tout $k = 0, 1, 2, 3$.
On terminera ensuite avec les autres $P(R \leq t)$.

Exercice 21 [Correction]

2. On pourra éventuellement passer à l'événement contraire de $(\min(X, Y) \leq t)$ dans la fonction de répartition.

Exercice 23 [Correction]

On pourra évaluer les différentes quantités de type $P(O_i/V_j)$.
Pour $i = 1, 2, 3$, on notera V_i "la voiture se trouve derrière la porte i " et O_i "le présentateur ouvre la porte i ".

Exercice 24 [Correction]

3. a) On pourra éventuellement intégrer $\frac{1}{t}$ entre k et $k + 1$.

Exercice 1

1. $\Omega = \{1, \dots, 6\}$
2. a) $\Omega = \{1, \dots, 6\}$
b) $\Omega = \{1, \dots, 5, A, B\}$
3. a) $\Omega = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_i \in \{B, R, V\} \forall i = 1, \dots, 4\}$
b) $\Omega = \{\{B\}, \{B, R\}, \{B, V\}, \{B, R, V\}, \{V\}, \{V, R\}\}$
c) On résume sous forme d'un tableau (résultat d'un tirage en colonne)

<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>V</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>V</i>
<i>B</i>	<i>B</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>R</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>
<i>B</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>R</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>	<i>V</i>

Remarque : les événements élémentaires ne sont pas équiprobables. Pour les rendre équiprobables, il faut numéroter les boules.

Exercice 2

1. $A = P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
2. $B = (P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (\bar{P}_1 \cap \bar{P}_2 \cap \bar{P}_3)$.
3. $D = P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

Exercice 3

1. a) Le plus simple à ce stade est simplement par exemple de numéroter les boules de la façon suivante :
bleues de 1 à 5, rouges de 6 à 8, vertes de 9 à 19. Ainsi, un univers adapté serait :

$$\Omega = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \llbracket 1, 19 \rrbracket, \text{ où } a, b, c, d \text{ sont 2 à 2 distincts.}\}$$

- b) Les événements étant équiprobables, il suffit simplement d'utiliser la formule

$$p(\{(a, b, c, d)\}) = \frac{1}{\text{card } \Omega}$$

Or, s'agissant d'un ensemble de 4-listes d'éléments distincts dans une famille de 19 éléments, on sait que

$$\text{card } \Omega = \binom{19}{4} = 3\,876$$

i.e.

$$\boxed{p(\{(a, b, c, d)\}) = \frac{1}{3\,876}}$$

2. On a immédiatement

$$\text{Supp}(S) = \{0, 1, 2, 3\}$$

On va utiliser le fait que nous soyons en présence d'un système d'événements élémentaires tous équiprobables. Ainsi,

$$p(S = i) = \frac{\text{nombre de possibilités pour que } S = i}{\text{card } \Omega}$$

Ainsi,

Or $S = i$ signifie qu'on a choisi i boules rouges parmi les 3 et les $4 - i$ autres boules parmi les $19 - 3$ autres boules possibles. Ainsi,

$$p(S = i) = \frac{\binom{3}{i} \binom{16}{4-i}}{\binom{19}{4}} \quad \forall i \in \{0, \dots, 3\}$$

Exercice 4

$$P(A) - P(\bar{B}) \leq P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)) :$$

- Inégalité de droite :

C'est la plus simple, elle est quasi triviale, puisque

$$A \cap B \subset A \quad A \cap B \subset B$$

d'où

$$P(A \cap B) \leq P(A) \quad ; \quad P(A \cap B) \leq P(B)$$

- Inégalité de gauche :

Ceci revient à montrer que $P(A) \leq P(A \cap B) + P(\bar{B})$.

Or, $A = (A \cap B) \sqcup (A \cap \bar{B})$ et $A \cap \bar{B} \subset \bar{B}$. D'où

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) \leq P(A \cap B) + P(\bar{B})$$

Exercice 5

On a

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - \underbrace{\left(P(A) + P(B) - P(A \cap B) \right)}_1 = P(A \cap B) \end{aligned}$$

Exercice 6

De manière générale,

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

(c'est la généralisation de $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$.) Ici, $P(A \cup B \cup C) = 1$ et $P(A) + P(B) + P(C) = 6P(A)$. D'où le résultat.

Exercice 7

La famille $(A_k)_{k=1,2,3}$ constitue clairement un système complet de Ω . Ainsi

$$\sum_{k=1}^3 p_k = 1$$

Sachant que

$$p_k = kc \quad \forall k = 1, 2, 3$$

on trouve

$$1 = \underbrace{c}_{p_1} + \underbrace{2c}_{p_2} + \underbrace{3c}_{p_3} = 6c$$

Donc

$$\boxed{c = \frac{1}{6}}$$

Exercice 8

1. On sait qu'on doit avoir

$$\sum_{k=0}^n p(k) = 1$$

On rappelle que

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ces trois constatations permettent d'arriver d'une part à

$$\sum_{k=0}^n k(n-k) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

et donc au final à

$$\boxed{\beta = \frac{6}{n(n-1)(n+1)}}$$

2. a) Soit A_p l'événement : "avoir un nombre pair". On a alors

$$p(A_p) = \sum_{k=0}^N p(2k)$$

Après calcul (les mêmes formules que dans la question 1 sont utiles), on arrive à

$$p(A_p) = \frac{1}{3} \beta N(N+1)(3n-4N-2)$$

i.e.

$$\boxed{p(A_p) = 2 \frac{N(N+1)(3n-4N-2)}{n(n-1)(n+1)}}$$

b) • Si n est pair :

On a $N = \frac{n}{2}$. après calcul, on a

$$p(A_p) = \frac{(n+2)(n-2)}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{n^2-4}{n^2-1}}_{0 \leq \dots < 1} < \frac{1}{2}$$

• Si n est pair :

On a $N = \frac{n-1}{2}$. Dans ce cas, on calcule

$$p(A_p) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{(n-1)(n+1)(3n-2(n-1)-2)}{n(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \frac{n+2-2}{n} = \frac{1}{2}$$

c) Obtenir un nombre impair (notons cet événement B_p) est l'événement contraire de A_p . Ainsi, sa probabilité est

$$p(B_p) = 1 - p(A_p)$$

D'après la question précédente, on a donc

$$p(B_p) \geq \frac{1}{2} \geq p(A_p)$$

Dans toutes les cas, la probabilité d'obtenir est supérieure ou égale à celle d'un nombre pair.

Il vaut donc mieux miser systématiquement sur l'imparité.

Exercice 9

1. Les cartes étant toutes différentes, le tirage de 4 cartes parmi 52 peut se modéliser par l'univers de tous les sous ensembles de 4 éléments parmi 52. Sur cet univers, les événements sont équiprobables. Ainsi, pour un événement E de Ω , on a

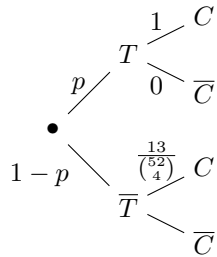
$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(E)}{\binom{52}{4}}$$

Notons C l'événement "obtenir un carré" et T l'événement : "être un tricheur". Or, obtenir un carré signifie que C doit contenir 4 cartes du même type. Il y a donc autant de possibilités que de choix du type parmi $52/4 = 13$. D'où

$$P_{\bar{T}}(C) = \frac{13}{\binom{52}{4}}$$

2. On cherche ici $P_C(T)$.

D'après l'énoncé, la 1ère question et par le fait que $(T, \bar{T})$ est un système complet, on connaît les probabilités suivantes :



Ainsi,

$$P_C(T) = \frac{P(T \cap C)}{p(C)} = \frac{P_T(C)p(T)}{p_T(C)p(T) + p_{\bar{T}}(C)p(\bar{T})}$$

i.e. après application numérique

$$P_C(T) = \frac{p}{p + \frac{13}{\binom{52}{4}}(1-p)}$$

Exercice 10

1. F est le nombre de réussites (avoir de jolies fleurs dans sa main...) de proba p , dans série de n répétitions indépendantes d'une même expérience : "arracher une poignée". F suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ d'où

$$p(F = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2. La formule des probabilités totales sur le système complet évoqué donne directement

$$P(A) = \sum_{k=0}^n P_{F=k}(A)p(F=k) = \sum_{k=0}^n (1-q^k)p(F=k) = \sum_{k=0}^n p(F=k) - \sum_{k=0}^n q^k p(F=k)$$

Or, par système complet, $\sum_{k=0}^n p(F=k) = 1$

3. On réinjecte le résultat de la première question dans la deuxième :

$$P(A) = 1 - \sum_{k=0}^n q^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pq)^k (1-p)^{n-k}$$

Puis la formule du binôme de Newton nous donne

$$P(A) = 1 - (pq + 1 - p)^n$$

On constate que comme on a $pq + 1 - p \in [0, 1[$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (pq + 1 - p)^n = 1$$

Si le nombre de tentatives est trop grand, il est cohérent de se dire que la probabilité pour les parents de retourner à la jardinerie sera très proche de 1 !

Exercice 11

2. $p \left(\bigcup_{n \geq 3} A_n \right) = p(\mathbb{N}^*) - (p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)) = \frac{1}{8}$.

Exercice 12

On reconnaît des séries exponentielles $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ avec $x = 1$ et $x = a$. On obtient

$$a = \ln(4 - e)$$

Exercice 13

1. • $p(\{0\}) = 1$. On en déduit que $p(\{1\}) = 0$, sinon, $p(\{0;1\}) > 1$, ce qui est impossible.

- Calcul de a :

$$p(\{1\}) = 0 \Leftrightarrow a \times 1 + 1 = 0$$

et donc

$$a = -1$$

2. Si $a = -1$, on obtient $p(\{2\}) = (-2 + 1)e^{-2} < 0$, ce qui est contradictoire avec le fait que p est une proba.

Conclusion :

p n'est pas une loi de probabilité.

Exercice 14

Même principe que pour l'exercice 19 :

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a

$$\begin{aligned} p(A_k) &= \sum_{j=0}^{+\infty} p(A_k \cap B_j) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{B_j}(A_k) p(B_j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} p_{B_j}(A_k) p(B_j) \\ &= \sum_{j=k}^{+\infty} \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} p^k \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{j!}{k!(j-k)!} (1-p)^{j-k} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda} p^k \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{(j-k)!} (1-p)^{j-k} \lambda^{j-k} \end{aligned}$$

un changement de variable dans la somme donne :

$$\begin{aligned} p(A_k) &= e^{-\lambda} p^k \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} (1-p)^r \lambda^{r+k} \\ &= e^{-\lambda} (\lambda p)^k \frac{1}{k!} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{1}{r!} (\lambda(1-p))^r \end{aligned}$$

grâce à la somme totale d'une série exponentielle, on obtient

$$p(A_k) = e^{-\lambda} (\lambda p)^k \frac{1}{k!} e^{\lambda(1-p)}$$

et donc

$$p(A_k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$$

Exercice 15

- $p(A \cap \bar{B}) = p(A)p(\bar{B})$:

On a $A = A \cap (B \cup \bar{B}) = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$, d'où

$$p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = p(A)$$

et donc

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) = p(A) - p(A)p(B) = p(A)p(\bar{B})$$

- $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A})p(\bar{B})$:

Il suffit de réappliquer la première partie en remplaçant A et B par $\bar{B}$ et $\bar{A}$.

Exercice 16

1. On note A l'événement : "le premier cadeau arrive" et B l'événement : "le deuxième cadeau arrive".

- Dans le cas de l'envoi de 2 paquets **séparés**, calculons la probabilité pour que les deux arrivent.

On cherche la proba de $P(A \cap B)$. Par indépendance, on a

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,85^2 = 0,7225$$

- Dans le cas de l'envoi de 2 paquets **groupés** :

En notant C : "le paquet contenant les deux arrive", on a clairement $P(C) = 0,85$

- Conclusion :

$$P(A \cap B) < P(C)$$

Il vaut mieux envoyer un seul paquet.

2. • Dans le cas de l'envoi de 2 paquets **séparés**, calculons la probabilité pour qu'au moins l'un des deux arrive.

On cherche la proba de $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,85 + 0,85 - 0,85^2 = 0,9775$

- Conclusion :

$$P(A \cup B) > P(C)$$

Il vaut mieux envoyer deux paquets.

Exercice 17

1. On ne peut poser que

$$F(x) = \begin{cases} F(x) = \begin{cases} b & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3a & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ 5a & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \end{cases}$$

2. • $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ implique

$$b = 0$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ implique

$$a = \frac{1}{5}$$

3. F est une fonction en escalier de points de discontinuités 1, 3, 5, ainsi

$Supp(X)$ contient $\{1, 3, 5\}$

avec

k	1	3	5
$P(X = k)$	$2a$	$3a$	$5a$

La somme des probabilités valant 1, on a bien le support complet !

Exercice 18

1. a) C'est le contraire de ne vendre aucune rame, d'où $P(R \geq 1) = 1 - p(R = 0) = 0$

- b) $P(R \leq 3) = p(R = 0) + p(R = 1) = 0,1 + 0,25 = 0,35$.

2. a) $Supp(R) \subset [0, 4]$ d'où :

$$P(R \leq t) \text{ pour tout } t < 0$$

et

$$P(R \leq t) \text{ pour tout } t < 0$$

Ensuite, en utilisant $P(R \leq k) = P(R = 0) + \dots + P(R = k)$ pour les k entiers :

$k =$	0	1	2	3	4
$P(R \leq k)$	0,1	0,35	0,7	0,95	1

et finalement comme $P(X \leq t) = P(R \leq [t])$, on en déduit que

$$P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 0,1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0,35 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0,7 & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 0,95 & \text{si } 3 \leq t < 4 \\ 1 & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$$

b) $p(R = 4) = P(X \leq 4) - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,95$ d'où

$$p(R = 4) = 0,05$$

Exercice 19

1. On propose de modéliser ceci par un tirage de 2 éléments simultanés parmi ceux de $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. L'univers peut donc s'écrire

$$\Omega = \{\{i, j\} \text{ tels que } i, j \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ avec } i \neq j\}$$

avec la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et p la probabilité uniforme.

2. Étant donné que p est la probabilité uniforme, il suffit de déterminer le nombre de cas favorables pour déterminer $p(X = k)$. Faisons le tableau des valeurs de X suivant les deux valeurs choisies :

	-2	-1	0	1	2
-2			2	0	-2
-1				0	-1
0					0
1					2
2					

D'où le support de $X = \{-4, -2, -1, 0, 2\}$ et la loi de probabilité de X :

$$p(X = k) \begin{array}{c|ccccc} k & -4 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ \hline & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{array}$$

3. Comme c'est une variable finie, il suffit de calculer les probabilités cumulées $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \text{Supp}(X)$. On obtient alors

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -4 \\ \frac{1}{10} & \text{si } -4 \leq x < -2 \\ \frac{3}{10} & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \frac{4}{10} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{8}{10} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Exercice 20

1. • Si $a > 0$:

on a $p(aX + b \leq x) = p\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, d'où

$$F_{aX+b}(x) = F\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

- Si $a < 0$:

on a $p(aX + b \leq x) = p\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, d'où

$$F_{aX+b}(x) = 1 - \lim_{t \rightarrow \frac{x-b}{a}, t < \frac{x-b}{a}} F\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

2. a) Si X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$, alors

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x-1}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x-1}{2} < 0 \\ \frac{\frac{x-1}{2}-1}{3-1} & \text{si } 1 \leq \frac{x-1}{2} \leq 3 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x-1}{2} < 0 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } 0 \leq \frac{x-1}{2} \leq 1 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- b) C'est une loi uniforme sur $[1, 3]$.

Intuitivement : Si on choisit un nombre au hasard dans $[0, 1]$, $2X$ correspond au choix au hasard dans $[0, 2]$ et ensuite, on décale simplement de 1 : $Y = 2X + 1$ est le choix d'un nombre au hasard dans $[1, 3]$.

Exercice 23

Numérotons les portes de 1 à 3. On suppose que le candidat commence par choisir la porte 1. (problème symétrique pour tout autre numéro.) On note V_i "la voiture se trouve derrière la porte i ". On a

$$P(V_i) = \frac{1}{3} \quad \forall i = 1, 2, 3$$

et O_i "le présentateur ouvre la porte i ".

Alors

$$P(O_2/V_1) = \frac{1}{2} = P(O_3/V_1)$$

et

$$P(O_2/V_2) = 0 = P(O_3/V_3) \quad ; \quad P(O_3/V_2) = 1 = P(O_2/V_3)$$

On a donc

$$\begin{aligned} P(V_1/O_2) &= \frac{P(V_1 \cap O_2)}{P(O_2)} = \frac{P(O_2/V_1)P(V_1)}{\sum_{i=1}^3 P(O_2/V_i)P(V_i)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De manière symétrique,

$$P(V_1/O_3) = \frac{1}{3}$$

En revanche,

$$\begin{aligned} P(V_2/O_3) &= \frac{P(V_2 \cap O_3)}{P(O_3)} = \frac{P(O_3/V_2)P(V_2)}{\sum_{i=1}^3 P(O_3/V_i)P(V_i)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le candidat a donc 2 fois plus de chance de gagner la voiture en changeant de porte !

Exercice 24

1. Pour $n = 2$, l'urne contient une seule boule portant le numéro 1. On pioche donc un jeton dans chacune des boîtes B_1 et B_2 . Comme $B_1 = \{1\}$ et $B_2 = \{1, 2\}$, il y a succès si on tire "1" dans la boîte B_2 . Ainsi $p_2 = \frac{1}{2}$.
2. a) Les tirages sont équiprobables, ainsi cette probabilité vaut $\frac{1}{n-1}$.

- b) Notons $\Omega = \llbracket 1, i \rrbracket \times \llbracket 1, i+1 \rrbracket$ l'univers des possibilités pour les deux tirages. Si on note R_i l'événement que l'on cherche, on a

$$\begin{aligned} P(R_i) &= \sum_{k=1}^i P(\text{"obtenir } k \text{ dans la 1}^{\text{ère}} \text{ boîte"} \cap \text{"obtenir } k \text{ dans la 2}^{\text{ème}} \text{ boîte"}) \\ &= \sum_{k=1}^i P(\text{"obtenir } k \text{ dans la 1}^{\text{ère}} \text{ boîte"}) P(\text{"obtenir } k \text{ dans la 2}^{\text{ème}} \text{ boîte"}) \\ &\quad (\text{indépendance des tirages.}) \\ &= \sum_{k=1}^i \frac{1}{i} \frac{1}{i+1} = i \cdot \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i+1} \end{aligned}$$

D'où

La probabilité cherchée vaut $\frac{1}{i+1}$.

- c) On note S l'événement " Succès", ainsi que T_i : "la première boule tirée porte le numéro i ".
Ainsi, la famille $\{T_i\}_{i \in \{1, \dots, n-1\}}$ est un système complet de l'univers. Aussi, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S) &= \sum_{i=1}^{n-1} P_{T_i}(S) P(T_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} P_{T_i}(S) \frac{1}{n-1} \quad (\text{équiprobabilité des tirages dans l'urne.}) \end{aligned}$$

De plus, sachant que la boule tirée porte le numéro i , il faut déterminer la probabilité de succès, mais c'est ce qui a été fait dans la question précédente. D'où

$$p_n = P(S) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{i+1}$$

3. a) $\ln(k+1) - \ln(k) = \int_k^{k+1} t \, dt.$
 Pour $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, d'où, en intégrant entre k et $k+1$:

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

 On obtient, pour $n \geq 1$: $\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, soit encore $S_n \geq \ln(n+1)$
 De même $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$ et $S_{n+1} \leq \ln(n+1) + 1$, donc, pour $n \geq 2$, $S_n \leq \ln(n) + 1$.
 Finalement :

$$\forall n \geq 2, \quad \ln(n+1) \leq S_n \leq \ln(n) + 1$$

Comme $\ln(n) + 1 \sim \ln n$ et $\ln(n+1) \sim \ln n$, on en déduit que

$$\boxed{S_n \sim \ln n.}$$

b) $p_n = \frac{1}{n-1}(S_n - 1) \sim \frac{\ln n}{n}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 25

1. Dans l'hypothèse où un joueur est amené à jouer, la probabilité pour qu'il gagne est celle de gagner 3 parties dans une succession de trois épreuves à deux issues, deux à deux indépendantes, de probabilité de succès $\frac{1}{2}$. C'est donc

$$P(S=3) \text{ où } S \text{ suit une loi binomiale } \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

D'où

$$P(S=3) = \frac{1}{8}$$

Les joueurs 0, 1, 2, 3 jouent forcément. La probabilité pour un de ces joueurs de gagner est donc simplement

$$\boxed{q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = \frac{1}{8}}$$

2. a) Pour $k \geq 2$, le joueur k ne peut faire que trois parties maximum et ne peut commencer à jouer qu'à la manche $k-1$. En résumé, il ne peut jouer au maximum que les manches $k-1, k, k+1$.
 Le joueur n commence à la manche $n-1$. Le joueur $k \neq n$ ne peut donc le rencontrer à ce moment là que si

$$n-1 \in \{k, k+1\}$$

autrement dit, si

$$k \in \{n-2, n-1\}$$

A_n peut donc rencontrer au maximum A_{n-1}, A_{n-2} lors de sa première manche.

b) Soit $n \geq 4$. Décomposons l'événement " A_n joue", que l'on note J_n .

Tout d'abord, si A_n joue, alors tous les joueurs précédents ont forcément joué, en particulier A_{n-1} . Ainsi, les événements

$$\underbrace{"}A_{n-1} \text{ joue et gagne sa 1}^{\text{ère}} \text{ manche}"}_{T \subset J_n} \text{ et } \underbrace{"}A_{n-1} \text{ joue et perd sa 1}^{\text{ère}} \text{ manche}"}_U$$

forment un système complet de J_n .

D'où

$$P(J_n) = P(J_n \cap T) + P(J_n \cap U)$$

- Calcul de $P(J_n \cap T)$:

Facilement, on a

$$\begin{aligned} P(J_n \cap T) &= P(T) \quad \text{car } T \subset J_n \text{ d'où } J_n \cap T = T \\ &= \underbrace{P(A_{n-1} \text{ joue})}_{\frac{1}{2}} \underbrace{P((A_{n-1} \text{ gagne sa 1}^{\text{ère}} \text{ manche}))}_{p_{n-1}} = \frac{1}{2} p_{n-1} \end{aligned}$$

- Calcul de $P(J_n \cap U)$:

Considérons l'événement $J_n \cap U$ réalisé. Si A_{n-2} a joué et perdu, alors le joueur A_k , $k < n-2$ contre lequel il a joué la première fois a gagné contre A_{n-2} , puis A_{n-1} et va donc rencontrer A_n , ce qui est impossible d'après la question précédente car $n \geq 4$.

Ceci est donc impossible. On a donc forcément

$$"}A_{n-2} \text{ joue et gagne sa 1}^{\text{ère}} \text{ manche}{"$$

D'où

$$\begin{aligned} P(J_n \cap U) &= P(J_n \cap U \cap "A_{n-2} \text{ joue et gagne sa 1}^{\text{ère}} \text{ manche}") \\ &= P(A_{n-2} \text{ joue}) \underbrace{P(J_n \cap U \cap "A_{n-2} \text{ gagne sa 1}^{\text{ère}} \text{ manche}"))_{="A_{n-2} \text{ gagne deux manches de suite}"}_{\frac{1}{4}} P("A_{n-2} \text{ joue}")_{p_{n-2}} \\ &= \frac{1}{4} p_{n-2} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$p_n = \frac{1}{2} p_{n-1} + \frac{1}{4} p_{n-2}$$

- Calcul de p_n :

On a une suite récurrente linéaire définie pour $n \geq 4$ que l'on sait résoudre grâce à l'équation caractéristique $4r^2 - 2r^2 - 1 = 0$. On obtient l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$p_n = \alpha(1 - \sqrt{5})^n + \beta(1 + \sqrt{5})^n \quad \boxed{\forall n \geq 2}$$

Or, les joueurs A_2 et A_3 jouent forcément, d'où $p_2 = p_3 = 1$. En réinjectant ces résultats dans la valeur de p_n obtenue ci-dessus, on obtient

$$\alpha = \frac{1}{2(1 - \sqrt{5})^2} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2(1 + \sqrt{5})^2}$$

et on en déduit que

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2} ((1 - \sqrt{5})^{n-2} + (1 + \sqrt{5})^{n-2}) & \text{si } n \geq 2 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

- Calcul de q_n :

On a

$$q_n = \underbrace{P(A_n \text{ joue})}_{=\frac{1}{8} \text{ d'après 1}} \underbrace{P(A_n \text{ gagne le jeu})}_{p_n}$$

D'où

$$q_n = \begin{cases} \frac{1}{16} ((1 - \sqrt{5})^{n-2} + (1 + \sqrt{5})^{n-2}) & \text{si } n \geq 2 \\ \frac{1}{8} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$