

# Mathématiques

## Corrigé du DS n°5

### Exercice 1.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $D = ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  par

$$\forall x \in D, \quad f(x) = \frac{x}{\ln(x)},$$

ainsi que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{\ln(u_n)}.$$

1. On a :

— On sait que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

donc par quotient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

— On sait que par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

donc par passage à l'inverse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

— On sait que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = 0^-$$

donc par quotient

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty.$$

— On sait que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+$$

donc par quotient

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

2. Pour tout  $x \in D$ , les fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \ln(x)$  sont dérivables sur  $D$ . De plus,  $\ln(x) \neq 0$  donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $D$ .

La fonction  $f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u(x) = x$  et  $v(x) = \ln(x)$ . On a :

$$u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = \frac{1}{x}.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Or  $(\ln(x))^2 > 0$  pour  $x \in D$ , donc  $f'(x)$  est du signe de  $\ln(x) - 1$ .

3. (a) Étudions le signe de  $\ln(x) - 1$ . On a pour  $x \in D$  :

$$\ln(x) - 1 > 0 \iff \ln(x) > 1 \iff x > e.$$

$f$  est décroissante sur  $]0, 1]$ , admet une asymptote verticale en  $x = 1$ , est décroissante sur  $]1, e]$  et croissante sur  $[e, +\infty[$ . On a :

$$f(e) = \frac{e}{\ln(e)} = \frac{e}{1} = e.$$

(b) D'après ce qui précède, la fonction  $f$  est strictement croissante de  $[e, +\infty[$  dans  $[e, +\infty[$ . De plus,  $f$  étant dérivable sur  $D$ , elle est en particulier continue sur  $[e, +\infty[$ . Ainsi, d'après le théorème de la bijection monotone,  $f$  réalise une bijection de  $[e, +\infty[$  dans  $[e, +\infty[$ .

4. (a) Soit  $x \in D$ , on a :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{\ln(x)} = x \iff \frac{1}{\ln(x)} = 1 \quad (\text{car } x \neq 0)$$

Ainsi :

$$f(x) = x \iff \ln(x) = 1 \iff x = e.$$

Donc l'ensemble des solutions est :

$$S = \{e\}.$$

(b) On cherche le signe de  $f(x) - x$  :

$$f(x) - x > 0 \iff \frac{x}{\ln(x)} - x > 0 \iff \frac{x(1 - \ln(x))}{\ln(x)} > 0.$$

Dressons alors le tableau de signes de ce quotient :

| $x$          | 0 | 1 | $e$ | $+\infty$ |
|--------------|---|---|-----|-----------|
| $1 - \ln(x)$ |   | + | +   | -         |
| $\ln(x)$     | - | - | +   | +         |
| $f(x) - x$   | - | - | +   | -         |

5. (a) Raisonnons par récurrence pour  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $P(n)$  la proposition : " $u_n > e$ "

**Initialisation** :  $n = 0$ ,  $u_0 = 3 > e$  donc  $P(0)$  est vérifiée.

**Hérédité** : Supposons  $P(n)$  vraie pour un  $n \in \mathbb{N}$  fixé. Montrons que  $P(n+1)$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence,  $u_n > e$ . Or  $f$  est strictement croissante sur  $[e, +\infty[$ , donc

$$f(u_n) > f(e).$$

Or  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(e) = e$ , donc

$$u_{n+1} > e.$$

La propriété  $P(n+1)$  est donc vraie.

**Conclusion** : La propriété étant initialisée et héréditaire,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(b) Étudions le signe de  $u_{n+1} - u_n$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Or  $f(x) - x \leq 0$  pour  $x > e$  et on a montré que  $u_n > e$  pour tout  $n$ . Donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

Ainsi, la suite  $(u_n)_n$  est décroissante.

(c) D'après les questions précédentes,  $(u_n)_n$  est décroissante et minorée par  $e$ . Par le théorème de convergence monotone, la suite  $(u_n)_n$  converge vers une limite  $\ell$  vérifiant  $\ell \geq e$ .

Montrons que  $\ell = e$ . On sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$

De plus,  $f$  est continue sur  $D$ , donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Or  $u_{n+1} = f(u_n)$ , donc

$$\ell = f(\ell).$$

D'après la question 4.(a), l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $x = e$ . Ainsi

$$\ell = e.$$

6. (a) D'après la question 2, pour  $x \in D$  :

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}.$$

Calculons maintenant  $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2$  et montrons que cela est égal à  $f'(x)$ . Pour  $x \in [e, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 &= \frac{1}{4} \left[1 - \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{\ln(x) - 2}{\ln(x)}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{4} \left[1 - \frac{(\ln(x) - 2)^2}{(\ln(x))^2}\right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(\ln(x))^2 - (\ln(x) - 2)^2}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4\ln(x) - 4}{(\ln(x))^2} \\ &= \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} \\ &= f'(x). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

(b) Pour  $x \in [e, +\infty[$ ,  $f'(x) > 0$ , donc

$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2.$$

Or

$$-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{\ln(x)}\right)^2 \leq 0,$$

donc

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4} \quad \text{pour } x \in [e, +\infty[.$$

7. (a) La fonction  $f$  est continue et dérivable sur  $[e, +\infty[$  et on a pour tout  $x \in [e, +\infty[$  :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

De plus, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [e, +\infty[$ . Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|.$$

Or  $u_{n+1} = f(u_n)$  et  $f(e) = e$ , donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|.$$

(b) Montrons le résultat par récurrence. Notons  $P(n)$  la propriété : " $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ ".

**Initialisation** :  $u_0 = 3$  donc  $|u_0 - e| = 3 - e \simeq 0.3$ . Or

$$\frac{1}{4^0} = 1,$$

donc

$$|u_0 - e| \leq \frac{1}{4^0}.$$

Ainsi  $P(0)$  est vraie.

**Hérédité** : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $P(n)$  vraie et montrons que  $P(n+1)$  est vraie. D'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} |u_n - e|.$$

Or par hypothèse de récurrence :

$$|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

Donc :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}.$$

La propriété  $P(n+1)$  est donc vraie.

**Conclusion :** La propriété étant initialisée et héréditaire, par principe de récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

(c) Remarquons que

$$\frac{1}{4^n} = \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Comme  $\frac{1}{4} \in ]-1, 1[$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0.$$

Or on a :

$$0 \leq |u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}.$$

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - e| = 0.$$

Ce qui permet de conclure que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

## Exercice 2.

On considère les matrices carrées d'ordre trois :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

### Partie I : Réduction de A

1.  $A$  est une matrice triangulaire supérieure possédant un coefficient diagonal nul donc

*Conclusion :*  $A$  n'est pas inversible.

2.  $P$  est une matrice triangulaire avec des coefficients diagonaux non nuls donc

*Conclusion :*  $P$  est inversible.

Soient  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$  tels que

$$PX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_2 + x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

On obtient donc  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. On calcule  $PDP^{-1}$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

### Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation  $(*) : M^2 = A$ , d'inconnue  $M$ , matrice carrée d'ordre trois.

Soit  $M$  une matrice carrée d'ordre trois. On note  $N = P^{-1}MP$ . (La matrice  $P$  a été définie en **I.3.**)

1. Avec  $A = PDP^{-1}$  et  $M = PNP^{-1}$ , on a  $M^2 = PNP^{-1}PNP^{-1}$ . Ainsi

$$M^2 = A \iff PNP^{-1}PNP^{-1} = PDP^{-1} \iff N^2 = D \quad \text{en multipliant à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P$$

2. Si  $N^2 = D$ , alors  $N D = N N^2 = N^3 = N^2 N = D N$ .

Conclusion :  $\boxed{\text{Si } N^2 = D, \text{ alors } N D = D N.}$

3. On développe l'écriture de  $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ .

On ne calcule pas  $N^2$  (les calculs seraient ici longs et fastidieux) : on commence par exploiter la question précédente.

$$N D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$$

$$D N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } N^2 = D, \text{ alors } N D = D N \text{ donc } \begin{cases} 0 = 0 & b = 0 & 4c = 0 \\ 0 = d & e = e & 4f = f \\ 0 = 4g & h = 4h & 4i = 4i \end{cases} \text{ et } \begin{cases} d = 0 & b = 0 & c = 0 \\ g = 0 & h = 0 & f = 0 \end{cases}$$

Conclusion :  $\boxed{\text{Si } N^2 = D, \text{ alors } N \text{ est diagonale.}}$

4. Soit  $N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$ , on a  $N^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$ , donc

$$N^2 = D \iff \begin{cases} x^2 = 0 \\ y^2 = 1 \\ z^2 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 2 \end{cases}$$

Les 4 solutions sont  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

5. Si  $B$  est solution de (1) alors d'après les questions précédentes,  $N = P^{-1}BP$  est égale à l'une des quatre matrices de la question précédente. Or on veut que tous les coefficients diagonaux de  $N$  soient positifs ou nuls donc

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } B = P N P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

### Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Un polynôme de degré 2 s'écrit :  $Q(X) = aX^2 + bX + c$  avec  $a, b$  et  $c$  réels,  $a \neq 0$ .

$$\begin{cases} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \end{cases} \quad L_3 - 4L_2 \rightarrow L_3$$

$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 12a = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 7/6 \\ a = -1/6 \end{cases} \quad \text{et } a \neq 0$$

Conclusion :  $\boxed{\text{Cet unique polynôme de degré 2 est : } Q(X) = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X}$

2. Comme  $A = PDP^{-1}$ , on a  $A^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ . On obtient

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = -\frac{1}{6}PD^2P^{-1} + \frac{7}{6}PDP^{-1} = P \left( -\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D \right) P^{-1}$$

$$\text{On calcule } -\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} + \frac{7}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On retrouve donc la matrice  $B$  définie en **II.5**.

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = P \left( -\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D \right) P^{-1} = B$$

Conclusion :  $\boxed{-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B}$

3. Pour toute matrice carrée  $F$  d'ordre trois :

- Si  $A F = F A$ , alors  $A^2 F = A F A = F A A = F A^2$  et  $\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right) F = F \left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)$ , donc  $B F = F B$ .
- Réciproquement, si  $B F = F B$ , alors  $B^2 F = B F B = F B B = F B^2$  et comme  $B^2 = A$ , on a donc  $A F = F A$ .

Conclusion :  $\boxed{A F = F A \iff B F = F B.}$

### Exercice 3.

#### Introduction : quelques exemples

1. On a

$${}^t M M = {}^t M M = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2$$

Conclusion : la matrice  $M$  est bien orthogonale.

2. Pour tout entier  $n \geq 2$ , la matrice  $I_n$  vérifie

$${}^t I_n I_n = I_n {}^t I_n = I_n$$

donc elle est orthogonale.

#### Partie I : le cas particulier $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

1. Par définition,  ${}^t M M = I_2$ , donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = I_2$$

Par identification des coefficients :  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$  et  $ac + bd = 0$ .

De même,  $M {}^t M = I_2$  donne

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + c^2 & ab + cd \\ ab + cd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = I_2$$

donc  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$  et  $ab + cd = 0$ .

2. Si  $a = 0$ , alors  $b^2 = c^2 = 1$ , donc  $b \in \{-1, 1\}$  et  $c \in \{-1, 1\}$ . De même,  $d^2 + b^2 = 1$  donne  $d = 0$ . On obtient donc quatre matrices possibles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces quatre matrices sont orthogonales.

3. (a) La fonction  $\cos$  est continue sur  $[0, \pi]$  et strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ . D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $\cos([0, \pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$ .

(b) Si  $a \neq 0$ , l'équation  $a^2 + c^2 = 1$  impose  $a^2 \leq 1$  et  $c^2 \leq 1$ , donc  $a \in [-1, 1]$ . D'après la question précédente, il existe donc  $\alpha \in [0, \pi]$  unique telle que

$$a = \cos(\alpha).$$

Comme  $\cos(\pi/2) = 0 \neq a$ , on a  $\alpha \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$ .

(c) De même,  $c \in [-1, 1]$  et  $a^2 + c^2 = 1$  donne

$$c^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha).$$

Comme  $\alpha \in [0, \pi] \setminus \{\pi/2\}$ , on a  $\sin(\alpha) \geq 0$ . Ainsi, si  $c \geq 0$ , on prend  $c = \sin(\alpha)$ .

On définit alors  $\theta = \alpha$ . On obtient  $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$  et

$$a = \cos(\theta), \quad c = \sin(\theta).$$

Si  $c < 0$ , alors  $c = -\sin(\alpha) = \sin(-\alpha + 2\pi)$ . Comme  $a = \cos(\alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(-\alpha + 2\pi)$ , on peut poser  $\theta = 2\pi - \alpha$ . On a alors également  $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$  et

$$a = \cos(\theta), \quad c = \sin(\theta).$$

(d) Les relations  $a^2 + b^2 = 1$  et  $c^2 + d^2 = 1$  impliquent

$$b^2 = \sin^2(\theta), \quad d^2 = \cos^2(\theta),$$

donc il existe  $\gamma, \beta \in \{-1, 1\}$  tels que

$$b = \gamma \sin(\theta), \quad d = \beta \cos(\theta).$$

Enfin,  $ac + bd = 0$  donne

$$\cos(\theta) \sin(\theta) + \gamma\beta \cos(\theta) \sin(\theta) = (1 + \gamma\beta) \cos(\theta) \sin(\theta),$$

ce qui impose  $\gamma = -\beta$ . Finalement, il existe  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$  tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

4. On calcule :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} {}^t \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\varepsilon \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \varepsilon^2 \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta) - \varepsilon^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \sin(\theta) - \varepsilon^2 \cos(\theta) \sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \varepsilon^2 \cos^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

car  $\varepsilon^2 = 1$  et  $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ .

On vérifie de même que

$${}^t \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} = I_2.$$

On en conclut que

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\varepsilon \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \varepsilon \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}).$$

## Partie II : généralités sur les matrices orthogonales

1. (a) Soit  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Par définition,

$$A {}^t A = I_n.$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = {}^t A$ . En utilisant les propriétés de la transposée :

$$({}^t A)^{-1} = (A^{-1})^t = ({}^t A)^{-1}, \quad {}^t (A^{-1})^t ({}^t A)^{-1} = I_n.$$

On en déduit que  $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

De même,

$${}^t ({}^t A) {}^t ({}^t A) = {}^t A A = I_n$$

et donc  ${}^t A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

(b) Soient  $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ . Alors

$${}^t (AB) (AB) = {}^t B {}^t A A B = {}^t B B = I_n,$$

et

$$(AB)^t (AB) = AB {}^t B {}^t A = A I_n {}^t A = I_n.$$

On conclut que  $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ .

2. (a) Soit  $X = 0_{n,1}$ . Alors

$$\|X\| = \sqrt{0} = 0.$$

Réciproquement, si  $\|X\| = 0$ , on a

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0,$$

or une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Donc  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , c'est-à-dire  $X = 0_{n,1}$ .

(b) i. Par définition du produit matriciel,

$${}^t X X \in M_{1,1}(\mathbb{R}).$$

ii. On a

$${}^tXX = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \|X\|^2.$$

(c) D'après la question précédente avec  ${}^tAA = I_n$ ,

$$\|AX\|^2 = {}^t(AX)(AX) = {}^tX {}^tAAX = {}^tXX = \|X\|^2.$$

Comme les deux termes sont positifs, on en déduit que

$$\|AX\| = \|X\|.$$

3. (a) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . D'une part, puisque  $A {}^tA = I_n$ , on a

$$[A {}^tA]_{i,i} = 1.$$

D'autre part, par définition du produit matriciel :

$$[A {}^tA]_{i,i} = \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [{}^tA]_{k,i} = \sum_{k=1}^n [A]_{i,k} [A]_{i,k} = \sum_{k=1}^n [A]_{i,k}^2.$$

Conclusion : pour tout  $i \in [1, n]$ ,

$$\sum_{k=1}^n [A]_{i,k}^2 = 1.$$

(b) Soient  $(i, j) \in [1, n]^2$ . D'après ce qui précède :

$$[A]_{i,j}^2 = 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n [A]_{i,k}^2 \leq 1,$$

car les termes sont positifs. Conclusion : pour tout  $(i, j) \in [1, n]^2$ ,

$$|[A]_{i,j}| \leq 1.$$

4. (a) Un exemple de matrice dans  $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Soit  $M \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$  et  $(i, j) \in [1, n]^2$ . Alors

$$[M {}^tM]_{i,j} = \sum_{k=1}^n [M]_{i,k} [{}^tM]_{k,j} = \sum_{k=1}^n [M]_{i,k} [M]_{j,k}.$$

Or, dans chaque colonne  $k$ , il y a un seul terme non nul. Si l'on note  $\ell$  sa position, on a  $[M]_{\ell,k} \in \{-1, 1\}$  et  $[M]_{i,k} = 0$  si  $i \neq \ell$ .

— Si  $i \neq j$ , alors chaque produit  $[M]_{i,k} [M]_{j,k} = 0$  et donc  $[M {}^tM]_{i,j} = 0$ .

— Si  $i = j$ , un seul terme est non nul et

$$[M {}^tM]_{i,i} = \sum_{k=1}^n [M]_{i,k} [M]_{i,k} = 1.$$

Finalement :

$$[M {}^tM]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$M {}^tM = I_n.$$

Le calcul dans l'autre sens donne également  ${}^tMM = I_n$ . On en conclut que

$$M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

- (c) La question II.3. assure que si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$  à coefficients entiers, alors, puisque pour tous  $i$  et  $j$ ,

$$|[M]_{i,j}| \leq 1,$$

ses seuls coefficients possibles sont 0, 1 ou  $-1$ .

Par ailleurs, puisque

$$\sum_{k=1}^n [M]_{i,k}^2 = 1,$$

si un terme vaut 1 ou  $-1$ , les autres termes sont nécessairement nuls. Ainsi, sur chaque ligne, un seul terme est non nul et vaut 1 ou  $-1$ .

Le raisonnement sur les colonnes est le même (en utilisant l'autre produit) et finalement, une matrice orthogonale à coefficients entiers a nécessairement tous ses termes nuls, sauf un par ligne et par colonne, qui vaut 1 ou  $-1$ .

On en conclut :

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{Z}) = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}).$$