

Endomorphismes d'un espace euclidien

Feuille d'exercices #14

⊗ Partie A – Isométries vectorielles

★ **Exercice 1** — Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace F défini par les équations $x - y + z = 0$, $x + y + 2z = 0$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.

★ **Exercice 2** — On considère un espace euclidien orienté E de dimension 2.

1. Que peut-on dire de la composée de deux rotations? de deux réflexions?
2. Que peut-on dire de la composée d'une rotation et d'une réflexion?
3. Montrer que toute rotation s'écrit comme la composée de deux réflexions.
4. Montrer que ce dernier résultat se généralise en dimension 3.

★ **Exercice 3** — Déterminer la nature géométrique des endomorphismes dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$A = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} -11 & 9 & 3\sqrt{6} \\ 9 & 13 & -\sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} & -\sqrt{6} & 14 \end{bmatrix} \quad C = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

★ **Exercice 4** — Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe orienté par $i + j + k$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

★★ **Exercice 5** — Soient E un espace euclidien et u un vecteur unitaire de E . Pour α réel, on définit φ_α sur E par $\varphi_\alpha(x) = x + \alpha \langle x | u \rangle u$.

1. Vérifier que $\varphi_\alpha \in \mathcal{S}(E)$ puis déterminer ses éléments propres.
2. Peut-on avoir φ_α orthogonal? Caractériser alors géométriquement φ_α .

★★ **Exercice 6** — Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $f(x) = u \wedge x$ où $x \in E$ et $u \in \mathbb{R}^3$ est non nul.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et déterminer $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$.
2. Préciser sa matrice dans une base adaptée.
3. Montrer que $\text{id}_E + f$ est une bijection et déterminer $(\text{id}_E + f)^{-1}$.
4. Montrer que $g = (\text{id}_E - f) \circ (\text{id}_E + f)^{-1}$ est une rotation et préciser ses caractéristiques géométriques.

★★ **Exercice 7** — Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ab - c & ac + b \\ ab + c & b^2 & bc - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{bmatrix}$$

On supposera que le vecteur $u(a, b, c)$ est unitaire.

1. Décomposer f sous la forme $p + g$ où p est la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par u et g une application à préciser.
2. En déduire la nature de f .

★★ **Exercice 8** — Soient E un espace vectoriel euclidien, $u \in E$ non nul et $\varphi \in \text{O}(E)$. On note σ la réflexion par rapport à l'hyperplan $\text{Vect}(u)^\perp$.

1. Montrer que $\varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$ est une réflexion et préciser ses caractéristiques géométriques.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante φ et σ commutent-elles?
3. Trouver $\psi \in \text{O}(E)$ vérifiant pour tout $\varphi \in \text{O}(E)$, $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$.

★★ **Exercice 9** — Soit E un espace euclidien de dimension $N \geq 2$ et $f \in \text{O}(E)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

1. Vérifier que $E = \text{Im}(f - \text{id}_E) \oplus^\perp \text{Ker}(f - \text{id}_E)$.
2. En déduire la nature de l'endomorphisme $g = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$.
3. Généraliser le résultat précédent pour $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|f\|_{\text{op}} \leq 1$.

★★ **Exercice 10** — Soient x et y deux vecteurs d'un espace euclidien E tels que $x \neq y$ et $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant x et y .

⊗ Partie B – Adjoint, endomorphismes autoadjoints

★★ Exercice 11 — Méli-mélo

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $u^* \circ u \in \mathcal{S}^+(E)$ puis que $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u^* \circ u) = \text{Im}(u^*)$. Que dire de $\text{rg}(u^* \circ u)$?
2. Soit $(u, v) \in \mathcal{S}(E)^2$. Montrer que $u \circ v \in \mathcal{S}(E)$ si et seulement $u \circ v = v \circ u$.
3. Soit $(u, v) \in \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}^{++}(E)$. Montrer qu'il existe $w \in \mathcal{S}^{++}(E)$ tel que $v = w^2$. En déduire que $v^{-1} \circ u$ est diagonalisable.

★★ Exercice 12 — On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scal. défini par $\langle X|Y \rangle = \text{Tr}(X^\top Y)$.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(X) = AX$. Déterminer l'adjoint de φ .
2. Donner une CNS sur A pour que φ soit une isométrie.

★★ Exercice 13 — Opérateur de Volterra

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

On considère l'application T définie sur E par $T(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$ pour $x \in [0, 1]$.

1. Déterminer l'adjoint de T puis calculer, pour tout $f \in E$, $(T(f))'$ et $(T^*(f))'$.
2. Quels sont les éléments propres de $T^* \circ T$?

★ Exercice 14 — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(u + u^*) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(u^*) = \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)^\perp$.
2. Justifier l'équivalence : $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u) \iff u + u^* \in \text{GL}(E)$.

★★ Exercice 15 — Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^{2025} = B^{2025}$.

Montrer que $A = B$.

★★★ Exercice 16 — Matrices symétriques et topologie

Montrer les propriétés suivantes.

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un ouvert relatif de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

★ Exercice 17 — Quelles sont les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AA^\top A = I_n$?

★ Exercice 18 — Endomorphismes antisymétriques

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E vérifiant :

$$\forall x \in E, \quad \langle f(x)|x \rangle = 0$$

1. Montrer que f est antisymétrique, i.e. $f^* = -f$.
2. Que dire de la matrice représentative de f dans une base orthonormale ?
3. Déterminer le spectre de f . À quelle condition f est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$. En déduire la matrice de f dans une base orthonormale adaptée à $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

★ Exercice 19 — Soient $E = \mathbb{R}^3$ et u un vecteur non nul. Montrer que l'endomorphisme $x \mapsto u \wedge (u \wedge x)$ est autoadjoint. Déterminer ses éléments propres.

★ Exercice 20 — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Montrer que u et u^* ont les mêmes sous-espaces propres.
2. Montrer que ces sous-espaces sont deux à deux orthogonaux.

★★★ Exercice 21 — Soit $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \circ u^* \circ u = u\}$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- | | |
|---|--|
| (i) $u \in \mathcal{A}$ | (ii) $u \circ u^*$ est un proj. orthogonal |
| (iii) $u^* \circ u$ est un proj. orthogonal | (iv) $\text{Ker}(u)^\perp = \{x \in E \mid \ u(x)\ = \ x\ \}$ |

★★ Exercice 22 — Quotient de Rayleigh

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ où E est euclidien.

1. Montrer que l'application $x \mapsto \frac{\langle u(x)|x \rangle}{\|x\|^2}$ atteint sur $E \setminus \{0\}$ un minimum et un maximum que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de u .
2. Pour quels vecteurs x le minimum et le maximum sont-ils atteints ?
3. Application – Déterminer :

$$\max \left\{ \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$$

★★ **Exercice 23** — Soient E un espace euclidien, A un endomorphisme symétrique défini positif et B un endomorphisme symétrique. On pose :

$$\forall x, y \in E, \quad \langle x|y \rangle_A = \langle A^{-1}x|y \rangle$$

1. Montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ est un produit scalaire.
2. Montrer que AB est diagonalisable.
3. Si M est un endomorphisme diagonalisable de E , on note $\lambda_{\min}(M)$ sa plus petite et $\lambda_{\max}(M)$ sa plus grande valeurs propres. Soit φ définie par :

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, \quad \varphi(x) = \frac{\langle Bx|x \rangle}{\langle A^{-1}x|x \rangle}$$

Montrer que l'image de $E \setminus \{0\}$ par φ est le segment $[\lambda_{\min}(AB), \lambda_{\max}(AB)]$.

4. Montrer que $\lambda_{\min}(A)\lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\min}(AB) \leq \lambda_{\max}(AB) \leq \lambda_{\max}(A)\lambda_{\max}(B)$.

★★ **Exercice 24** — Soient $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien et u un endomorphisme défini par $u(x) = \langle b|x \rangle a + \langle a|x \rangle b$, où (a, b) une famille libre de vecteurs unitaires.

1. Montrer que $u \in \mathcal{S}(E)$ et déterminer ses éléments propres.
2. Calculer $\sup_{\|x\|=1} \{|\langle a|x \rangle \langle b|x \rangle|\}$.

★ **Exercice 25** — Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer que $\langle X|Y \rangle = X^T A Y$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

★★ **Exercice 26** — *Ordre de Löwner*

Si $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, A est dite Löwner-supérieure à B lorsque $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On notera alors $A \succcurlyeq B$.

1. Montrer que $\succcurlyeq$ définit une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A \succcurlyeq I_n$, alors A est inversible et $I_n \succcurlyeq A^{-1}$.
3. Prouver que si $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $A \succcurlyeq B$, alors $\det(A) \geq \det(B)$.

★★ **Exercice 27** — Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{Tr}(A\Omega) \leq \text{Tr}(A)$.

★★ **Exercice 28** — Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(S)^{1/n} \leq \frac{\text{Tr}(S)}{n}$.

★★ **Exercice 29** — Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $t \in]0, 1[$,

$$(\det(A))^t (\det(B))^{1-t} \leq \det(tA + (1-t)B)$$

★★ **Exercice 30** — *Réduction simultanée*

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^T P$.
2. Soit $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle $A = P^T P$ et $B = P^T D P$.
3. En déduire que le polynôme $\det(B - XA)$ est scindé.

★★ **Exercice 31** — Soit E un espace euclidien.

1. Soient u un endomorphisme autoadjoint positif et $x \in E$. Montrer que $\langle u(x), x \rangle = 0$ si et seulement si $x \in \text{Ker}(u)$.
2. Soient a et b deux endomorphismes autoadjoints positifs.
 - a) Montrer qu'il existe h autoadjoint positif tel que $h^2 = a$.
 - b) On pose $f = a \circ b$ et $g = h \circ b \circ h$. Montrer que g est diagonalisable.
 - c) En remarquant que $f = h \circ (h \circ b)$, comparer les valeurs propres et les dimensions des sous-espaces propres de f et g . Qu'en conclure?

★★ **Exercice 32** — *Racine carrée et décomposition polaire*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont strictement positives.

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
 - a) Établir l'existence de $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = R^2$.
 - b) Justifier l'unicité de la matrice R .
2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.
 - a) Montrer que $M^T M$ admet une unique racine carrée, notée R .
 - b) Montrer que $R \in GL_n(\mathbb{R})$ puis que $MR^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
 - c) Justifier l'existence de $(\Omega, R) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = \Omega R$.
Y a-t-il unicité de la décomposition?
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Établir l'existence d'une décomposition polaire de M .

★★ **Exercice 33** — *Décomposition en valeurs singulières*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P, Q \in O_n(\mathbb{R})$ telles que PAQ soit diagonale à coefficients positifs.