

Définition de la dérivée

	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
$\frac{1}{u(x)}$	$u(x) \neq 0$	$u(x) \neq 0$
$\sqrt{u(x)}$	$u(x) \geq 0$	$u(x) > 0$
Autres cas de figure	\mathbb{R}	\mathbb{R}

(pour les élèves de 1ères)

Fonction dérivée des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	nx^{n-1}

$n \in \mathbb{Z}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les fonctions

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$u + v$	$u' + v'$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
ku	ku'	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
uv	$u'v + uv'$		

$k \in \mathbb{R}$

fonctions dérivables

Cas particulier : fonction composée

$f(x)$	$f'(x)$
$g(ax + b)$	$a \times g'(ax + b)$

Relation entre signe de la dérivée et variation de la fonction :

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow f(x_1) \searrow$		

Rappel équation de la Tangente :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

EXERCICE 1 : (7 points)

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f , l'ensemble de dérivabilité, puis calculer $f'(x)$ sur son ensemble de dérivabilité.

1. $f(x) = (2x - 3) \times \sqrt{x}$

2. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 8}$

3. $f(x) = \frac{-3x + 1}{x^2 - 2}$

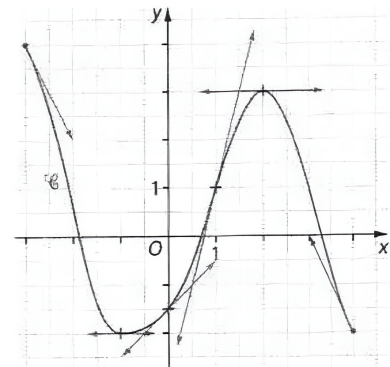
EXERCICE 2 : (5,5 points)

Soit la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3; 4]$ représentée par la courbe \mathcal{C} ci-contre.

Sur cette courbe sont également représentées les tangentes aux points d'abscisses $-3; -1; 0; 1; 2; 4$.

1. Déterminer par lecture graphique $f'(-1)$, $f'(2)$ et $f'(1)$.
2. Résoudre, en justifiant, dans $[-3; 4]$ les inéquations suivantes :

a) $f(x) > 0$ b) $f'(x) > 0$ c) $f'(x) = 0$



EXERCICE 3 : (7,5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par $f(x) = \frac{-x^2 + 4x - 7}{3 - x}$ et \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a : $f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(3 - x)^2}$.
2. a) Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.
b) La fonction f présente-t-elle des extrema locaux ? Si oui, lesquels.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse 2.

Exercice 1 (3 points) :

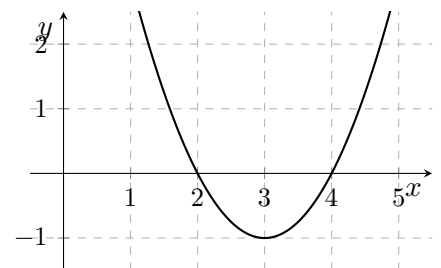
Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{4x + 7}{x^2 + 2}$.

- Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[-5; 1]$.
- Quel est le minimum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint?
- Quel est le maximum de f sur $[-5; 1]$? Pour quelle valeur est-il atteint?

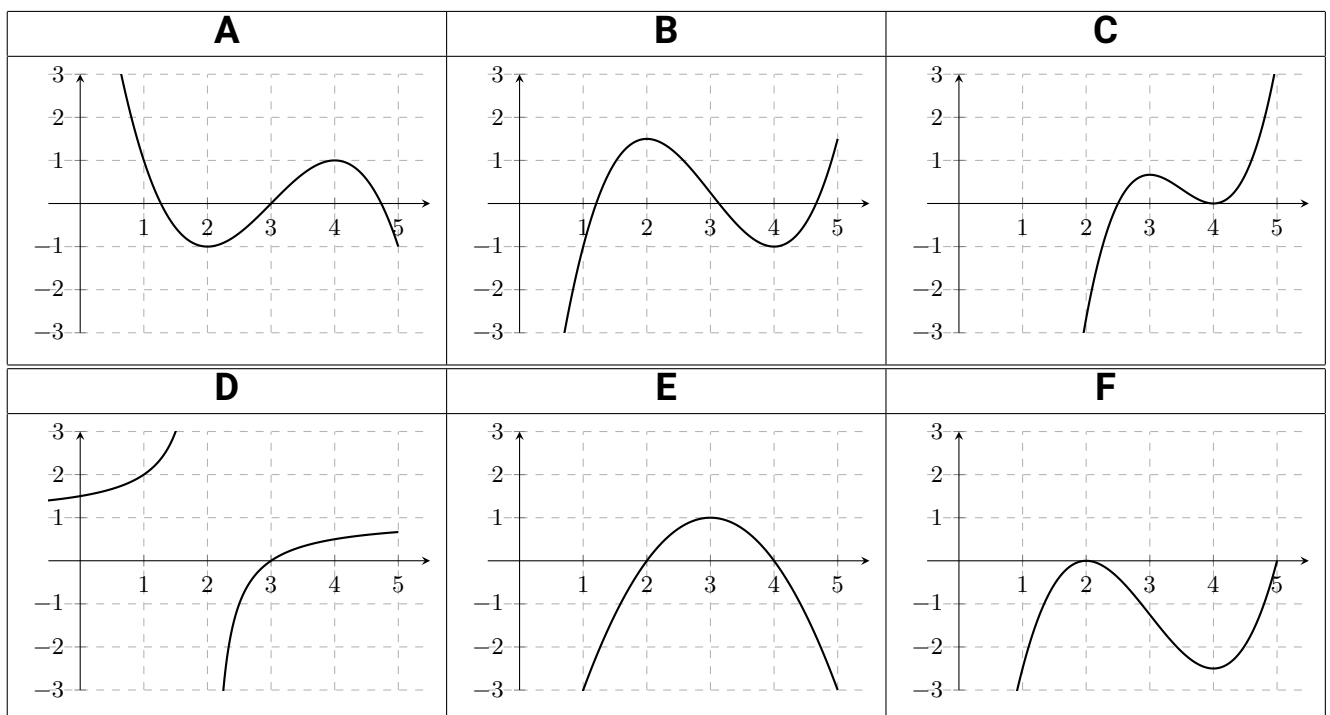
Exercice 2 (1,5 points) :

(Aucune justification n'est demandée).

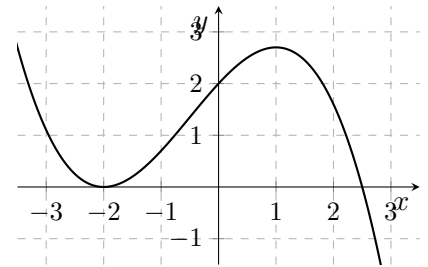
1- On a ci-contre la représentation graphique de la fonction f' :



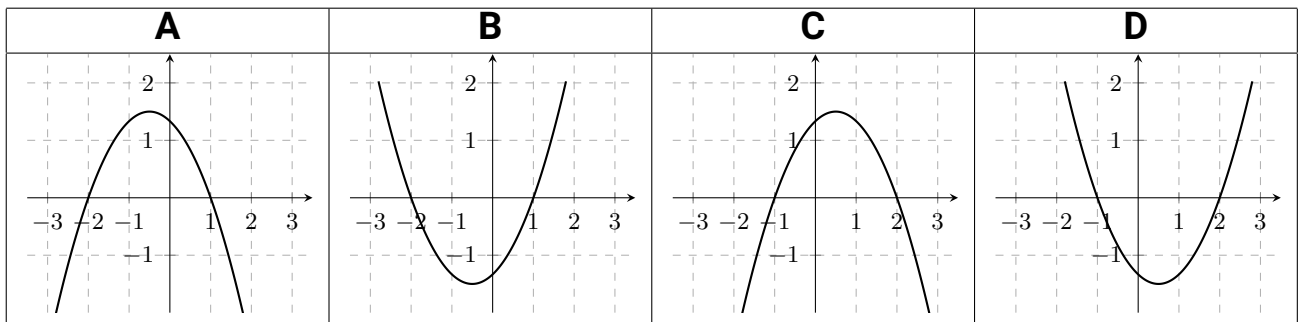
Parmi les courbes suivantes, laquelle ou lesquelles pourraient représenter la fonction f ?



2- On a ci-contre la représentation graphique de la fonction g :



Parmi les courbes suivantes, laquelle ou lesquelles pourraient représenter la fonction g' ?

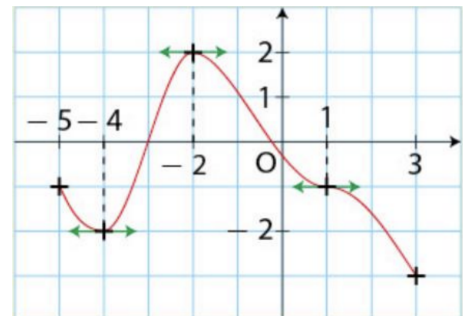


Exercice 3 (3,5 points) :

Soit la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-5; 3]$ telle que $f(-0, 25) = 0$.

Dans chaque cas dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Si c'est faux, expliquer pourquoi et corriger.

1. Sur $[-5; 3]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions.
2. $f'(-3, 5) < f'(-1)$
3. Sur $[-5; 3]$, la fonction f admet 2 extremums locaux.
4. Sur $[-5; 3]$, l'inéquation $f'(x) \geq 0$ admet pour ensemble de solutions $[-3; -0, 25]$.



Exercice 4 (5 points) :

- a- Déterminer la fonction dérivée de la fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = (2x^3 - 2x^2 - 5x)(x^2 - 1)$.
- b- Déterminer la fonction dérivée de la fonction i définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ par $i(x) = \frac{4x^3 - 3x - 1}{2x - 1}$.
- c- Déterminer la fonction dérivée de la fonction j définie sur \mathbb{R} par $j(x) = \frac{1}{2x^2 + 1}$.
- d- Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x^4 \sqrt{x}$. Simplifier l'écriture au maximum.

Exercice 5 (5 points) :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2; 3]$ par $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 15$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la dérivée de f .
2. Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse 1.
3. On s'intéresse à la position de la courbe \mathcal{C} par rapport à la tangente T . On considère la fonction g définie sur $[-2; 3]$ par $g(x) = f(x) - (12x + 16)$. Étudier le sens de variation de g sur $[-2; 3]$.
4.
 - a. Calculer $g(-0,5)$.
 - b. En déduire le signe de g sur $[-2; 3]$.
 - c. Déterminer la position de T par rapport à \mathcal{C} sur $[-2; 3]$.

Exercice 6 (2 points) :

Je suis une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - ax^2 + b$ avec a et b deux nombres réels. J'admets un minimum local égal à 5, atteint pour $x = 2$. Qui suis-je ?

Exercice 1 (4 points)

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes, en justifiant pour les fonctions g et h . On ne justifiera pas qu'elles sont dérivables sur l'ensemble I .

- f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$ définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$;
- g définie par $g(x) = x^2(6x - 7)$ définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$;
- h définie par $h(x) = \frac{2x - 4}{x^2 + 1}$ définie et dérivable sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{10x - 20}{x^2 - 4x + 5}$.

On note \mathcal{C}_f la représentation graphique de cette fonction.

1. Justifier que cette fonction est définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier les variations de cette fonction et présenter les résultats sous forme d'un tableau.
3. Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0.

Exercice 3 (5 points)

Pour ranger ses petits fours, un pâtissier veut faire fabriquer une boîte dans une plaque de carton rectangulaire de dimensions 25 cm sur 15 cm en découpant un carré dans chaque coin. On note x la mesure des côtés des carrés.

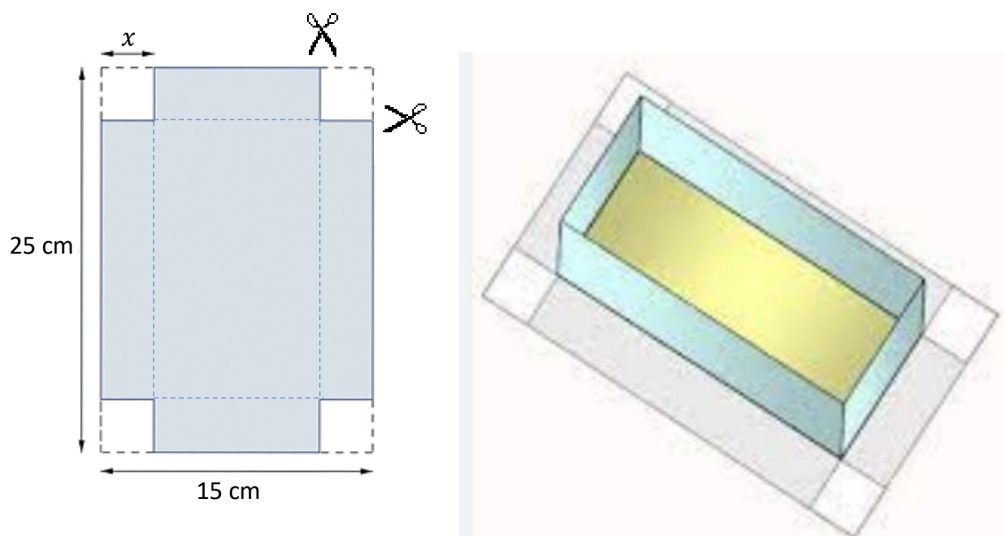


FIGURE 1 : Patron de la boîte et boîte assemblée.

Le pâtissier souhaite obtenir une boîte ayant le volume le plus grand possible.

1. Déterminer l'intervalle dans lequel varie x .
2. Montrer que le volume de la boîte est égal à $v(x) = 4x^3 - 80x^2 + 375x$.
3. Déterminer le volume maximal de la boîte, arrondi au cm^3 près.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 1$. Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Pour tout réel a , T_a désigne la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer les abscisses des points de \mathcal{C}_f où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -24x$.
3. On cherche toutes les tangentes à \mathcal{C}_f qui passent par l'origine O du repère.
 - a. Montrer que pour tout réel a , $(a + 1)(2a^2 + a - 1) = 2a^3 + 3a^2 - 1$.
 - b. Montrer que « T_a passe par O » est équivalent à « a est solution de l'équation $f(a) = a \times f'(a)$ ».
 - c. Résoudre cette équation d'inconnue a et répondre au problème posé.