

TD M3 : Énergies

© Jean Lallemand

Lycée des Eucalyptus, Nice

27 janvier 2026

2.1 L'abscisse du mobile ¹ $x(t)$ est $x(t) = x_m \cos(2\pi ft) = x_m \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation.

Il est soumis à une force de frottement fluide du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est une constante positive.

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsrf.html

2.1 L'abscisse du mobile ¹ $x(t)$ est $x(t) = x_m \cos(2\pi ft) = x_m \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation.

Il est soumis à une force de frottement fluide du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est une constante positive.

La puissance instantanée de la force de frottement, est par définition :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.html

2.1 L'abscisse du mobile ¹ $x(t)$ est $x(t) = x_m \cos(2\pi ft) = x_m \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation.

Il est soumis à une force de frottement fluide du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est une constante positive.

La puissance instantanée de la force de frottement, est par définition :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = -\alpha \|\vec{v}\|^2 = -\alpha \dot{x}^2 = -\alpha x_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.html

2.1 L'abscisse du mobile ¹ $x(t)$ est $x(t) = x_m \cos(2\pi ft) = x_m \cos(\omega t)$ avec $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation.

Il est soumis à une force de frottement fluide du type $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ où α est une constante positive.

La puissance instantanée de la force de frottement, est par définition :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = -\alpha \|\vec{v}\|^2 = -\alpha \dot{x}^2 = -\alpha x_m^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$

On voit qu'elle dépend de t et on la note plus simplement $\mathcal{P}(t)$ comme dans l'énoncé.

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsrf.html

2.2 Par définition, le travail W de la force de frottement fluide durant une période T du mouvement est :

$$W = W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{F}) = \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \int_0^T -\alpha \dot{x}^2(t) dt$$

en notant M_1 le point où se trouve le mobile à $t = 0$.

2.2 Par définition, le travail W de la force de frottement fluide durant une période T du mouvement est :

$$W = W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{F}) = \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \int_0^T -\alpha \dot{x}^2(t) dt$$

en notant M_1 le point où se trouve le mobile à $t = 0$.

$$\Rightarrow W = -\alpha x_m^2 \omega^2 \times \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$$

2.2 Par définition, le travail W de la force de frottement fluide durant une période T du mouvement est :

$$W = W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{F}) = \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \int_0^T -\alpha \dot{x}^2(t) dt$$

en notant M_1 le point où se trouve le mobile à $t = 0$.

$$\Rightarrow W = -\alpha x_m^2 \omega^2 \times \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$$

$$\Rightarrow W = -\alpha x_m^2 \omega^2 \times \underbrace{\int_0^T \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) dt}_{T/2}$$

2.2 Par définition, le travail W de la force de frottement fluide durant une période T du mouvement est :

$$W = W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{F}) = \int_0^T \mathcal{P}(t) dt = \int_0^T -\alpha \dot{x}^2(t) dt$$

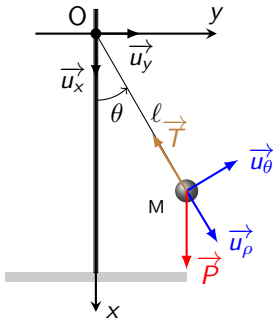
en notant M_1 le point où se trouve le mobile à $t = 0$.

$$\Rightarrow W = -\alpha x_m^2 \omega^2 \times \int_0^T \sin^2(\omega t) dt$$

$$\Rightarrow W = -\alpha x_m^2 \omega^2 \times \underbrace{\int_0^T \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) dt}_{T/2}$$

$$\Rightarrow W = -\alpha x_m^2 4\pi^2 f^2 \times \frac{T}{2} = -2\pi^2 \alpha x_m^2 f$$

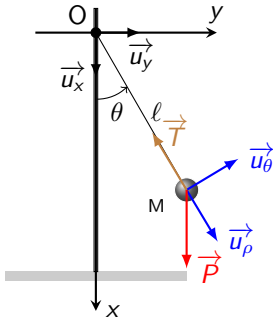
3.1



Le poids $\vec{P}$ du mobile et l'énergie potentielle associée E_p sont tels que :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow \begin{cases} mg = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

3.1



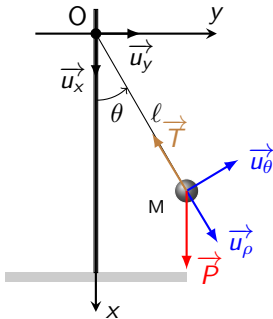
Le poids $\vec{P}$ du mobile et l'énergie potentielle associée E_p sont tels que :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow \begin{cases} mg = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

On en déduit que E_p ne dépend que de x avec

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg \Rightarrow E_p = -mgx + cst$$

3.1



Le poids $\vec{P}$ du mobile et l'énergie potentielle associée E_p sont tels que :

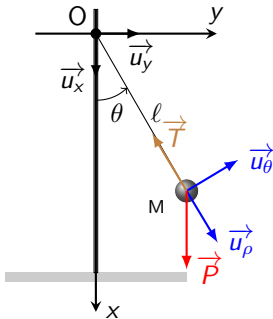
$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow \begin{cases} mg = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

On en déduit que E_p ne dépend que de x avec

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg \Rightarrow E_p = -mgx + cst$$

On choisit $E_p(x=0) = 0$, alors

3.1



Le poids $\vec{P}$ du mobile et l'énergie potentielle associée E_p sont tels que :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow \begin{cases} mg = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

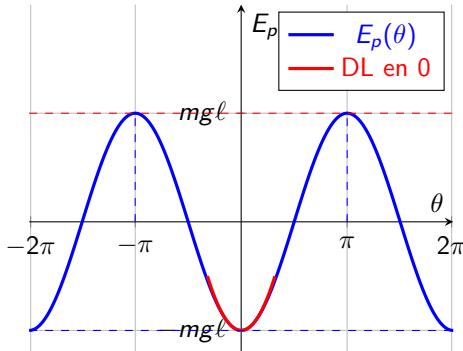
On en déduit que E_p ne dépend que de x avec

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg \Rightarrow E_p = -mgx + \text{cst}$$

On choisit $E_p(x=0) = 0$, alors $E_p = -mgx = -mg\ell \cos(\theta)$

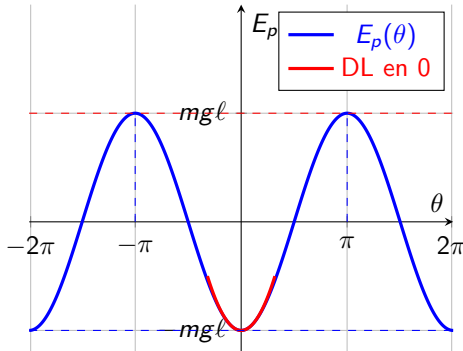
3.2

Graphe de $E_p(\theta)$



3.2

Graphe de $E_p(\theta)$

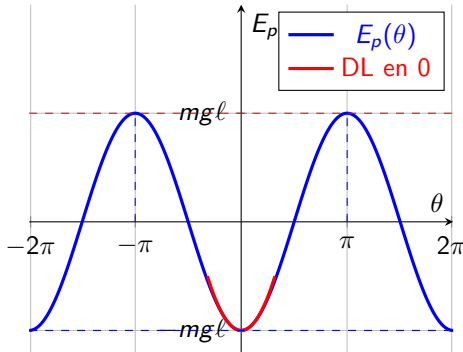


◇ $\theta = 0 [2\pi]$ est un position d'équilibre stable ²

2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php

3.2

Graphe de $E_p(\theta)$



- ◇ $\theta = 0 [2\pi]$ est une position d'équilibre stable ²
- ◇ $\theta = \pi [2\pi]$ est une position d'équilibre instable

3.3 Dans l'approximation des petits angles (développement limité de $E_p(\theta)$ autour de $\theta = 0$:

3.3 Dans l'approximation des petits angles (développement limité de $E_p(\theta)$ autour de $\theta = 0$:

$$\Rightarrow E_p(\theta) = -mg\ell \cos(\theta) \approx mg\ell \frac{\theta^2}{2} - mg\ell$$

3.3 Dans l'approximation des petits angles (développement limité de $E_p(\theta)$ autour de $\theta = 0$:

$$\Rightarrow E_p(\theta) = -mg\ell \cos(\theta) \approx mg\ell \frac{\theta^2}{2} - mg\ell$$

On retrouve la même forme parabolique que pour l'oscillateur harmonique.

3.4 Comme la puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant, alors l'énergie mécanique de M est constante au cours du temps :

$$E_m = cte \quad \text{avec} \quad E_m = E_p + E_c = mgl\frac{\theta^2}{2} - mgl + \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

3.4 Comme la puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant, alors l'énergie mécanique de M est constante au cours du temps :

$$E_m = cte \quad \text{avec} \quad E_m = E_p + E_c = mgl\frac{\theta^2}{2} - mgl + \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

Cette relation encore appelée intégrale première du mouvement peut être dérivée pour trouver l'ED du mvt :

3.4 Comme la puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant, alors l'énergie mécanique de M est constante au cours du temps :

$$E_m = cte \quad \text{avec} \quad E_m = E_p + E_c = mgl\frac{\theta^2}{2} - mgl + \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

Cette relation encore appelée intégrale première du mouvement peut être dérivée pour trouver l'ED du mvt :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mgl\theta\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

3.4 Comme la puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant, alors l'énergie mécanique de M est constante au cours du temps :

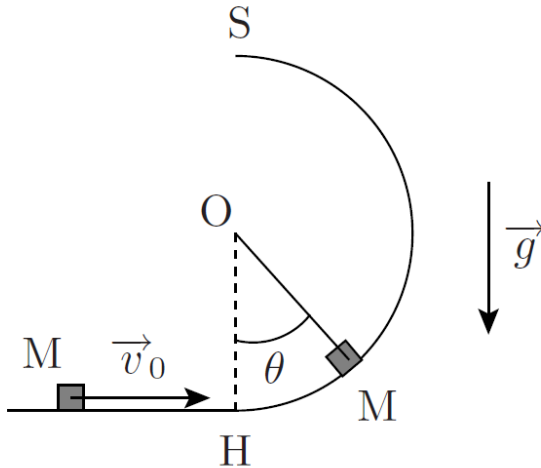
$$E_m = cte \quad \text{avec} \quad E_m = E_p + E_c = mgl\frac{\theta^2}{2} - mgl + \frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2$$

Cette relation encore appelée intégrale première du mouvement peut être dérivée pour trouver l'ED du mvt :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mgl\theta\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{\ell}}_{\omega_0^2} \theta = 0$$

4.1



4.1 En l'absence de frottements l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, de plus l'énergie potentielle se conserve sur le plat (altitude constante), on en déduit que sur le plat :

4.1 En l'absence de frottements l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, de plus l'énergie potentielle se conserve sur le plat (altitude constante), on en déduit que sur le plat :

$$E_c = E_m - E_p = cst \quad \Rightarrow \quad \|\vec{v}\| = cst' \quad \Rightarrow \quad \|\vec{v}_H\| = \|\vec{v}_M\|$$

4.1 En l'absence de frottements l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, de plus l'énergie potentielle se conserve sur le plat (altitude constante), on en déduit que sur le plat :

$$E_c = E_m - E_p = cst \quad \Rightarrow \quad \|\vec{v}\| = cst' \quad \Rightarrow \quad \|\vec{v}_H\| = \|\vec{v}_M\|$$

On notera $\|\vec{v}\| = v$ par la suite pour alléger l'écriture.

4.2 On rappelle l'expression de l'énergie potentielle obtenue dans le cas analogue du pendule : $E_p = -mgR \cos(\theta)$

4.2 On rappelle l'expression de l'énergie potentielle obtenue dans le cas analogue du pendule : $E_p = -mgR \cos(\theta)$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions H (correspond à $\theta = 0$) et M (correspond à θ quelconque sur le cercle) :

4.2 On rappelle l'expression de l'énergie potentielle obtenue dans le cas analogue du pendule : $E_p = -mgR \cos(\theta)$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions H (correspond à $\theta = 0$) et M (correspond à θ quelconque sur le cercle) :

$$E_c(H) + E_p(H) = E_c(M) + E_p(M)$$

4.2 On rappelle l'expression de l'énergie potentielle obtenue dans le cas analogue du pendule : $E_p = -mgR \cos(\theta)$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions H (correspond à $\theta = 0$) et M (correspond à θ quelconque sur le cercle) :

$$E_c(H) + E_p(H) = E_c(M) + E_p(M)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{1}{2}mv^2 - mgR \cos(\theta)$$

4.2 On rappelle l'expression de l'énergie potentielle obtenue dans le cas analogue du pendule : $E_p = -mgR \cos(\theta)$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions H (correspond à $\theta = 0$) et M (correspond à θ quelconque sur le cercle) :

$$E_c(H) + E_p(H) = E_c(M) + E_p(M)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{1}{2}mv^2 - mgR \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 + gR(\cos(\theta) - 1) = \frac{1}{2}v^2$$

4.2 On rappelle l'expression de l'énergie potentielle obtenue dans le cas analogue du pendule : $E_p = -mgR \cos(\theta)$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions H (correspond à $\theta = 0$) et M (correspond à θ quelconque sur le cercle) :

$$E_c(H) + E_p(H) = E_c(M) + E_p(M)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR = \frac{1}{2}mv^2 - mgR \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_0^2 + gR(\cos(\theta) - 1) = \frac{1}{2}v^2$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gR(\cos(\theta) - 1)$$

4.3 La projection du principe fondamental de la dynamique sur le vecteur $\vec{u}_r$ donne :

4.3 La projection du principe fondamental de la dynamique sur le vecteur $\vec{u}_r$ donne :

$$-m \frac{v^2}{R} = mg \cos(\theta) - N$$

4.3 La projection du principe fondamental de la dynamique sur le vecteur $\vec{u}_r$ donne :

$$-m \frac{v^2}{R} = mg \cos(\theta) - N$$

On en déduit :

$$N = mg \cos(\theta) + m \frac{v^2}{R} = mg \cos(\theta) + m \frac{v_0^2}{R} + 2mg (\cos(\theta) - 1)$$

4.3 La projection du principe fondamental de la dynamique sur le vecteur $\vec{u}_r$ donne :

$$-m \frac{v^2}{R} = mg \cos(\theta) - N$$

On en déduit :

$$N = mg \cos(\theta) + m \frac{v^2}{R} = mg \cos(\theta) + m \frac{v_0^2}{R} + 2mg (\cos(\theta) - 1)$$

$$N = m \frac{v_0^2}{R} + mg (3 \cos(\theta) - 2)$$

4.3 La projection du principe fondamental de la dynamique sur le vecteur $\vec{u}_r$ donne :

$$-m \frac{v^2}{R} = mg \cos(\theta) - N$$

On en déduit :

$$N = mg \cos(\theta) + m \frac{v^2}{R} = mg \cos(\theta) + m \frac{v_0^2}{R} + 2mg (\cos(\theta) - 1)$$

$$N = m \frac{v_0^2}{R} + mg (3 \cos(\theta) - 2)$$

donc $N(\theta)$ est décroissante sur $[0, \pi]$ puis croissante sur $[\pi, 2\pi]$.

4.4 Le contact est maintenu si $\forall \theta, N(\theta) > 0$, ce qui est vérifié si le minimum de $N(\theta)$, noté $N_{\min} = N(\pi)$, est positif :

4.4 Le contact est maintenu si $\forall \theta, N(\theta) > 0$, ce qui est vérifié si le minimum de $N(\theta)$, noté $N_{\min} = N(\pi)$, est positif :

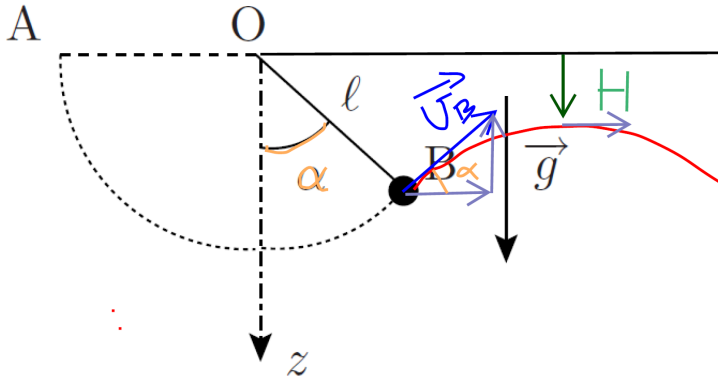
$$N_{\min} = m \frac{v_0^2}{R} + mg(3 \cos(\pi) - 2) > 0$$

4.4 Le contact est maintenu si $\forall \theta, N(\theta) > 0$, ce qui est vérifié si le minimum de $N(\theta)$, noté $N_{\min} = N(\pi)$, est positif :

$$N_{\min} = m \frac{v_0^2}{R} + mg(3 \cos(\pi) - 2) > 0$$

$$\frac{v_0^2}{R} > 5g \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 > \sqrt{5gR}}$$

5.1



5.1 On notera $\|\vec{v}\| = v$ pour alléger l'écriture.

5.1 On notera $\|\vec{v}\| = v$ pour alléger l'écriture.

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = -mgz$

5.1 On notera $\|\vec{v}\| = v$ pour alléger l'écriture.

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = -mgz$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A($z_A = 0$) et B($z_B = \ell \cos(\alpha)$) :

5.1 On notera $\|\vec{v}\| = v$ pour alléger l'écriture.

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = -mgz$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A($z_A = 0$) et B($z_B = \ell \cos(\alpha)$) :

$$\underbrace{E_c(A)}_0 + \underbrace{E_p(A)}_0 = E_c(B) + E_p(B)$$

5.1 On notera $\|\vec{v}\| = v$ pour alléger l'écriture.

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = -mgz$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A ($z_A = 0$) et B ($z_B = \ell \cos(\alpha)$) :

$$\underbrace{E_c(A)}_0 + \underbrace{E_p(A)}_0 = E_c(B) + E_p(B)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\ell \cos(\alpha)$$

5.1 On notera $\|\vec{v}\| = v$ pour alléger l'écriture.

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = -mgz$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A ($z_A = 0$) et B ($z_B = \ell \cos(\alpha)$) :

$$\underbrace{E_c(A)}_0 + \underbrace{E_p(A)}_0 = E_c(B) + E_p(B)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\ell \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow g\ell \cos(\alpha) = \frac{1}{2}v_B^2$$

5.1 On notera $\|\vec{v}\| = v$ pour alléger l'écriture.

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = -mgz$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A ($z_A = 0$) et B ($z_B = \ell \cos(\alpha)$) :

$$\underbrace{E_c(A)}_0 + \underbrace{E_p(A)}_0 = E_c(B) + E_p(B)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\ell \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow g\ell \cos(\alpha) = \frac{1}{2}v_B^2$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{2g\ell \cos(\alpha)}$$

5.2 L'instant où le fil casse est pris comme origine des temps ($t = 0$).

5.2 L'instant où le fil casse est pris comme origine des temps ($t = 0$).
Seul le poids agit sur le mobile une fois que le fil est rompu, le PFD en projection sur (Ox) donne donc :

5.2 L'instant où le fil casse est pris comme origine des temps ($t = 0$).
Seul le poids agit sur le mobile une fois que le fil est rompu, le PFD en projection sur (Ox) donne donc :

$$m\ddot{x}(t) = 0$$

5.2 L'instant où le fil casse est pris comme origine des temps ($t = 0$).
Seul le poids agit sur le mobile une fois que le fil est rompu, le PFD en projection sur (Ox) donne donc :

$$m\ddot{x}(t) = 0$$

En intégrant on obtient :

5.2 L'instant où le fil casse est pris comme origine des temps ($t = 0$).
Seul le poids agit sur le mobile une fois que le fil est rompu, le PFD en projection sur (Ox) donne donc :

$$m\ddot{x}(t) = 0$$

En intégrant on obtient :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = v_B \cos(\alpha)$$

5.2 L'instant où le fil casse est pris comme origine des temps ($t = 0$).
Seul le poids agit sur le mobile une fois que le fil est rompu, le PFD en projection sur (Ox) donne donc :

$$m\ddot{x}(t) = 0$$

En intégrant on obtient :

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(0) = v_B \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow v_x = \dot{x}(0) = \sqrt{2g\ell} (\cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}$$

5.3 Lorsque le mobile est au sommet de la parabole, sa vitesse est horizontale, on en déduit :

$$v_S = v_x = \sqrt{2g\ell} (\cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}$$

5.3 Lorsque le mobile est au sommet de la parabole, sa vitesse est horizontale, on en déduit :

$$v_S = v_x = \sqrt{2g\ell} (\cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}$$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions B($z_B = \ell \cos(\alpha)$) et S($z_S = H$) :

5.3 Lorsque le mobile est au sommet de la parabole, sa vitesse est horizontale, on en déduit :

$$v_S = v_x = \sqrt{2g\ell} (\cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}$$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions B($z_B = \ell \cos(\alpha)$) et S($z_S = H$) :

$$0 = E_c(S) + E_p(S)$$

5.3 Lorsque le mobile est au sommet de la parabole, sa vitesse est horizontale, on en déduit :

$$v_S = v_x = \sqrt{2g\ell} (\cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}$$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions B ($z_B = \ell \cos(\alpha)$) et S ($z_S = H$) :

$$0 = E_c(S) + E_p(S)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2}mv_S^2 - mgh$$

5.3 Lorsque le mobile est au sommet de la parabole, sa vitesse est horizontale, on en déduit :

$$v_S = v_x = \sqrt{2g\ell} (\cos(\alpha))^{\frac{3}{2}}$$

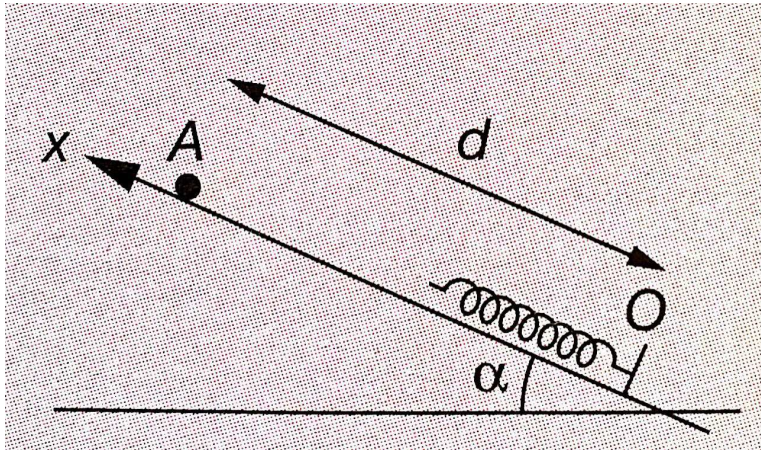
L'énergie mécanique se conserve entre les positions B($z_B = \ell \cos(\alpha)$) et S($z_S = H$) :

$$0 = E_c(S) + E_p(S)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m v_S^2 - m g H$$

$$\Rightarrow H = \frac{v_S^2}{2g} = \frac{2g\ell \cos^3(\alpha)}{2g} = \ell \cos^3(\alpha)$$

6.1



6.1 On suppose la longueur du ressort négligeable devant d .

6.1 On suppose la longueur du ressort négligeable devant d .
On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz = mgx \sin(\alpha)$$

6.1 On suppose la longueur du ressort négligeable devant d .
On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz = mgx \sin(\alpha)$$

Et celle de l'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$:

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2$$

6.1 On suppose la longueur du ressort négligeable devant d .
On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz = mgx \sin(\alpha)$$

Et celle de l'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$:

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2$$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A($x_A = d$) et O($x_O = 0$) :

6.1 On suppose la longueur du ressort négligeable devant d .
On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz = mgx \sin(\alpha)$$

Et celle de l'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$:

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2$$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A($x_A = d$) et O($x_O = 0$) :

$$\underbrace{E_c(A)}_0 + E_{pp}(A) + \underbrace{E_{pe}(A)}_0 = E_c(O) + \underbrace{E_{pp}(O)}_0 + E_{pe}(O)$$

6.1 On suppose la longueur du ressort négligeable devant d .
On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz = mgx \sin(\alpha)$$

Et celle de l'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$:

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2$$

L'énergie mécanique se conserve entre les positions A($x_A = d$) et O($x_O = 0$) :

$$\underbrace{E_c(A)}_0 + E_{pp}(A) + \underbrace{E_{pe}(A)}_0 = E_c(O) + \underbrace{E_{pp}(O)}_0 + E_{pe}(O)$$

$$\Rightarrow mgd \sin(\alpha) = E_c(O) + \frac{k}{2}\ell_0^2$$

6.1 Le mobile touche le point O si sa vitesse est non nulle en O juste avant le choc, soit $E_c(O) > 0$, c'est-à-dire :

$$mgd \sin(\alpha) > \frac{k}{2} \ell_0^2$$

6.1 Le mobile touche le point O si sa vitesse est non nulle en O juste avant le choc, soit $E_c(O) > 0$, c'est-à-dire :

$$mgd \sin(\alpha) > \frac{k}{2} \ell_0^2$$

$$d > \frac{k \ell_0^2}{2mg \sin(\alpha)}$$

6.1 Le mobile touche le point O si sa vitesse est non nulle en O juste avant le choc, soit $E_c(O) > 0$, c'est-à-dire :

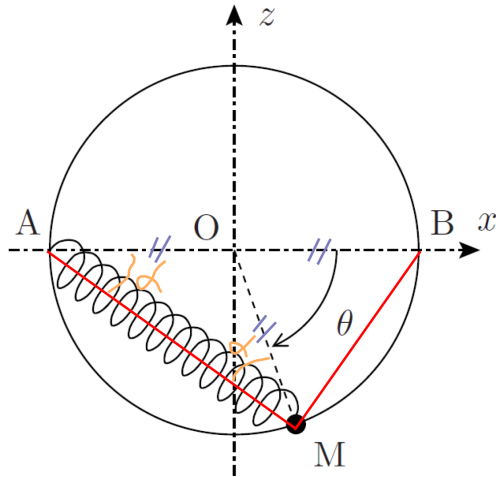
$$mgd \sin(\alpha) > \frac{k}{2} \ell_0^2$$

$$d > \frac{k \ell_0^2}{2mg \sin(\alpha)}$$

6.2

S'il n'a pas percuté le point O, en l'absence de frottements, le mobile remontera jusqu'au point A.

7.1



7.1 Le triangle AMB est inscrit dans le cercle, il est donc rectangle en M, on va chercher à déterminer $\widehat{OAM} = \widehat{BAM}$ pour trouver AM.

7.1 Le triangle AMB est inscrit dans le cercle, il est donc rectangle en M, on va chercher à déterminer $\widehat{OAM} = \widehat{BAM}$ pour trouver AM.
Le triangle AOM est isocèle puisque $AO = OM = R$, on en déduit :

$$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} \quad \text{on note } \alpha \quad \text{cet angle}$$

7.1 Le triangle AMB est inscrit dans le cercle, il est donc rectangle en M, on va chercher à déterminer $\widehat{OAM} = \widehat{BAM}$ pour trouver AM.
Le triangle AOM est isocèle puisque $AO = OM = R$, on en déduit :

$$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} \quad \text{on note } \alpha \quad \text{cet angle}$$

La somme des angles d'un triangle étant égale à π , dans le triangle AOM on obtient :

7.1 Le triangle AMB est inscrit dans le cercle, il est donc rectangle en M, on va chercher à déterminer $\widehat{OAM} = \widehat{BAM}$ pour trouver AM.
 Le triangle AOM est isocèle puisque $AO = OM = R$, on en déduit :

$$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} \quad \text{on note } \alpha \quad \text{cet angle}$$

La somme des angles d'un triangle étant égale à π , dans le triangle AOM on obtient :

$$\pi = \widehat{OAM} + \widehat{OMA} + \widehat{MOA}$$

7.1 Le triangle AMB est inscrit dans le cercle, il est donc rectangle en M, on va chercher à déterminer $\widehat{OAM} = \widehat{BAM}$ pour trouver AM.
 Le triangle AOM est isocèle puisque $AO = OM = R$, on en déduit :

$$\widehat{OAM} = \widehat{OMA} \quad \text{on note } \alpha \quad \text{cet angle}$$

La somme des angles d'un triangle étant égale à π , dans le triangle AOM on obtient :

$$\pi = \widehat{OAM} + \widehat{OMA} + \widehat{MOA}$$

$$\pi + 0 = 2\alpha + \pi - \theta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\theta}{2}$$

7.1 Le triangle AMB rectangle en M :

7.1 Le triangle AMB rectangle en M :

$$AM = AB \cos \left(\widehat{BAM} \right) = AB \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = 2R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

7.1 Le triangle AMB rectangle en M :

$$AM = AB \cos(\widehat{BAM}) = AB \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

7.2 La longueur du ressort est $\ell(t) = AM(t)$ et sa longueur à vide est $\ell_0 = 2R$.

7.2 La longueur du ressort est $\ell(t) = AM(t)$ et sa longueur à vide est $\ell_0 = 2R$.
L'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$ est :

7.2 La longueur du ressort est $\ell(t) = AM(t)$ et sa longueur à vide est $\ell_0 = 2R$.
L'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$ est :

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2 = \frac{k}{2} \left(2R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 2R \right)^2$$

7.2 La longueur du ressort est $\ell(t) = AM(t)$ et sa longueur à vide est $\ell_0 = 2R$.
L'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$ est :

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2 = \frac{k}{2} \left(2R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 2R \right)^2$$
$$\Rightarrow E_{pe} = 2kR^2 \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right)^2$$

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

7.2 La longueur du ressort est $\ell(t) = AM(t)$ et sa longueur à vide est $\ell_0 = 2R$.
L'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$ est :

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2 = \frac{k}{2} \left(2R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 2R \right)^2$$
$$\Rightarrow E_{pe} = 2kR^2 \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right)^2$$

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz_M = -mgR \sin(\theta)$$

7.2 La longueur du ressort est $\ell(t) = AM(t)$ et sa longueur à vide est $\ell_0 = 2R$.
L'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$ est :

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2 = \frac{k}{2} \left(2R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 2R \right)^2$$
$$\Rightarrow E_{pe} = 2kR^2 \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right)^2$$

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz_M = -mgR \sin(\theta)$$

On en déduit l'expression de l'énergie potentielle totale associée à la somme des deux forces conservatives :

7.2 La longueur du ressort est $\ell(t) = AM(t)$ et sa longueur à vide est $\ell_0 = 2R$.
 L'énergie potentielle élastique pour un ressort de longueur $\ell(t)$ est :

$$E_{pe} = \frac{k}{2}(\ell(t) - \ell_0)^2 = \frac{k}{2} \left(2R \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 2R \right)^2$$

$$\Rightarrow E_{pe} = 2kR^2 \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right)^2$$

On rappelle l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz_M = -mgR \sin(\theta)$$

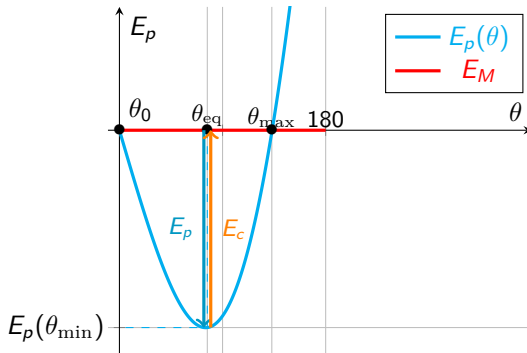
On en déduit l'expression de l'énergie potentielle totale associée à la somme des deux forces conservatives :

$$E_p = E_{pe} + E_{pp} = 2kR^2 \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right)^2 - mgR \sin(\theta)$$

7.3 Application numérique en unités SI :

$$E_p = E_{pe} + E_{pp} = 0,2 \times \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 \right)^2 - 0,1 \times \sin(\theta)$$

Graphe de $E_p(\theta)$



7.4 On rappelle l'expression générale du gradient en coordonnées polaires :

7.4 On rappelle l'expression générale du gradient en coordonnées polaires :

$$\vec{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

7.4 On rappelle l'expression générale du gradient en coordonnées polaires :

$$\vec{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \vec{u}_\theta$$

Une position d'équilibre est telle que la somme vectorielle des forces est nulle, on obtient, avec ici $r = R$:

7.4 On rappelle l'expression générale du gradient en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta}$$

Une position d'équilibre est telle que la somme vectorielle des forces est nulle, on obtient, avec ici $r = R$:

$$-\overrightarrow{\text{grad}} E_p - N\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{\partial E_p}{\partial R} - N = 0 \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

7.4 On rappelle l'expression générale du gradient en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r} \overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} \overrightarrow{u_\theta}$$

Une position d'équilibre est telle que la somme vectorielle des forces est nulle, on obtient, avec ici $r = R$:

$$-\overrightarrow{\text{grad}} E_p - N\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{\partial E_p}{\partial R} - N = 0 \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

On retrouve qu'une position d'équilibre est telle que $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$.

7.4 Graphiquement on trouve $\theta_{\text{eq}} = 76,7^\circ$.

7.4 Graphiquement on trouve $\theta_{\text{eq}} = 76,7^\circ$.

Cette position d'équilibre est **stable** car la courbe $E_p(\theta)$ est **convexe**.

7.4 Graphiquement on trouve $\theta_{\text{eq}} = 76,7^\circ$.

Cette position d'équilibre est **stable** car la courbe $E_p(\theta)$ est **convexe**.

En effet si on écarte le mobile de θ_{eq} , la composante de la résultante des forces sur

$\vec{u}_\theta$, $F_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial E_p}{\partial \theta}$ va toujours ramener le mobile en θ_{eq} .

7.5 On l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, avec $\theta(0) = \theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

7.5 On l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, avec $\theta(0) = \theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$E_m = E_p(t = 0) + E_c(t = 0) = 0 \quad \text{avec} \quad E_c(t) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2(t)$$

7.5 On l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, avec $\theta(0) = \theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$E_m = E_p(t = 0) + E_c(t = 0) = 0 \quad \text{avec} \quad E_c(t) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2(t)$$

◇ L'angle maximal atteint est telle que la vitesse y est nulle :

$$E_c(\theta_{\max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p(\theta_{\max}) = E_m = 0$$

7.5 On l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, avec $\theta(0) = \theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$E_m = E_p(t=0) + E_c(t=0) = 0 \quad \text{avec} \quad E_c(t) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2(t)$$

◇ L'angle maximal atteint est telle que la vitesse y est nulle :

$$E_c(\theta_{\max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p(\theta_{\max}) = E_m = 0$$

On retrouve graphiquement $\theta_{\max} = 133^\circ$.

7.5 On l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, avec $\theta(0) = \theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$E_m = E_p(t=0) + E_c(t=0) = 0 \quad \text{avec} \quad E_c(t) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2(t)$$

◇ L'angle maximal atteint est telle que la vitesse y est nulle :

$$E_c(\theta_{\max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p(\theta_{\max}) = E_m = 0$$

On retrouve graphiquement $\theta_{\max} = 133^\circ$.

◇ La vitesse maximale atteinte $v_{\max}$ s'obtient quand E_c est maximale et donc quand E_p est minimale, ce qui correspond au passage du mobile en θ_{eq} :

7.5 On l'absence de forces non conservatives, l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement, avec $\theta(0) = \theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$E_m = E_p(t=0) + E_c(t=0) = 0 \quad \text{avec} \quad E_c(t) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2(t)$$

◇ L'angle maximal atteint est telle que la vitesse y est nulle :

$$E_c(\theta_{\max}) = 0 \quad \Rightarrow \quad E_p(\theta_{\max}) = E_m = 0$$

On retrouve graphiquement $\theta_{\max} = 133^\circ$.

◇ La vitesse maximale atteinte $v_{\max}$ s'obtient quand E_c est maximale et donc quand E_p est minimale, ce qui correspond au passage du mobile en θ_{eq} :

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = E_c(\theta_{\text{eq}}) = -E_p(\theta_{\text{eq}}) \Rightarrow v_{\max} = \sqrt{\frac{-2E_p(\theta_{\text{eq}})}{m}} = 1,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$