CHAPITRE 19

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

I Rappels **4**
I.1 Partie ouverte 4
I.2 Continuité 5
II Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ **7**
II.1 Dérivée en un point selon un vecteur 8
II.2 Dérivées partielles d'ordre 1 10
II.3 Différentielle 11
II.4 Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$ 13
II.5 Gradient 15
III Règle de la chaîne **17**
IV Applications géométriques **22**
IV.1 Courbes du plan 22
IV.2 Surfaces de $\mathbb{R}^3$ 26
V Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ **29**
V.1 Dérivées partielles d'ordre 2 29
V.2 Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^2$ 33
V.3 Matrice hessienne 34
VI Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ **36**
VII Application aux équations aux dérivées partielles **41**
VII.1 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ où $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 41
VII.2 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ où $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 41
VII.3 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ où $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 42
VII.4 Équation des ondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ où $a \in \mathbb{R}_+^\star$ et $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ – Changement de variables linéaire 43
VII.5 $x \times \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \times \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ où $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ – changement de variables : coordonnées polaires . . . 44

Extrait du programme

Calcul différentiel

C - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivée en un point selon un vecteur.	Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert non vide Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.
Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω.	
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1.	La démonstration n'est pas exigible.
	Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω.
Différentielle de f en a.	Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $$\mathrm{d}f(a) : (h_1,\dots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i.$$ Notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\dots,x_p(t)\big)$.	Interprétation géométrique.
Application au calcul des dérivées partielles de : $$(u_1,\dots,u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)\big).$$	En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert non vide convexe.	
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Le gradient est défini par la relation $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \langle \nabla f(a), h\rangle$ pour $h \in \mathbb{R}^p$.
Coordonnées du gradient.	Notation $\nabla f(a)$.
d) Applications géométriques	
Courbe du plan définie par une équation $f(x,y) = 0$ où f est de classe $\mathscr{C}^1$.	Lignes de niveau de f.
Point régulier. Le gradient est normal à la tangente en un point régulier.	On admet que la courbe admet un paramétrage local de classe $\mathscr{C}^1$. Détermination d'une équation de la tangente en un point régulier. Lorsqu'il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.
Surface définie par une équation $f(x,y,z) = 0$ où f est de classe $\mathscr{C}^1$.	
Point régulier. Le plan tangent en un point régulier est défini comme orthogonal au gradient.	
Courbe tracée sur une surface.	Dans le cas d'une courbe régulière, la tangente à la courbe est incluse dans le plan tangent à la surface.
e) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.	
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a)+\nabla f(a)^\top h+\frac{1}{2}h^\top H_f(a)h+o(\|h\|^2).$$	La démonstration est hors programme. Expression en termes de produit scalaire.

f) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Extremum local, global.	
Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$.	
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique.	
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f : — si $H_f(a)\in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ; — si $H_f(a)\notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.	Adaptation à l'étude d'un maximum local. Explicitation pour $p=2$ (trace et déterminant).
	Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

I. Rappels

I.1. Partie ouverte

Définition 19.1 – Point intérieur à une partie

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, A une partie de E et $x \in E$.
On dit que x **est un point intérieur à** A lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B_o(x,r) \subset A$.

Exemple 19.1

On se place dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

- Le point 2 est intérieur à $[1,+\infty[$. En effet $B_o\left(2, \frac{1}{2}\right) \subset [1,+\infty[$. Plus généralement, tout point $x \in]1,+\infty[$ est intérieur à $[1,+\infty[$.
- Le point 1 n'est pas intérieur à $[1,+\infty[$. En effet, pour tout $r > 0$ il existe $y \in]1-r, 1[$ tel que $y \in B_o(1,r)$ et $y \notin [1,+\infty[$, donc, $B_o(1,r) \not\subset [1,+\infty[$.

Définition 19.2 – Ouvert

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E.
On dit que A est **un ouvert** (ou une **partie ouverte**) de E lorsque :

$$\forall x \in A, \exists r > 0, B_o(x,r) \subset A.$$

Autrement dit, A est ouvert si, et seulement si, tous les points de A sont intérieurs à A.

Exemple 19.2

- Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'intervalle $]1,+\infty[$ est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

  En effet, pour tout $x \in]1,+\infty[$, il existe $r = \frac{x-1}{2} > 0$ tel que $B_o\left(x, \frac{x-1}{2}\right) \subset]1,+\infty[$.

  Plus généralement les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, ceux de la forme $]a,b[$) sont des ouverts.
- Les ensembles E et $\varnothing$ sont des ouverts de E.
- Les boules ouvertes sont des ouverts.

Théorème 19.1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert non vide de E.
2. Une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert non vide de E.

I.2. Continuité

Définition 19.3 – Continuité en un point

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, $f : A \to F$ une application et $a \in A$.

- On dit que f est **continue en** a lorsque $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.
- On dit que f est **continue sur** A lorsque f est continue en tout point de A.

Exemple 19.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
On munit E de la norme : $\forall x = x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n \in E$, $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty$ où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme infinie sur $\mathbb{K}^n$.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_i : & E & \to & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & x_i \end{array}$$

où on munit $\mathbb{K}$ de la norme $|\cdot|$ (valeur absolue ou module). Montrons que φ_i est continue sur E.
Soit $a = a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n \in E$, alors : pour tout $x = x_1.e_1 + \cdots + x_n.e_n$, on a $\left|\varphi_i(x) - \varphi_i(a)\right| = |x_i - a_i| \leqslant \|x - a\|$. D'où,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon > 0, \forall x \in E, \left[\|x - a\| \leqslant \eta \implies \left|\varphi_i(x) - \varphi_i(a)\right| \leqslant \varepsilon\right].$$

Ainsi, φ_i est continue en a. Ceci est vrai pour tout $a \in E$. Donc, φ_i est continue sur E.

Théorème 19.2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie (on note $n \geqslant 1$ la dimension de F), A une partie non vide de E et $f : A \to F$ une application.
On note $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F, et pour tout $x \in A$, $f(x) = f_1(x).\varepsilon_1 + \cdots + f_n(x).\varepsilon_n$.
La fonction f est continue sur A si, et seulement si, les **applications coordonnées** $f_1, \dots, f_n$ sont continues sur A.

Exemple 19.4

Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & \left(e^{x-y}, \ln(1 + x^2 \times z^4 + y^2)\right). \end{array}$$

Les applications polynomiales $(x, y, z) \mapsto x - y$ et $(x, y, z) \mapsto 1 + x^2 \times z^4 + y^2 > 0$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$.
De plus, $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $t \mapsto e^t$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc, par composition, les applications $(x, y, z) \mapsto e^{x-y}$ et $(x, y, z) \mapsto \ln(1 + x^2 \times z^4 + y^2)$ sont continues sur $\mathbb{R}^3$.
Les applications coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$) de f sont continues sur $\mathbb{R}^3$ donc, f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Théorème 19.3

Une application polynomiale est continue.
Une application rationnelle est continue sur toute partie où son dénominateur de s'annule pas.

Théorème 19.4 – Caractérisation séquentielle de la continuité

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, A une partie non vide de E, $f : A \to F$ une application et $a \in A$.
On a l'équivalence : f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, on a : $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Exemple 19.5

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrons que f n'est pas continue en $(0,0)$. On a :

$$\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Or, $f(0,0) = 0 \neq 1$.
Donc, par caractérisation séquentielle de la continuité, f n'est pas continue en $(0,0)$.

Dans ce chapitre, on munit $\mathbb{R}^p$, avec $p \in \mathbb{N}^\star$, d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque (le choix de la norme n'a pas d'importance, en dimension finie, elles sont toutes équivalentes). On note $(e_1,\dots,e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

II. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

On s'intéresse aux fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Lorsque $p=1$, cela revient à étudier les fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles.
  Pour représenter une telle fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on se place dans le plan et on trace le courbe représentative de f, autrement dit, la courbe d'équation $y=f(x)$.
- Lorsque $p=2$, on peut aussi représenter une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Cette fois, on se place dans l'espace. En effet, il faut 2 coordonnées (traditionnellement (x,y), mais en physique, on utilise aussi (r,θ)) pour l'ensemble de départ et 1 pour l'espace d'arrivée (traditionnellement z).
  Pour représenter f, on se place alors dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points de coordonnées $\big(x,y,f(x,y)\big)$ et l'ensemble de ces points est appelée **surface représentative de** f. Cette surface a pour équation $z=f(x,y)$.
  Concrètement, considérons les Alpes. Vues de dessus, on voit un « morceau de plan » (la Terre n'est pas plate (!), mais à cette échelle, on l'assimile à un plan). Chaque point est repéré par un couple de coordonnées (x,y) et on définit :

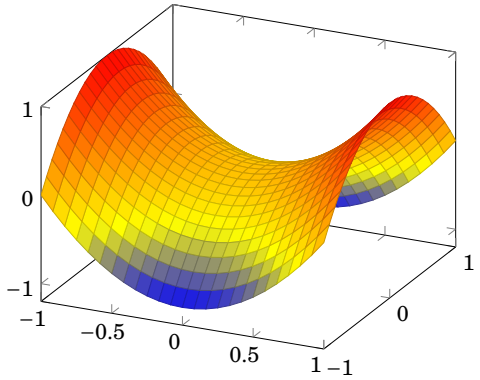
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \text{Altitude à la position } (x,y). \end{array}$$



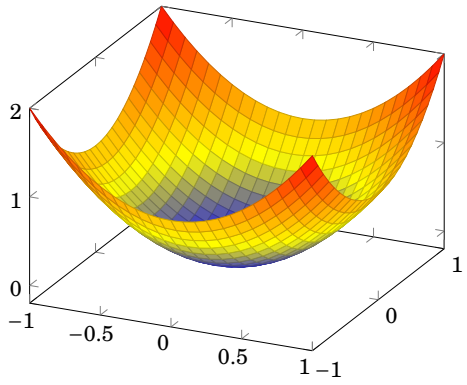


Exemple 19.6

1. La surface représentative de l'application constante $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3\end{array}$ est le plan d'équation $z=3$.
2. La surface représentative de $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2-y^2\end{array}$ est :



3. La surface représentative de $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2\end{array}$ est :



II.1. Dérivée en un point selon un vecteur

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in U$. Il existe donc $r > 0$ tel que, $B_0(a,r) \subset U$.
En particulier, si $v \in \mathbb{R}^p$ est non nul, alors,

$$\forall h \in \left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[, \quad a + h.v \in U.$$

En effet, par homogénéité, $\|a + h.v - a\| = |h| \times \|v\| < r$. Donc, $a + h.v \in B_o(a,r) \subset U$.

La fonction $\varphi_v : h \mapsto f(a + h.v)$ est définie sur $\left]-\frac{r}{\|v\|}, \frac{r}{\|v\|}\right[$. Si $v = 0_{\mathbb{R}^p}$, alors φ_v est constante, donc est définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 19.4 – Dérivée en un point selon un vecteur

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in U$ et $v \in \mathbb{R}^p$.

On dit que f **admet une dérivée selon le vecteur** v **en** a lorsque la fonction φ_v est dérivable en 0.
Dans ce cas, on note $D_v f(a)$ le nombre dérivé de φ_v en 0 :

$$D_v f(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h.v) - f(a)}{h}.$$

Remarque 19.1 – Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

On note $a = (x_a, y_a) \in U$.
L'intersection de la surface d'équation $z = f(x,y)$ et du plan passant par le point A de coordonnées $\big(a_1, a_2, f(a_1,a_2)\big)$ et dirigé par les vecteurs v et $\vec{k}$.
Cela trace une courbe sur la surface définie par f. La tangente à cette courbe au point A a pour pente $D_v f(a)$.

Exemple 19.7

On considère la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Soit $v = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ non nul. Pour tout $h \neq 0$,

$$\frac{f\big((0,0)+h.(\alpha,\beta)\big)-f(0,0)}{h} = \frac{f(h\alpha,h\beta)}{h} = \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \xrightarrow[h\to 0]{} \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, f possède une dérivée partielle selon le vecteur v en $(0,0)$ et $D_v f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{\beta^2}{\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Attention

L'existence des dérivées selon n'importe quel vecteur en a n'implique pas la continuité en a.

Dans l'exemple précédent, f possède une dérivée partielle en $(0,0)$ selon n'importe quel vecteur mais n'est pas continue en $(0,0)$.
En effet,

$$f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq f(0,0).$$

Remarque 19.3

- Si $v = 0_{\mathbb{R}^p}$, alors $D_v f(a) = 0$.
- On suppose que $p = 1$ et $v \neq 0$. On a :

$$\frac{f(a+h\times v)-f(a)}{h} = v \times \frac{f(a+h\times v)-f(a)}{v\times h}.$$

Donc, $D_v f(a)$ existe si, et seulement si, f est dérivable en a. Dans ce cas, $D_v f(a) = v \times f'(a)$.
Comme $p = 1$, $v \in \mathbb{R}^\star$ et on peut diviser par v. Ce n'est pas possible dans le cas général, on ne divise pas par un vecteur !

II.2. Dérivées partielles d'ordre 1

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.
On considère $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, l'application

$$\varphi_i : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p).$$

Dans le suite, pour abréger les écriture, on notera $(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_p) = (a_1, \dots, t, \dots, a_p)$
Comme U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, il existe $r > 0$ tel que,

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall t \in]a_i - r, a_i + r[, \quad (a_1, \dots, t, \dots, a_p) \in U.$$

Donc, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction φ_i est définie sur $]a_i - r, a_i + r[$.

Définition 19.5 – Dérivée partielle d'ordre 1 en un point

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.
On considère $i \in [\![1, p]\!]$ et $a = (a_1, \dots, a_p)$ fixés.

On dit que f admet une **dérivée partielle (d'ordre 1) par rapport à la i-ème variable en** a lorsque l'application $\varphi_i : t \mapsto f(a_1, \dots, t, \dots, a_p)$ est dérivable en a_i.

Dans ce cas, le nombre dérivé de φ_i en a est noté $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Remarque 19.4

- Il faut bien noter que φ_i est une fonction de la variable réelle et à valeurs réelles. En particulier, φ_i est dérivable en a_i si, et seulement si, le taux d'accroissement

  $$h \mapsto \frac{\varphi_i(a_i + h) - \varphi_i(a_i)}{h} = \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_p) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_p)}{h} = \frac{f(a + h.e_i) - f(a)}{h}$$

  possède une limite finie en 0.

  Dans ce cas, $\varphi_i'(a) = \partial_i f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{e_i} f(a)$.
- Lorsque $p = 1$, la variable x_1 peut être notée x et $f'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \partial_1 f(a)$ quand f est dérivable en a.
- Lorsque $p = 2$, les variables sont généralement notées $x = x_1$ et $y = x_2$. Quand cela a un sens, on écrit alors plutôt $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \partial_1 f(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = \partial_2 f(a)$.
- Lorsque $p = 3$, les variables sont généralement notées $x = x_1$, $y = x_2$ et $z = x_3$. Quand cela a un sens, on écrit alors plutôt $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \partial_1 f(a)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = \partial_2 f(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = \partial_3 f(a)$.
- L'avantage de la notation $\partial_i f$ est qu'elle en fait pas intervenir le nom de la i-ème variable. Les autres notations

précédentes sont dangereuses car elles peuvent engendrer des confusions : pour une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, que signifie $\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$?

Méthode 19.1 – Calculer une dérivée partielle

Pour dériver par rapport à une variable x_i, on « gèle les autres » et on dérive par rapport à x_i.

Exemple 19.8

On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x) \times y^2 \end{array}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ **fixé**. La fonction $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $\partial_1 f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ **fixé**. La fonction $y \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\partial_2 f(x,y) = 2\ln(x) \times y$.

Définition 19.6 – Fonctions dérivées partielles d'ordre 1

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f admet une dérivée partielle par rapport à la i-ème variable en tout point de U, alors on définit la (fonction) **dérivée partielle de f par rapport à la i-ème variable** par :

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} : \begin{array}{ccc} U & \to & \mathbb{R} \\ a & \mapsto & \partial_i f(a). \end{array}$$

Remarque 19.5

Lorsque f admet une dérivée partielle par rapport à la i-ème variable en tout point de U, on dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la i-ème sur U.

II.3. Différentielle

Définition 19.7 – Classe $\mathscr{C}^1$

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction.

On dit que f **est de classe $\mathscr{C}^1$ sur** U lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. f admet des dérivées partielles sur U par rapport à toutes ses variables,
2. toutes ses dérivées partielles sont continues sur U.

On note $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et à valeurs réelles.

Exemple 19.9

► On a montré que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x) \times y^2 \end{array}$ admet des dérivées partielles par rapport à ses deux variables.
De plus, $\partial_1 f$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. Donc, $\partial_1 f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.
D'autre part, les applications polynomiales $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. Comme ln est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, la fonction $\partial_2 f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.

► Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'application coordonnée $\theta_i : (x_1,\dots,x_p) \mapsto x_i$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^p, \quad \partial_j \theta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{i,j}.$$

Théorème 19.5 – Développement limité à l'ordre 1

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Alors, pour tout $a \in U$, la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 en a :
pour tout $h = (h_1,\dots,h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \times h_k + \underbrace{\|h\| \times \varepsilon(h)}_{\underset{= o(\|h\|) \text{ ou } o(h)}{\text{Not.}}}$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to (0,\dots,0)]{} 0$.

Démonstration

Admis.

Remarque 19.6

Ce théorème est une généralisation du résultat bien connu pour une fonction de la variable réelle : si $f : I \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est dérivable en $a \in I$, alors

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + f'(a) \times h + o(h).$$

Dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, la réciproque est vraie : si f possède un développement limité à l'ordre 1 en a, alors f est dérivable en a.

Corollaire 19.1

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U, alors f est continue sur U.

Démonstration

Soit $a \in U$.
En passant à la limite quand $h \to 0$ dans le développement limité à l'ordre 1 de f en a, on a $f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(a)$.
Autrement dit, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Donc, f est continue en a.
Ceci est vrai pour tout $a \in U$, donc f est continue sur U. □

Définition 19.8 – Différentielle en un point

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Pour tout $a \in U$, la **différentielle de f au point a** est l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f(a) : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & h = (h_1,\dots,h_p) & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \times h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \times h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \times h_p \overset{\text{Noté}}{=} \mathrm{d}f(a) \cdot h. \end{array}$$

L'application $\begin{array}{rccc} \mathrm{d}f : & U & \to & \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}) \\ & a & \mapsto & \mathrm{d}f(a) \end{array}$ est appelée la **différentielle de f**.

Remarque 19.7

- L'application $\mathrm{d}f(a)$ est aussi notée df_a.
- Lorsque $p=1$, $\mathrm{d}f(a)$ est l'application $\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ h & \mapsto & f'(a)\times h.\end{array}$
- L'application $\mathrm{d}f$ n'est pas nécessairement linéaire. C'est $\mathrm{d}f(a)$ avec $a\in U$ qui l'est.

Exemple 19.10 – Important (à savoir refaire)

- *Cas d'une fonction constante*. Soit $f:\begin{array}{ccc}U & \to & \mathbb{R}\\ a & \mapsto & C\in\mathbb{R}.\end{array}$

  Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ est nulle.

  Donc, pour tout $a\in U$, $\mathrm{d}f(a)=0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}$.
- *Cas d'une fonction linéaire*. Soit $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ une application linéaire.

  Pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ et $h\in\mathbb{R}^\star$, par linéarité de f,

$$\frac{f(x_1,\dots,x_i+h\dots,x_p)-f(x_1,\dots,x_p)}{h}=\frac{f(x_1,\dots,x_p)+h\times f(e_i)-f(x_1,\dots,x_p)}{h}=f(e_i)\xrightarrow[h\to0]{}f(e_i).$$

  On en déduit que f possède des dérivées partielles dans toutes les directions. De plus, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, $\partial_i f$ est l'application constante égale à $f(e_i)$ et est donc continue sur $\mathbb{R}^p$.

  Ainsi, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^p}$. De plus, pour tout $h=(h_1,\dots,h_p)$, on a :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\times h_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\times h_p=f(e_1)\times h_1+\dots+f(e_p)\times h_p=f(h_1.e_1+\dots+h_p.e_p)=f(h).$$

  Ainsi, $\boxed{\mathrm{d}f(a)=f}$.

II.4. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^1$

Proposition 19.1

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f:U\to\mathbb{R}$ et $g:U\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
L'application $\lambda.f+g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus, on a : pour tout $a\in U$,

$$\mathrm{d}(\lambda.f+g)(a)=\lambda.\mathrm{d}f(a)+\mathrm{d}g(a)\quad\text{et}\quad\forall i\in[\![1,p]\!],\quad\frac{\partial(\lambda.f+g)}{\partial x_i}(a)=\lambda\times\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

En particulier, l'ensemble $\mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et à valeurs réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(U,\mathbb{R})$.

Démonstration

Soit $i\in[\![1,p]\!]$ et $a=(a_1,\dots,a_p)\in U$.
Comme f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, les applications $t\mapsto f(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ et $t\mapsto g(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ sont dérivables en a_i.
Donc, par opération sur les fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles, $t\mapsto(\lambda.f+g)(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ est dérivable en a_i et

$$\frac{\partial(\lambda.f+g)}{\partial x_i}(a)=\lambda\times\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

Ceci est vrai pour tout $a\in U$.
Comme f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, leurs dérivées partielles sont continue sur U.
Donc, $\dfrac{\partial(\lambda.f+g)}{\partial x_i}$ est continue sur U par opération sur les fonctions continues.

D'où, $\lambda.f+g$ possède des dérivées partielles par rapport à la i-ème variable sur U et ces dérivées partielles sont continues sur U.
Ainsi, $\lambda.f+g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. □

Proposition 19.2

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f:U\to\mathbb{R}$ et $g:U\to\mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.
L'application $f\times g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus, on a : pour tout $a\in U$,

$$\mathrm{d}(f\times g)(a)=g(a).\mathrm{d}f(a)+f(a).\mathrm{d}g(a) \quad \text{et} \quad \forall i\in[\![1,p]\!],\quad \frac{\partial(f\times g)}{\partial x_i}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\times g(a)+f(a)\times\frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

Démonstration

Procéder comme dans la démonstration précédente en revenant aux applications $t\mapsto f(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ et $t\mapsto g(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ qui sont des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles. □

Corollaire 19.2

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ et $g:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ qui ne s'annule pas sur U.

► L'application $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus, on a : pour tout $a\in U$,

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{g}\right)(a)=-\frac{1}{\big(g(a)\big)^2}.\mathrm{d}g(a) \quad \text{et} \quad \forall i\in[\![1,p]\!],\quad \frac{\partial\left(\frac{1}{g}\right)}{\partial x_i}(a)=-\frac{1}{\big(g(a)\big)^2}\times\frac{\partial g}{\partial x_i}(a).$$

► L'application $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus, on a :

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a)=\frac{1}{\big(g(a)\big)^2}.\big(g(a).\mathrm{d}f(a)-f(a).\mathrm{d}g(a)\big) \quad \text{et} \quad \forall i\in[\![1,p]\!],\quad \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}(a)=\frac{1}{\big(g(a)\big)^2}\times\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\times g(a)-f(a)\times\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right).$$

Démonstration

Procéder comme dans la démonstration précédente en revenant aux applications $t\mapsto f(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ et $t\mapsto g(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ qui sont des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles. □

Proposition 19.3

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(U)\subset I$ et $\varphi:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
L'application $\varphi\circ f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. De plus, on a : pour tout $a\in U$,

$$\mathrm{d}(\varphi\circ f)(a)=(\varphi'\circ f)(a)\times\mathrm{d}f(a) \quad \text{et} \quad \forall i\in[\![1,p]\!],\quad \frac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x_i}(a)=(\varphi'\circ f)(a)\times\frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

Démonstration

Procéder comme dans la démonstration précédente en revenant aux applications $t\mapsto f(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ et $t\mapsto(\varphi\circ f)(a_1,\dots,t,\dots,a_p)$ qui sont des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles. □

Théorème 19.6

Une fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.

Démonstration

On a montré dans un exemple que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'application coordonnée $\theta_i : (x_1,\dots,x_p) \mapsto x_i$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.
Donc, par produit et combinaison linéaire, une fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.
Puis, par quotient, une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition. □

Remarque 19.8

Les égalités données sur les dérivées partielles sont vraies dès que celles-ci existent (il n'est pas nécessaire de supposer les applications de classe $\mathscr{C}^1$).

II.5. Gradient

Rappelons le résultat du chapitre ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS, ESPACES EUCLIDIENS.

Théorème 19.7

Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien (i.e. un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire) et φ une forme linéaire sur E.

Alors, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que : pour tout $x \in E$, $\varphi(x) = \langle v, x\rangle$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $a \in U$, l'application $\mathrm{d}f(a)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$. En appliquant le théorème précédent à $E = \mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire usuel, on obtient la définition suivante.

Définition 19.9 – Gradient

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$.

Pour tout $a \in U$, on appelle **gradient de f en a** l'unique vecteur de $\mathbb{R}^p$ noté $\nabla f(a)$ tel que :

$$\forall h \in \mathbb{R}^p, \quad \mathrm{d}f(a)\cdot h = <\nabla f(a), h> .$$

Théorème 19.8 – Gradient

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$.

Pour tout $a \in U$,

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right).$$

Démonstration

Soit $a \in U$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^p$, on a :

$$\mathrm{d}f(a)\cdot h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \times h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \times h_p = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right), h \right\rangle.$$

Donc, par unicité (théorème 19.7 page 15), $\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right)$. □

Exemple 19.11

► On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x) \times y^2 \end{array}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$, on a $\nabla f(x,y) = \left(\dfrac{y^2}{x}, 2\ln(x) \times y\right)$.

► On considère $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_p) & \mapsto & x_1^2 + \cdots + x_p^2 \end{array}$. Pour tout $a = (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p$, on a $\nabla f(a) = (2a_1,\dots,2a_p) = 2a$.

► En identifiant $\mathbb{R}^p$ à $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, on écrit aussi

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Remarque 19.9 – Propriétés du gradient

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a : pour tout $a \in U$,

$$\nabla(\lambda.f + g)(a) = \lambda.\nabla f(a) + \nabla g(a) \quad \text{et} \quad \nabla(f \times g)(a) = f(a).\nabla g(a) + g(a).\nabla f(a).$$

Si de plus, g ne s'annule par sur U, alors

$$\nabla\left(\frac{1}{g}\right)(a) = -\frac{1}{\big(g(a)\big)^2}.\nabla g(a) \quad \text{et} \quad \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{\big(g(a)\big)^2}.\big(g(a).\nabla f(a) - f(a).\nabla g(a)\big)$$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(U) \subset I$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. On a : pour tout $a \in U$,

$$\nabla(\varphi \circ f)(a) = (\varphi' \circ f)(a) \times \nabla f(a).$$

III. Règle de la chaîne

Théorème 19.9 – Règle de la chaîne

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On considère $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\gamma(I) \subset U$. Pour tout $t \in I$, on note $\gamma(t) = \big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big)$.

L'application $g : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\big(\gamma(t)\big) = f\big(x_1(t), \dots, x_p(t)\big) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = x_1'(t) \times \partial_1 f\big(\gamma(t)\big) + \cdots + x_p'(t) \times \partial_p f\big(\gamma(t)\big) = \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \big\rangle = \mathrm{d}f\big(\gamma(t)\big).\gamma'(t).$$

Démonstration

Soit $t_0 \in I$.
Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, f possède un développement limité en $a = \gamma(t_0)$: pour tout $h = (h_1, \dots, h_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $a + h \in U$,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \times h_k + \|h\| \times \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to (0,\dots,0)]{} 0$.
De plus, comme γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, chacune des fonctions $x_1, \dots, x_p$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et donc possède un développement limité à l'ordre 1 en t_0 : pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 + u \in I$,

$$x_k(t_0 + u) = x_k(t_0) + x_k'(t_0) \times u + u \times \eta_k(u),$$

où $\eta_k(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$.
Donc, pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 + u \in I$,

$$\gamma(t_0 + u) = \gamma(t_0) + \underbrace{u.\gamma'(t_0) + u.\big(\eta_1(u), \dots, \eta_p(u)\big)}_{=h(u)}.$$

Donc,

$$g(t_0 + u) = f\big(\gamma(t_0 + u)\big) = f\big(\gamma(t_0) + h(u)\big) = f\big(a + h(u)\big).$$

Or, $h(u) \xrightarrow[u \to 0]{} (0, \dots, 0)$.
Comme U est un ouvert, pour u assez proche de 0, $a + h(u) \in U$.
Donc,

$$g(t_0 + u) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \times u \times \big(x_k'(t_0) + \eta_k(u)\big) + \|h(u)\| \times \varepsilon\big(h(u)\big) = f(a) + u \times \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k'(t_0) + u \times \sum_{k=1}^{p} \eta_k(u) + \|h(u)\| \times \varepsilon\big(h(u)\big).$$

Or, $\dfrac{|u|}{u} = \pm 1$ et $h(u) \xrightarrow[u \to 0]{} (0, \dots, 0)$. Donc, par opération sur les limites,

$$\frac{1}{u} \times \left(u \times \sum_{k=1}^{p} \eta_k(u) + \|h(u)\| \times \varepsilon\big(h(u)\big) \right) = \sum_{k=1}^{p} \eta_k(u) + \frac{|u|}{u} \big\| \gamma'(t_0) + \big(\eta_1(u), \dots, \eta_p(u)\big) \big\| \times \varepsilon\big(h(u)\big) \xrightarrow[h \to 0]{} 0.$$

Donc, $g(t_0 + u) = g(t_0) + u \times \sum_{k=1}^{p} \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a) x_k'(t_0) + o(u)$.
Donc, g possède un développement limité à l'ordre 1 en t_0.
Donc, g est dérivable en t_0. Ceci est vrai pour tout $t_0 \in I$, donc, g est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$,

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}\big(\gamma(t)\big) x_k'(t).$$

De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et les fonctions $x_1, \dots, x_p$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, g' est continue sr I. □

Exemple 19.12

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On note, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f\big(\cos(t), \sin(t)\big)$.

Les fonctions cos et sin sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad g'(t) = -\sin(t) \times \frac{\partial f}{\partial x}\big(\cos(t), \sin(t)\big) + \cos(t) \times \frac{\partial f}{\partial y}\big(\cos(t), \sin(t)\big).$$

Proposition 19.4

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$ et $a \in U$.

Alors, pour tout $v \in \mathbb{R}^p$,

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a) \cdot v.$$

De plus, l'application $D_v f$ est continue sur U.

Démonstration

L'application $\gamma : t \mapsto a + t.v$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\gamma'(t) = a$.
De plus, comme $a \in U$ et U est un ouvert, pour t proche de 0, $a + t.v \in U$.
Donc, l'application $g : t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$ est bien définie au voisinage de 0.
De plus, par la règle de la chaîne, g est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de 0 et,

$$g'(0) = \langle \nabla f\big(\gamma(0)\big), \gamma'(0) \rangle = \langle \nabla f(a), v \rangle = \mathrm{d}f(a) \cdot v.$$

D'autre part, la définition 19.4 page 8 donne,

$$g'(0) = D_v f(a).$$

Donc,

$$\mathrm{d}f(a) \cdot v = g'(0) = D_v f(a).$$

De plus, en notant $v = (v_1, \dots, v_p)$, on a

$$D_v f(a) = v_1 \times \partial_1 f(a) + \cdots + v_p \times \partial_p f(a).$$

Donc, $D_v f$ est continue sur U comme combinaison linéaire de fonctions continues sur U. □

Remarque 19.10 – Interprétation géométrique de la règle de la chaîne dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

Avec les notations de la règle de la chaîne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\gamma(t)\big) = D_{\gamma'(t)} f\big(\gamma(t)\big).$$

Cette dérivée directionnelle est la pente de la tangente à la courbe tracée sur la surface définie par f et définie par l'intersection de la surface avec le plan vertical passant par $\big(\gamma(t), f(\gamma(t))\big)$ et dirigé par les vecteurs $\gamma'(t)$ et $\vec{k}$.

En reprenant l'exemple de la balade dans les Alpes, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(\gamma(t)\big)$ est la pente du chemin emprunté à l'instant t quand on se déplace dans la direction du vecteur vitesse $\gamma'(t)$.

Théorème 19.10

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que U est une partie ouverte et **convexe** de $\mathbb{R}^p$.
Si $\mathrm{d}f$ est l'application nulle, alors f est constante sur U.
La réciproque est vraie.

Démonstration

Soient $a = (a_1, \dots, a_p) \in U$ et $b = (b_1, \dots, b_p) \in U$. On considère la fonction $g : t \mapsto f\big(a + t.(b-a)\big) = f\big(a_1 + t \times (b_1 - a_1), \dots, a_p + t \times (b_p - a_p)\big)$ définie sur $[0,1]$.
La fonction g est bien défini : en effet, comme U est convexe, pour tout $t \in [0,1]$, $a + t.(b-a) \in [a,b] \subset U$.
Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la fonction $x_i : t \mapsto a_i + t \times (b_i - a_i)$ est dérivable sur $[0,1]$ et $x_i' : t \mapsto b_i - a_i$.
D'où, par la règle de la chaîne, pour tout $t \in [0,1]$,

$$g'(t) = (b_1 - a_1) \times \partial_1 f\big(a + t.(b-a)\big) + \cdots + (b_p - a_p) \times \partial_p f\big(a + t.(b-a)\big) = 0.$$

Donc, g est constante sur l'intervalle $[0,1]$, d'où $g(0) = g(1)$, puis $f(a) = f(b)$.
Ceci étant vrai pour tout $(a,b) \in U^2$, f est constante sur U. □

Remarque 19.11

- Dire que $\mathrm{d}f$ est l'application nulle est équivalent à dire que $\nabla f(a) = 0$, **pour tout** $a \in U$.
- Dire que $\mathrm{d}f$ est l'application nulle est équivalent à dire que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\partial_i f$ est l'application nulle.

Attention

Le résultat est faux si la partie U n'est pas convexe. Un contre-exemple est fourni par l'application :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{array}$$

En effet, sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}_-^\star \times \mathbb{R}$, f est constante, donc de différentielle nulle. Cependant f n'est pas constante.
L'ensemble $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ n'est pas convexe : en effet, $(-1,0) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ et $(1,0) \in \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$, cependant, le milieu du segment $\big[(-1,0),(1,0)\big]$ est $\frac{1}{2}.(-1,0) + \frac{1}{2}.(1,0) = (0,0) \notin \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$.
Donc, $\big[(-1,0),(1,0)\big] \not\subset \mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^\star \times \mathbb{R}$ n'est pas convexe.

Cela généralise le cas d'une variable réelle dont l'exemple classique est :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, $\mathbb{R}^\star$ n'est pas convexe (ce n'est pas un intervalle).

Théorème 19.11 – Règle de la chaîne 2.0 (changement de variables)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$.
Soient $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide V de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles.
On suppose que, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in V$, $\big(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)\big) \in U$.

Alors, la fonction $g : \begin{array}{ccc} V & \to & \mathbb{R} \\ (u_1, \dots, u_n) & \mapsto & f\big(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)\big) \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur V et :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \forall (u_1, \dots, u_n) \in V, \quad \partial_i g(u_1, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} \partial_i x_j(u_1, \dots, u_n) \times \partial_j f\big(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_p(u_1, \dots, u_n)\big)$$

En utilisant l'autre notation pour les dérivées partielles, cela donne :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (u_1,\dots,u_n) \in V,\quad \frac{\partial g}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_j}{\partial u_i}(u_1,\dots,u_n) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)\big)$$

Démonstration

On applique la règle de la chaîne à $u_i \mapsto f\big(x_1(u_1,\dots,u_n),\dots,x_p(u_1,\dots,u_n)\big)$ où $u_1,\dots,u_{i-1},u_{i+1},u_n$ sont fixés. □

Remarque 19.13 – Cas particulier $n = p = 2$

Dans ce cas,

$$\forall (u,v) \in V,\quad \begin{cases} \partial_1 g(u,v) = \partial_1 x(u,v) \times \partial_1 f\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \partial_1 y(u,v) \times \partial_2 f\big(x(u,v),y(u,v)\big) \\ \partial_2 g(u,v) = \partial_2 x(u,v) \times \partial_1 f\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \partial_2 y(u,v) \times \partial_2 f\big(x(u,v),y(u,v)\big). \end{cases}$$

Ce qui s'écrit aussi,

$$\forall (u,v) \in V,\quad \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x(u,v),y(u,v)\big) + \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \times \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(x(u,v),y(u,v)\big). \end{cases}$$

Attention ! Dans cette écriture, x joue deux rôles différents ! Celui de « première variable de f » dans l'expression $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et celui de « fonction » dans l'expression $x(u,v)$.

Exemple 19.13

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(u,v,w) \in \mathbb{R}^2$, on pose $g(u,v,w) = f(2u+v^3+e^w, u^2-v)$.
Par opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, les fonctions $(u,v,w) \mapsto 2u+v^3+e^w$ et $(u,v,w) \mapsto u^2-v$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
Donc, par théorème, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. De plus, pour tout $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v,w) &= 2\frac{\partial f}{\partial x}(2u+v^3+e^w, u^2-v) + 2u \times \frac{\partial f}{\partial y}(2u+v^3+e^w, u^2-v) \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) &= 3v^2 \times \frac{\partial f}{\partial x}(2u+v^3+e^w, u^2-v) - \frac{\partial f}{\partial y}(2u+v^3+e^w, u^2-v) \\ \frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) &= e^w \times \frac{\partial f}{\partial x}(2u+v^3+e^w, u^2-v). \end{aligned}$$

Remarque 19.14 – Cas particulier important : coordonnées polaires

► Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé usuel, on considère un point A de coordonnées cartésiennes (x,y).
Il existe $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y) = \big(r \times \cos(\theta), r \times \sin(\theta)\big)$. Le couple (r,θ) est appelé **coordonnées polaires** de A.
Les coordonnées polaires ne sont pas uniques : si (r,θ) convient, alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le couple $(r, \theta + 2k \times \pi)$ convient.

Le changement de variable $x = r\times\cos(\theta)$ et $y = r\times\sin(\theta)$ consiste à poser $g(r,\theta) = f\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big)$. On a alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big) + \sin(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\times\sin(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big) + r\times\cos(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial y}\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big). \end{cases}$$

On a :

$$\nabla g(r,\theta) = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\times\sin(\theta) & r\times\cos(\theta) \end{pmatrix}}_{=J(r,\theta)} \times \nabla f\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big).$$

On a $\det\big(J(r,\theta)\big) = r$. Donc, si $r>0$, alors $J(r,\theta)$ est inversible et on a : $J(r,\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \frac{-\sin(\theta)}{r} \\ \sin(\theta) & \frac{\cos(\theta)}{r} \end{pmatrix}$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big) = \cos(\theta)\times\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{-\sin(\theta)}{r}\times\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big) = \sin(\theta)\times\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{\cos(\theta)}{r}\times\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta). \end{cases}$$

En notant $u(\theta) = \big(\cos(\theta),\sin(\theta)\big)$ et $v(\theta) = u'(\theta) = \big(-\sin(\theta),\cos(\theta)\big)$, il vient :

$$\nabla f\big(r\times\cos(\theta), r\times\sin(\theta)\big) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta).u(\theta) + \frac{1}{r}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta).v(\theta).$$

► En physique, on écrit aussi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \sin(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\times\sin(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + r\times\cos(\theta)\times\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \nabla f(x,y) = \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta).u(\theta) + \frac{1}{r}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta).v(\theta).$$

ce qui peut être dangereux si on doit dériver de nouveau.

Remarque 19.15 – Changement de variables linéaires

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$. On pose $g(u,v) = f(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v)$. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = a\times\dfrac{\partial f}{\partial x}(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v) + c\times\dfrac{\partial f}{\partial y}(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v) \\ \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = b\times\dfrac{\partial f}{\partial x}(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v) + d\times\dfrac{\partial f}{\partial y}(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v) \end{cases}$$

Il est possible d'exprimer les dérivées partielles de f en fonctions de celles de g dès que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible.

IV. Applications géométriques

IV.1. Courbes du plan

Dans ce paragraphe, on se place dans $\mathbb{R}^2$.

Exemple 19.14 – Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est la courbe du plan dont les points $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ vérifient l'équation $x^2+y^2=1$.
Cette équation est appelée équation cartésienne du cercle trigonométrique. En notant $f:(x,y)\mapsto x^2+y^2-1=0$, le cercle trigonométrique est défini par l'ensemble

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | f(x,y)=0\}.$$

Exemple 19.15 – Graphe d'une fonction

Soit $u:I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout $(x,y)\in I\times\mathbb{R}$, $f(x,y)=u(x)-y$.
La courbe représentative de u a pour équation cartésienne $f(x,y)=0$.
Autrement dit,

$$\Gamma_f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | f(x,y)=0\}.$$

Définition 19.10 – Courbe définie par une équation cartésienne

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$.

- La **courbe $\mathscr{C}$ d'équation** $f(x,y)=0$ est l'ensemble $\{(x,y)\in U, f(x,y)=0\}$.
- On dit qu'un point (x_0,y_0) de $\mathscr{C}$ est **régulier** lorsque $\nabla f(x_0,y_0)\neq(0,0)$.
- On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est **régulière** lorsque tous ses points sont réguliers.

Remarque 19.16

La courbe $\mathscr{C}$ est obtenue en faisant l'intersection de la surface d'équation $z=f(x,y)$ et du plan d'équation $z=0$.

Remarque 19.17

Le point (x_0,y_0) est un **point régulier** de $\mathscr{C}$ lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\neq 0 \quad \textbf{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0.$$

Remarque 19.18 – Équation paramétrique d'une courbe

On considère une fonction $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\{\gamma(t)|t\in I\}$ est appelée courbe paramétrée.
Le cercle trigonométrique est une courbe paramétrée $\{(\cos(t),\sin(t))|t\in[0,2\pi[\}$. De plus, le point M de coordonnées (x,y) est sur le cercle trigonométrique, si, et seulement si, il existe $t\in[0,2\pi[$ tel que :

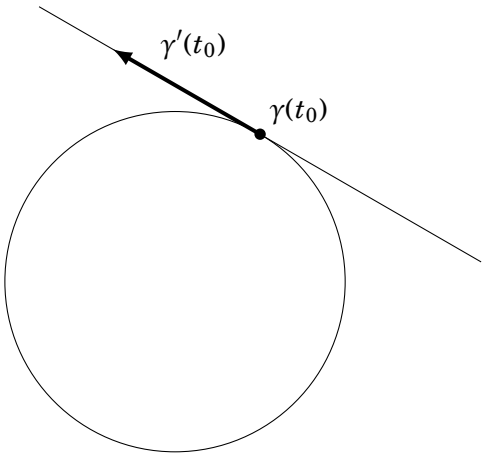
$$\begin{cases} x &= \cos(t)\\ y &= \sin(t).\end{cases}$$

Remarque 19.19 – Tangente en un point à une fonction $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathscr{C}^1$

Soit $t_0 \in I$. Comme γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, γ possède un développement limité à l'ordre 1 en 0 :

$$\gamma(t) \underset{t\to t_0}{=} \gamma(t_0) + (t-t_0).\gamma'(t_0) + o(t-t_0).$$

Lorsque $\gamma'(t_0) \neq 0$, on dit que le point de coordonnées $\gamma(t_0)$ est un point régulier de la courbe paramétrée.
En un tel point, la droite passant par le point de coordonnées $\gamma(t_0)$ et dirigé par le vecteur $\gamma'(t_0)$ est appelé tangente au point de paramètre t_0.
En reprenant l'exemple du cercle trigonométrique avec $\gamma : t \mapsto \big(\cos(t), \sin(t)\big)$, on a :



Théorème 19.12

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$.
On considère $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ un point régulier de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $f(x,y) = 0$.

On admet qu'il existe deux fonctions $t \mapsto f_1(t)$ et $t \mapsto f_2(t)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ telles qu'autour de M_0, $\mathscr{C}$ est la courbe paramétrée par $\gamma : t \mapsto \big(f_1(t), f_2(t)\big)$. Autrement dit, autour de M_0, on a une équation paramétrique de $\mathscr{C}$:

$$\begin{cases} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{cases}$$

Alors,

$$\forall t \in I, \quad \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \big\rangle = 0.$$

Autrement dit, le gradient est normal (=orthogonal) à la tangente en un point régulier.

Démonstration

On sait que, pour tout $t \in I$, le point de coordonnées $(x,y) = \gamma(t)$ est sur la courbe $\mathscr{C}$, donc, $f\big(\gamma(t)\big) = 0$.
De plus, par la règle de la chaîne, on a

$$\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

□

Remarque 19.20 – Visualisation

Remarque 19.21 – Tangente en un point régulier à une courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$

On se place sous les hypothèses du théorème 19.12 page 23 et on note $t_0 \in I$ tel que M_0 est le point de coordonnées $\gamma(t_0)=(x_0,y_0)$.
La tangente T au point de paramètre t_0 passe par le point M_0 et est dirigée par $\gamma'(t_0)$.
De plus, d'après le théorème 19.12 page 23,

$$\left\langle \nabla f(x_0,y_0), \gamma'(t_0)\right\rangle = 0.$$

Donc, un point M de coordonnées (x,y) est sur la tangente T si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0)$ et $\nabla f(x_0,y_0)$ sont orthogonaux : autrement dit,

$$\left\langle (x-x_0,y-y_0), \nabla f(x_0,y_0)\right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0)=0.$$

Définition 19.11 – Tangente à une courbe plane

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$.
On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $f(x,y)=0$ et (x_0,y_0) un point régulier de $\mathscr{C}$.

- La courbe $\mathscr{C}$ possède une **tangente au point** (x_0,y_0) d'équation cartésienne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0)=0.$$

- Le gradient de f en (x_0,y_0) est un vecteur normal à cette tangente.

Exemple 19.16

On considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne : $x^2+y^2=1$.
On note, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=x^2+y^2-1.$$

La fonction polynomiale f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y)=\big(2x,2y\big).$$

La gradient de f ne s'annule qu'en $(0,0)$ mais ce point n'est pas sur la courbe sur le cercle trigonométrique.
Donc, la courbe $\mathscr{C}$ est régulière et, pour tout $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}$, la tangente en (x_0,y_0) admet pour équation :

$$2x_0\times(x-x_0)+2y_0\times(y-y_0)=0.$$

Or, $(x_0,y_0)\in\mathscr{C}$, donc, $x_0^2+y_0^2=1$.
On en déduit que, la tangente en (x_0,y_0) admet pour équation :

$$x_0\times x+y_0\times y=1.$$

Remarque 19.22 – Graphe d'une fonction

Soit $u:I\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
On pose, pour tout $(x,y)\in I\times\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=u(x)-y.$$

La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $I\times\mathbb{R}$.
La courbe représentative Γ de u a pour équation cartésienne $f(x,y)=0$.
De plus, pour tout $(x,y)\in I\times\mathbb{R}$,

$$\nabla f(x,y)=\big(u'(x),-1\big)\neq(0,0).$$

Tout point (x_0,y_0) est donc régulier et la tangente en ce point est dirigé par $\big(1,u'(x_0)\big)$ (c'est bien sûr !).

- On retrouve la notion de nombre dérivé comme pente de la tangente.
- Une équation de la tangente en (x_0,y_0) est :

$$u'(x_0)\times(x-x_0)-(y-y_0)=0.$$

Comme, $y_0=u(x_0)$, on retrouve l'équation de la tangente au point d'abscisse t_0.

$$y=u(x_0)+u'(x_0)\times(x-x_0).$$

Théorème 19.13

Soient $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
On considère (x_0,y_0) un point régulier de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation cartésienne $f(x,y)=0$.

Alors, l'application

$$t\mapsto f\big((x_0,y_0)+t.\nabla f(x_0,y_0)\big)$$

est strictement croissante au voisinage de 0.

Démonstration

Comme U est un ouvert non vide et $(x_0,y_0)\in U$, il existe $\eta>0$ tel que, pour tout $t\in]-\eta,\eta[$, $(x_0,y_0)+t.\nabla(x_0,y_0)\in U$ (on se déplace depuis (x_0,y_0) dans la direction du gradient de f en (x_0,y_0)).
La fonction $g:t\mapsto f\big((x_0,y_0)+t.\nabla f(x_0,y_0)\big)$ est donc bien définie sur $]-\eta,\eta[$.
De plus, l'application $\gamma:t\mapsto(x_0,y_0)+t.\nabla f(x_0,y_0)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\eta,\eta[$.
D'où, par la règle de la chaîne, g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\eta,\eta[$ et, pour tout $t\in]-\eta,\eta[$,

$$g'(t)=\big\langle\nabla f\big(\gamma(t)\big),\gamma'(t)\big\rangle=\big\langle\nabla f\big((x_0,y_0)+t.\nabla f(x_0,y_0)\big),\nabla f(x_0,y_0)\big\rangle.$$

D'où, en $t=0$,

$$g'(0) = \langle \nabla f(x_0,y_0), \nabla(x_0,y_0)\rangle = \|\nabla(x_0,y_0)\|^2.$$

Or, $\nabla f(x_0,y_0) \neq 0$, donc $g'(0) > 0$ et, par continuité de g' en 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $g'(t) > 0$.
D'où, g est croissante sur $]-\varepsilon,\varepsilon[$. □

Remarque 19.23

A la montagne, si vous vous voulez rejoindre le plus rapidement le bas des pistes, dirigez vous dans la direction opposée au gradient.

Définition 19.12 – Ligne de niveau

On considère $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On appelle **ligne de niveau** λ **de** f l'ensemble $\{(x,y) \in U | f(x,y) = \lambda\}$.

Remarque 19.24

En posant $g = f - \lambda$, on se ramène à une courbe d'équation cartésienne $g(x,y) = 0$. De plus, on remarque que $\nabla g = \nabla f$.
Cette courbe est obtenue en faisant l'intersection de la surface d'équation $z = f(x,y)$ et du plan d'équation $z = \lambda$.

Proposition 19.5

Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau.

Démonstration

On applique le théorème 19.13 page 25 à la fonction $g = f - \lambda$. □

IV.2. Surfaces de $\mathbb{R}^3$

Définition 19.13 – Surface définie par une équation cartésienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^3$.

- La **surface** $\mathscr{S}$ **d'équation** $f(x,y,z) = 0$ est l'ensemble $\{(x,y,z) \in U, f(x,y,z) = 0\}$.
- On dit qu'un point (x_0,y_0,z_0) de $\mathscr{S}$ est **régulier** lorsque $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$.
- On dit que la surface $\mathscr{S}$ est **régulière** lorsque tous ses points sont réguliers.

Remarque 19.25

Le point (x_0,y_0,z_0) est un **point régulier** de $\mathscr{S}$ lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \quad \textbf{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \quad \textbf{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

Définition 19.14 – Plan tangent

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^3$.
On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$ et (x_0,y_0,z_0) un point régulier de $\mathscr{S}$.

- La surface $\mathscr{S}$ possède un **plan tangent au point** (x_0,y_0,z_0) d'équation cartésienne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\times(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\times(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\times(z-z_0)=0.$$

- Le gradient de f en (x_0,y_0,z_0) est un vecteur normal au plan tangent.

Remarque 19.26 – Graphe d'une fonction

Soient V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $u:V\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur V.
On pose, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x,y)\in V$,

$$f(x,y,z)=u(x,y)-z.$$

La surface $\mathscr{S}=\{(x,y,u(x,y))|(x,y)\in V\}$ a pour équation cartésienne $f(x,y,z)=0$.
De plus, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $(x,y)\in V$,

$$\nabla f(x,y)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),-1\right)\neq(0,0,0).$$

Tout point (x_0,y_0,z_0) est donc régulier et une équation du plan tangent en (x_0,y_0,z_0) est :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

Or, $z_0=u(x_0,y_0)$. On peut réécrire l'équation trouvée du plan tangent sous la forme :

$$z=\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\times(x-x_0)+\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\times(y-y_0)+u(x_0,y_0).$$

Définition 19.15 – Courbe tracée sur une surface

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U. On note $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$.

On considère $\gamma:I\to\mathbb{R}^3$ définie sur un intervalle I. On considère la courbe paramétrée $\mathscr{C}$ définie par γ.
On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est **tracée sur la surface** $\mathscr{S}$ lorsque : pour tout $t\in I$, $f\big(\gamma(t)\big)=0$.

Proposition 19.6

Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On note :

- $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $f(x,y,z)=0$,
- Une courbe $\mathscr{C}$ tracée sur $\mathscr{S}$ et définie par une fonction $\gamma:I\to\mathbb{R}^3$ de classe $\mathscr{C}^1$.
- M_0 un point de coordonnées (x_0,y_0,z_0) qui est sur $\mathscr{C}$: il existe $t_0\in I$ tel que $\gamma(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$.

On suppose que M_0 est un point régulier de $\mathscr{S}$ (c'est-à-dire $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$) et de $\mathscr{C}$ (c'est-à-dire $\gamma'(t_0) \neq (0,0,0)$).
Alors, la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 est incluse dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0.

Démonstration

On écrit, pour tout $t \in I$, $\gamma(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$.
Pour tout $t \in I$, on a $f\big(\gamma(t)\big) = 0$. Par la règle de la chaîne, on a : $\big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\big\rangle = 0$.
En particulier (prendre $t = t_0$), $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ est orthogonal à $\gamma'(t_0)$.
Or, comme $M_0 \in \mathscr{S}$ est régulier, donc $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ est un vecteur normal au plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0.
De plus, $M_0 \in \mathscr{C}$ est régulier, donc $\gamma'(t_0)$ dirige la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0.
Donc, la tangente à $\mathscr{C}$ en M_0 est incluse dans le plan tangent à $\mathscr{S}$ en M_0. □

V. Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

V.1. Dérivées partielles d'ordre 2

Dans cette partie, U désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$.

Définition 19.16 – Dérivée partielle d'ordre 2

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ une application, $a \in U$ et $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$.

On dit que f possède une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à la i-ème et la j-ème variable en a lorsque :

1. la fonction $\partial_j f$ existe au voisinage de a,
2. $\partial_j f$ possède une dérivée partielle par rapport à la i-ème variable en a notée $\partial^2_{i,j} f(a)$ où $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Lorsque $i = j$, on note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

Remarque 19.27 – Important

Quand on écrit $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$, on a dérivé d'abord par rapport à x_j, puis par rapport à x_i.

Définition 19.17 – Fonction de classe $\mathscr{C}^2$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application.

On dit que f est **de classe** $\mathscr{C}^2$ sur U lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U,
2. pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, la fonction $\partial_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ (la dérivée partielle de f d'ordre 1 par rapport à la i-ème variable) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

On note $\mathscr{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur U et à valeurs réelles.

Exemple 19.17

On a montré que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x) \times y^2 \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ et que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \quad \partial_1 f(x,y) = \frac{y^2}{x} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 2\ln(x) \times y.$$

L'application $\partial_1 f$ est rationnelle et son dénominateur de s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ dont, $\partial_1 f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.
De plus, les applications polynomiales $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. Comme ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, la fonction $\partial_2 f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.
Ainsi, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$.

Théorème 19.14

- Une fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^2$ sur son ensemble de définition.
- Une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^2$ sur son ensemble de définition.

Démonstration

On sait qu'une fonction polynomiale f (resp. rationnelle g) est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ (resp. $\mathscr{D}_g$).
De plus, les dérivées partielles d'une fonction polynomiale (resp. rationnelle) sont polynomiales et définies sur $\mathscr{D}_f$ (resp. rationnelles et définies $\mathscr{D}_g$).
Donc, ces dérivées partielles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$ (resp. $\mathscr{D}_g$). □

Théorème 19.15 – Schwarz

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
Pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ et $a \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Démonstration

Admis

Exemple 19.18

On a montré que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \ln(x) \times y^2 \end{array}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ et que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}, \quad \partial_1 f(x,y) = \frac{y^2}{x} \quad \text{et} \quad \partial_2 f(x,y) = 2\ln(x) \times y.$$

De plus, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$,

$$\partial^2_{2,1} f(x,y) = \partial_2(\partial_1 f)(x,y) = \frac{2y}{x} \quad \text{et} \quad \partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial_1(\partial_2 f)(x,y) = \frac{2y}{x}.$$

Exercice 19.1

Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on note

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\times y\times(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Conclure.

Résolution

1. Soit $(x,y)\neq(0,0)$.
Par inégalité triangulaire,
$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|x||y|\left|x^2-y^2\right|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x||y|\left(\left|x^2\right|+\left|y^2\right|\right)}{x^2+y^2}\leqslant\frac{|x||y|\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}\leqslant|x|\times|y|.$$
On note $\|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$ la norme euclidienne usuelle de (x,y). On sait que $|x|\leqslant\|(x,y)\|$ et $|y|\leqslant\|(x,y)\|$.
Donc,
$$|f(x,y)-f(0,0)|\leqslant\underbrace{\|(x,y)\|^2}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0}.$$
Par théorème d'encadrement, $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$. Donc,
f est continue sur $(0,0)$.

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, et, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\left(y\times(x^2-y^2)+2x^2\times y\right)\times(x^2+y^2)-2x^2\times y\times(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4\times y+4x^2\times y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$
Remarque : pour déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, on procède en général de la même manière, cependant, ici on remarque que $f(x,y)=-f(y,x)$.
Donc, en dérivant cette égalité par rapport à y, on a :
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=-\frac{y^4\times x+4y^2\times x^3-x^5}{(y^2+x^2)^2}.$$
De plus, pour tout $x\neq0$,
$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0\xrightarrow[x\to0]{}0\in\mathbb{R}.$$
Donc, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \text{ existe et } \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0}$.
D'autre part, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|\leqslant\frac{|x|^4\times|y|+4|x|^2\times|y|^3+|y|^5}{(x^2+y^2)^2}\leqslant\frac{6\|(x,y)\|^5}{\|(x,y)\|^4}\leqslant\underbrace{6\|(x,y)\|}_{\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0}.$$
Donc, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ est continue en } (0,0)}$.
De même, pour tout $y\neq0$,
$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0\xrightarrow[y\to0]{}0\in\mathbb{R}.$$
Donc, $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \text{ existe et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0}$.

De plus,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} -\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0.$$

Donc, $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} \text{ est continue en } (0,0)}$.

Ainsi, les dérivées partielles de f existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

3. Pour tout $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = -1 \xrightarrow[y\to 0]{} -1 \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existe et vaut } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1.$$

Pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \in \mathbb{R}.$$

Donc,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ existe et vaut } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1.$$

On a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.
Par la contraposée du théorème de Schwarz,

$$f \text{ n'est pas de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

V.2. Opérations sur les applications de classe $\mathscr{C}^2$

Théorème 19.16

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- L'application $\lambda.f + g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
- L'application $f \times g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Démonstration

Appliquer les résultats sur les opérations des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ à f et $\partial_i f$. □

Corollaire 19.3

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ et $g : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ qui ne s'annule pas sur U.
- L'application $\dfrac{1}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
- L'application $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Démonstration

Appliquer les résultats sur les opérations des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ à f, puis à $\partial_i f$. □

Théorème 19.17

Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur U. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $f(U) \subset I$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur I.
L'application $\varphi \circ f$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Démonstration

Appliquer les résultats sur les opérations des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ à f, puis à $\partial_i f$. □

Exemple 19.19 – Fonction linéaire

On a montré que toute application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$ et que ses dérivées partielles sont constantes.
On en déduit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$ et que toutes ses dérivées partielles d'ordre 2 sont nulles.
Remarque : Si on se place dans le cas $p = 1$, ce résultat ne vous surprendra plus ! En effet, une application linéaire f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \times f(1)$: c'est une expression polynomiale de degré 1, en dérivant 2 fois, on trouve donc 0.

V.3. Matrice hessienne

Définition 19.18 – Matrice hessienne

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
Pour tout $a \in U$, on définit la **matrice hessienne en** a par :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}$$

Exemple 19.20

Lorsque $p = 2$, on a :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Lorsque $p = 3$, on a :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(a) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}(a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Remarque 19.28 – Laplacien

Le **laplacien de** f **en** a est défini par :

$$\Delta f(a) = \operatorname{tr}\big(H_f(a)\big).$$

En particulier,

- lorsque $p = 2$,
$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y).$$
- lorsque $p = 3$,
$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z).$$

Exemple 19.21

La fonction polynomiale $f : (x,y) \mapsto x^3 + x^2 \times y^2 + y^3$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + 2y^2 & 4x \times y \\ 4x \times y & 2x^2 + 6y \end{pmatrix}.$$

Exercice 19.2

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
Montrer que, pour tout $a \in U$, $H_f(a)$ est diagonalisable.

Résolution

Soit $a \in U$.
Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, par le théorème de Schwarz, la matrice $H_f(a)$ est symétrique réelle.
Donc, par le théorème spectral, $H_f(a)$ est diagonalisable.

Théorème 19.18 – Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
Pour tout $a \in U$,

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Démonstration

Admis

Remarque 19.29 – Réécriture à l'aide d'un produit scalaire

On a :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\langle h, H_f(a)h\rangle + o(\|h\|^2).$$

VI. Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Définition 19.19 – Extremum

Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}^p$, $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

- On dit que f admet un **maximum (global)** (resp. un **minimum (global)**) en a lorsque, pour tout $x \in A$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
  Ce maximum (resp. minimum) est **strict** lorsque, pour tout $x \in A$, avec $x \neq a$, $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).
- On dit que f admet un **extremum (global)** en a lorsque f possède un maximum (global) ou un minimum (global) en a.
- On dit que f admet un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en a lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $f_{|A \cap B_o(a,r)}$ admet un maximum (resp. minimum) en a.
  Autrement dit, pour tout $x \in A \cap B_o(a,r)$, $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$).
  Ce maximum (resp. minimum) est **strict** lorsque, pour tout $x \in A \cap B_o(a,r)$, avec $x \neq a$, $f(x) < f(a)$ (resp. $f(x) > f(a)$).
- On dit que f admet un **extremum local** en a lorsque f possède un maximum local ou un minimum local en a.

Remarque 19.30

Un extremum global est un extremum local. La réciproque est fausse.

L'objectif de cette partie est de généraliser le résultat (rappelé ci-dessous) bien connu pour une fonction de la variable réelle et à valeurs réelles :

Théorème 19.19

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Si a est un point intérieur à I, f est dérivable en a et f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème 19.20 – Condition Nécessaire d'extremum

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert non vide U de $\mathbb{R}^p$.

Si f possède un extremum local en un point $a \in U$, alors $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}$.

Démonstration

On suppose que f possède un minimum local en a (le cas « maximum local » se traite de la même manière). Il existe alors $r > 0$ tel que, pour tout $x \in U \cap B_o(a,r)$, $f(x) \geqslant f(a)$. Comme U est un ouvert, quitte à choisir $r' \in]0,r[$, on peut supposer $B_o(a,r) \subset U$.
Soit $i \in [\![1,p]\!]$.
Pour tout $h \in]0,r[$, $a + h.e_i \in B_o(a,r)$ et $f(a+h.e_i) \geqslant f(a)$. D'où, $\dfrac{f(a+h.e_i)-f(a)}{h} \geqslant 0$ et en passant à la limite, $\partial_i f(a) \geqslant 0$.
De même, pour tout $h \in]-r,0[$, $a + h.e_i \in B_o(a,r)$ et $f(a+h.e_i) \geqslant f(a)$. D'où, $\dfrac{f(a+h.e_i)-f(a)}{h} \leqslant 0$ et en passant à la limite, $\partial_i f(a) \leqslant 0$.
Donc, $\partial_i f(a) = 0$. Ainsi, $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}$.

Remarque 19.31

Dire que $\mathrm{d}f(a)$ est la forme linéaire nulle est équivalent à dire que $\nabla f(a) = 0$ ou encore à, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Définition 19.20 – Point critique

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

On dit que $a \in U$ **est un point critique de** f lorsque $\mathrm{d}f(a) = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})}$.

Exercice 19.3

Soit $A \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer que l'application $(\cdot|\cdot) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ (X,Y) & \mapsto & X^\top AY \end{array}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^p$.

Résolution

A faire en classe.

Théorème 19.21 – Condition suffisante d'extremum local

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.
On suppose que $a \in U$ est un point critique de f.

- Si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ (i.e. toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives), alors f atteint un minimum local strict en a.
- Si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ (i.e. une des valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives), alors f n'a pas de minimum en a.
- Si $-H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$ (i.e. toutes les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives), alors f atteint un maximum local strict en a.
- Si $-H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$ (i.e. une des valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives), alors f n'a pas de maximum en a.

Démonstration

- On suppose que $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.
  Comme a est un point critique, $\nabla f(a) = 0$. D'où, par la formule de Taylor-Young,
  $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \frac{1}{2}\langle h, H_f(a)h\rangle + o(\|h\|^2).$$
  On considère le produit scalaire $(X|Y) = X^\top H_f(a)Y$. On note $N(X) = \sqrt{(X|X)} = \sqrt{X^\top H_f(a)X} = \sqrt{\langle X, H_f(a)X\rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire.
  Or, en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes donc,
  $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \frac{1}{2}N(h)^2 + o\big(N(h)^2\big).$$
  D'où,
  $$\frac{f(a+h)-f(a)}{N(h)^2} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2} > 0.$$
  On en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ tel que $\|h\| < \eta$ et $a+h \in U$, on a $f(a+h) > f(a)$.
  Donc f possède un minimum local strict en a.
- On suppose que $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$. Il existe donc $x \in \mathbb{R}^p$ tel que $\langle x, H_f(a)x\rangle < 0$.
  En notant $h = t.x$, on a :
  $$f(a+h) \underset{t\to 0}{=} f(a) + \frac{t^2}{2}\langle x, H_f(a)x\rangle + o(t^2).$$
  Donc, $f(a+t.h) - f(a) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2}\langle x, H_f(a)x\rangle < 0$.
  Donc, pour t proche de 0, $f(a+t.h) - f(a) < 0$.
  Ainsi, f ne possède pas de minimum en a.
- Appliquer le premier point avec f remplacée par $-f$.
- Appliquer le deuxième point avec f remplacée par $-f$. □

Remarque 19.32

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Lorsque qu'une matrice $-A \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$, on dit que A est symétrique négative. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} A \text{ est symétrie négative} &\iff A \text{ est symétrique et, pour tout } X \in \mathbb{R}^p,\ X^\top AX \leqslant 0 \\ &\iff A \text{ est symétrique et toutes ses valeurs propres sont négative ou nulles.} \end{aligned}$$

Lorsque qu'une matrice $-A \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, on dit que A est symétrique définie négative.

$$\begin{aligned} A \text{ est symétrie définie négative} &\iff A \text{ est symétrique et, pour tout } X \in \mathbb{R}^p \text{ avec } X \neq 0,\ X^\top AX < 0 \\ &\iff A \text{ est symétrique et toutes ses valeurs propres sont strictement négatives.} \end{aligned}$$

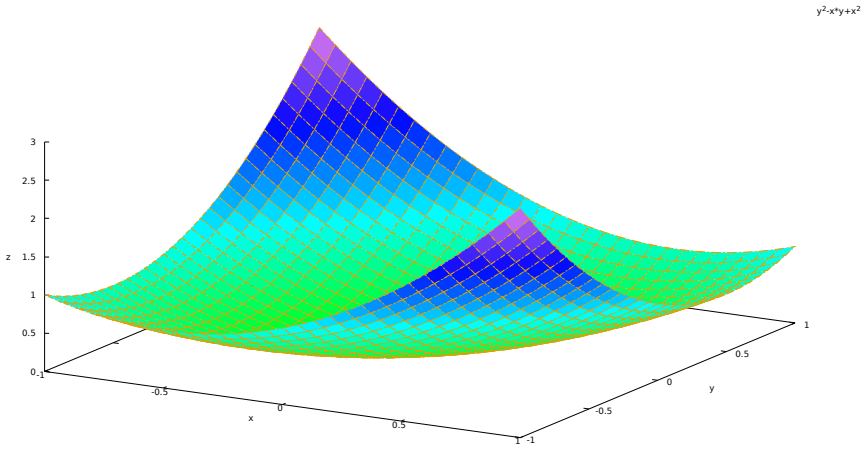
Exemple 19.22

- La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - x \times y + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+2y \end{pmatrix}$.

  Le seul point critique de f est $(0,0)$. De plus,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Le polynôme caractéristique de $H_f(0,0)$ est $(X-2)^2 - 1 = (X-1)(X-3)$.
  Donc, les valeurs propres de $H_f(0,0)$ sont $1 > 0$ et $3 > 0$.
  Donc, $H_f(0,0) \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.
  Par théorème, f possède un minimum local strict en $(0,0)$.



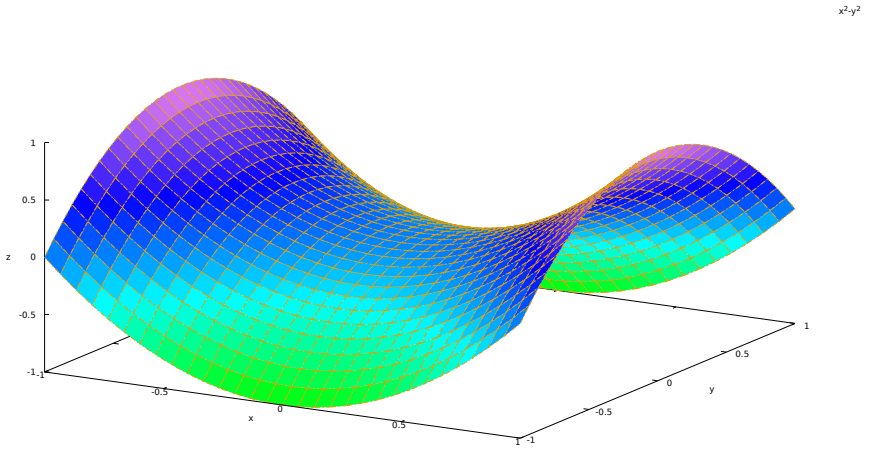
  Remarque : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geqslant f(0,0)$.
  Donc, f possède un minimum global en $(0,0)$.

- La fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$.

  Le seul point critique de f est $(0,0)$. De plus,

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $H_f(0,0)$ est ni symétrique positive ni symétrique négative, donc f ne possède pas d'extremum en $(0,0)$ (remarque : on dit que $(0,0)$ est un **point selle**).



Théorème 19.22 – Condition suffisante d'extremum local : cas particulier où $p=2$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
On suppose que $a \in U$ est un point critique de f.

- si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(a)) > 0$, alors f possède un minimum local strict en a.
- si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\operatorname{tr}(H_f(a)) < 0$, alors f possède un maximum local strict en a.
- si $\det(H_f(a)) < 0$, alors f ne possède pas d'extremum en a (on dit que a est un **point selle**).

Démonstration

Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, la matrice $H_f(a)$ est symétrique réelle.
Donc, par le théorème spectral, f est diagonalisable.
On note λ et μ les valeurs propres de $H_f(a)$. On a alors :

$$\det\big(H_f(a)\big) = \lambda \times \mu \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) = \lambda + \mu.$$

- On suppose que $\det\big(H_f(a)\big) > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) > 0$.
  Comme $\det\big(H_f(a)\big) > 0$, on sait que λ et μ sont de même signes.
  Comme $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) > 0$, il vient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$.
  Donc, $H_f(a) \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.
  Par théorème, f possède un minimum local strict en a.
- On suppose que $\det\big(H_f(a)\big) > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) < 0$.
  Comme $\det\big(H_f(a)\big) > 0$, on sait que λ et μ sont de même signes.
  Comme $\operatorname{tr}\big(H_f(a)\big) < 0$, il vient $\lambda < 0$ et $\mu < 0$.
  Donc, $-H_f(a) \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.
  Par théorème, f possède un maximum local strict en a.
- On suppose que $\det(H_f(a)) < 0$.
  Dans ce cas λ et μ sont de signes contraires et non nuls.
  Donc, $H_f(a) \notin \mathscr{S}_2^{+}(\mathbb{R})$ et $-H_f(a) \notin \mathscr{S}_2^{+}(\mathbb{R})$.
  Par théorème, f ne possède pas d'extremum local en a.

□

Méthode 19.2 – Cas d'une partie fermée bornée

Soit K une partie non vide fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Par le théorème des bornes atteintes, on sait que f est bornée et atteint ses bornes : autrement dit, f possède un maximum et un minimum sur K.

Lorsque f est de plus de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ensemble des points intérieurs à K, pour déterminer les points en lesquels f atteint ses bornes, on :

1. détermine les points critiques de f en les points intérieurs à K.
2. compare la valeur de f en ces points critiques **et les valeurs de f la frontière de K**.

Exemple 19.23

Soit $f : \begin{array}{ccc}[0,3]\times[1,5] & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-2x-4y\end{array}$. On note $\Delta = [0,3]\times[1,5]$.
La fonction f est polynomiale donc continue sur Δ. De plus, Δ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
Donc, par le théorème des bornes atteintes, f est bornée et atteint ses bornes.
On détermine maintenant les points où f atteint son maximum et son minimum.

► La fonction polynomiale f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'ouvert $]0,3[\times]1,5[$. De plus, pour tout $(x,y)\in]0,3[\times]1,5[$, $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}2x-2\\2y-4.\end{pmatrix}$

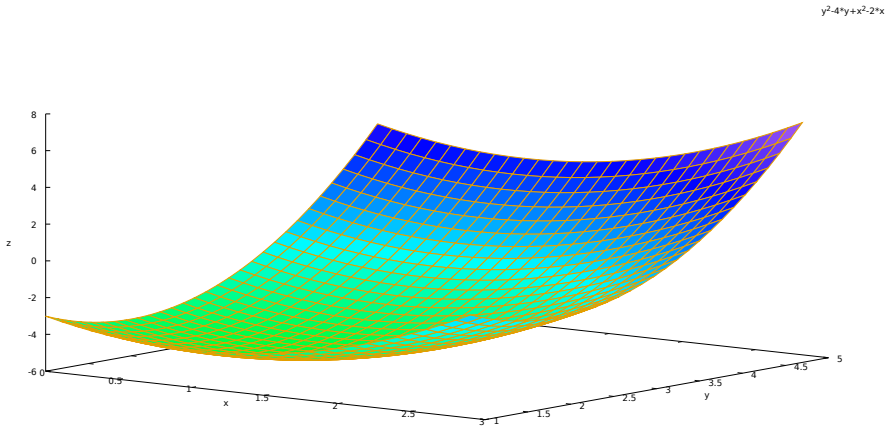
D'où, le seul point critique de f est $(1,2)$. De plus, $H_f(1,2) = \begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix} = 2I_2 \in \mathscr{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

Donc, f possède un minimum local en $(1,2)$ et $f(1,2) = -5$.

► Et le maximum ? Il est atteint sur la frontière !

- Pour tout $x\in[0,3]$, $f(x,1) = x^2-2x-3$. Or, la fonction $x\mapsto x^2-2x-3$ admet 0 pour maximum atteint en 3 et -4 pour minimum (faire une étude de fonction rapide).
- Pour tout $x\in[0,3]$, $f(x,5) = x^2-2x+5$. Or, la fonction $x\mapsto x^2-2x+5$ admet 8 pour maximum atteint en 3 et 4 pour minimum (translation de la fonction précédente).
- Pour tout $y\in[1,5]$, $f(0,y) = y^2-4y$. Or, la fonction $y\mapsto y^2-4y$ admet 5 pour maximum atteint en 5 et -4 pour minimum.
- Pour tout $y\in[1,5]$, $f(3,y) = y^2-4y+3$. Or, la fonction $y\mapsto y^2-4y+3$ admet 8 pour maximum atteint en 5 et -1 pour minimum.

Ainsi, f a 8 pour maximum atteint en $(3,5)$, et a -5 comme minimum atteint en $(1,2)$.



VII. Application aux équations aux dérivées partielles

Définition 19.21 – Équation aux dérivées partielles

On appelle équation aux dérivées partielles toute équation faisant intervenir les dérivées partielles d'une fonction inconnue f.

Remarque 19.33

Il n'y a pas de résultat général à connaître pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP). On traite quelques exemples et on en retiendra que :

Pour résoudre une EDP, on travaille par **analyse-synthèse**.

VII.1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ où $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Analyse

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une solution de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.
Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $x \mapsto f(x,y)$ est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle. On en déduit que cette fonction est constante, on note $\varphi(y)$ sa valeur.
On définit ainsi une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(y)$.
De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : y \mapsto f(0,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (règle de la chaîne).

Synthèse

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(y)$.
Comme $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction f possède des dérivées partielles par rapport à ses deux variables et, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi'(y)$.
Comme $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les dérivées partielles de f sont continues sur $\mathbb{R}^2$, donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Conclusion

L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'EDP $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(y) \end{array} \middle| \varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}.$$

VII.2. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ où $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

En procédant comme dans le paragraphe précédent, on montre que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^2$ de l'EDP $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \varphi(x) \end{array} \middle| \varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}.$$

VII.3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ où $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Analyse

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une solution de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle. On en déduit que cette fonction est constante, on note $\varphi(y)$ sa valeur.

On définit ainsi une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(y)$.

De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $\varphi : y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (règle de la chaîne).

Soit Φ une primitive de φ sur $\mathbb{R}$. La fonction Φ est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La fonction $y \mapsto f(x, y) - \Phi(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $y \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \varphi(y) = 0$.

On en déduit que la fonction $y \mapsto f(x, y) - \Phi(y)$ est constante, on note $\Psi(x)$ sa valeur.

De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, la fonction $\Psi : x \mapsto f(x, 0) - \Phi(0)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (règle de la chaîne).

Synthèse

Soit Φ et Ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \Phi(y) + \Psi(x)$.

Comme Φ et Ψ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f possède des dérivées partielles par rapport à ses deux variables et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \Psi'(x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \Phi'(y)$.

Comme Φ et Ψ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, les dérivées partielles de f possèdent des dérivées partielles et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \Psi''(x)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \Phi''(y)$.

Comme Φ et Ψ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, les dérivées partielles d'ordre 2 de f sont continues sur $\mathbb{R}$. Donc, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'EDP $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ est :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \Psi(x) + \Phi(y) \end{array} \middle| \Psi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ et } \Phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \right\}.$$

Remarque 19.34

Les résolutions des trois derniers paragraphes se généralisent à des équations de la forme $\dfrac{\partial f}{\partial x} = g$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = g$ ou $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = g$ avec g une fonction de continue sur $\mathbb{R}^2$.

On procède de la même manière : geler une variable et primitiver.

VII.4. Équation des ondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ et $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ – Changement de variables linéaire

Analyse

Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ solution de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

► On utilise le **changement de variables** $x = a\times u + b\times v$ et $t = c\times u + d\times v$.

Pour cela, on considère $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (a\times u + b\times v, c\times u + d\times v) \end{array}$. L'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le changement de variable se récrit : $(x,y) = \varphi(u,v)$.

On en déduit que φ est bijective si, et seulement si, $a\times d - b\times c \neq 0$. Par la suite, on choisira convenablement (a,b,c,d) pour que cette condition soit vérifiée. On pourra alors écrire $(u,v) = \varphi^{-1}(x,y)$.

► On pose $g(u,v) = f\circ\varphi(u,v) = f(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v)$. Les fonctions polynomiales $(u,v)\mapsto a\times u + b\times v$ et $(u,v)\mapsto c\times u + d\times v$ sont de classe $\mathscr{C}^2$, donc, par composition, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = b\times\frac{\partial f}{\partial x}(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v) + d\times\frac{\partial f}{\partial t}(a\times u + b\times v, c\times u + d\times v)$$

puis, en dérivant par rapport à u et en appliquant le théorème de Schwarz (f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$),

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = a\times b\times\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a\times u+b\times v, c\times u+d\times v) + (b\times c + a\times d)\times\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t}(a\times u+b\times v, c\times u+d\times v) + c\times d\times\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(a\times u+b\times v, c\times u+d\times v)$$

Pour alléger les notations, on écrit abusivement :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = a\times b\times\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (b\times c + a\times d)\times\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} + c\times d\times\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Comme f est solution de l'EDP, on a :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = (b\times c + a\times d)\times\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial t} + \left(\frac{a\times b}{\alpha^2} + c\times d\right)\times\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Pour se ramener au cas du paragraphe précédent, on choisit $a = b = \alpha$, $c = -1$ et $d = 1$.
Le déterminant de φ est alors $2\alpha \neq 0$ et φ est alors une bijection.

Exercice 19.4

Reprendre ce qui précède en prenant directement : $a = b = \alpha$, $c = -1$ et $d = 1$.

Si f est solution de l'équation des ondes alors, g est solution de l'EDP $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0$.
En procédant comme dans le paragraphe précédent (partie analyse), on en déduit qu'il existe Φ et Ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que,

$$\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2,\ g(u,v) = \Psi(u) + \Phi(v).$$

► Il reste maintenant à revenir à f. Pour cela, on inverse φ. En effet, on a : $f = g\circ\varphi^{-1}$.
La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et son inverse est $\dfrac{1}{2\alpha}.\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.
D'où, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $(u,v) = \varphi^{-1}(x,t) = \dfrac{1}{2\alpha}.(x-\alpha\times t, x+\alpha\times t)$.
D'où, $f(x,t) = \Psi\left(\dfrac{x-\alpha\times t}{2\alpha}\right) + \Phi\left(\dfrac{x+\alpha\times t}{2\alpha}\right)$.

Synthèse

Soient Φ et Ψ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On pose, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,t)=\Psi\left(\dfrac{x-\alpha\times t}{2\alpha}\right)+\Phi\left(\dfrac{x+\alpha\times t}{2\alpha}\right)$.
Les fonctions polynomiales $(x,t)\mapsto\dfrac{x-\alpha\times t}{2\alpha}$ et $(x,t)\mapsto\dfrac{x+\alpha\times t}{2\alpha}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc, par composition, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{2\alpha}\times\Psi'\left(\frac{x-\alpha\times t}{2\alpha}\right)+\frac{1}{2\alpha}\times\Phi'\left(\frac{x+\alpha\times t}{2\alpha}\right)\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=\frac{1}{4\alpha^2}\times\Psi''\left(\frac{x-\alpha\times t}{2\alpha}\right)+\frac{1}{4\alpha^2}\times\Phi''\left(\frac{x+\alpha\times t}{2\alpha}\right)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)=-\frac{1}{2}\times\Psi'\left(\frac{x-\alpha\times t}{2\alpha}\right)+\frac{1}{2}\times\Phi'\left(\frac{x+\alpha\times t}{2\alpha}\right)\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)=\frac{1}{4}\times\Psi''\left(\frac{x-\alpha\times t}{2\alpha}\right)+\frac{1}{4}\times\Phi''\left(\frac{x+\alpha\times t}{2\alpha}\right)$$

On a bien $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)=\dfrac{1}{\alpha^2}\times\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t)$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'EDP $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{1}{\alpha^2}\times\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ est :

$$\left\{(x,y)\mapsto\Psi\left(\frac{x-\alpha\times t}{2\alpha}\right)+\Phi\left(\frac{x+\alpha\times t}{2\alpha}\right)\middle|\,\Psi\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\text{ et }\Phi\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}.$$

VII.5. $x\times\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\times\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ où $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ – changement de variables : coordonnées polaires

Remarque 19.35 – Coordonnées polaires : lorsqu'on travaille sur $\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}$

On sait que (faire un dessin) l'application $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^\star\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[&\to&\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}\\(r,\theta)&\mapsto&\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)\end{array}$ est une bijection. Donnons l'expression de φ^{-1}.
Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}$. On note (r,θ) l'unique couple de $\mathbb{R}_+^\star\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $x=r\times\cos(\theta)$ et $y=r\times\sin(\theta)$.
On a alors $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$. De plus, comme $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x\neq0$ et $\tan(\theta)=\dfrac{y}{x}$.
Or, tan est un bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est Arctan.
D'où, $\theta=\text{Arctan}(\tan(\theta))=\text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
Ainsi, $\varphi^{-1}:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^\star\times\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}_+^\star\times\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\(x,y)&\mapsto&\left(\sqrt{x^2+y^2},\text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)\end{array}$.

Analyse

► Soit f une solution de $x\times\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\times\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ sur $U=\mathbb{R}_+^\star\times R$ (c'est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$).
On utilise le **changement de variables** $x=r\times\cos(\theta)$ et $y=r\times\sin(\theta)$.
Pour cela, on considère l'application de la remarque : $\varphi:\begin{array}{ccc}V&\to&U\\(r,\theta)&\mapsto&\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)\end{array}$ où $V=\mathbb{R}_+^\star\times\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.
On pose $g(r,\theta)=f\circ\varphi(r,\theta)=f\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)$.
Les fonctions $(r,\theta)\mapsto r\times\cos(\theta)$ et $(r,\theta)\mapsto r\times\sin(\theta)$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur V. Donc, g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur V.

De plus, pour tout $(r,\theta)\in V$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) &= \cos(\theta)\times\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)+\sin(\theta)\times\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)\\ &= \frac{1}{r}\times\left(r\times\cos(\theta)\times\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)+r\times\sin(\theta)\times\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)\right).\end{aligned}$$

► Or, φ est bijective (en fait surjective suffit ici). Donc, si f est solution de $x\times\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\times\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ sur U, alors g est solution de $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=0$ sur V.

En procédant comme dans un paragraphe précédent, g est solution de $\dfrac{\partial g}{\partial r}=0$ sur V si, et seulement si, il existe ψ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ telle que, pour tout $(r,\theta)\in V$, $g(r,\theta)=\psi(\theta)$.

► Il reste maintenant à revenir à f. Pour cela, on utilise φ^{-1}. En effet, $f=g\circ\varphi^{-1}$.

Pour tout $(x,y)\in U$, $f(x,y)=g\big(\varphi^{-1}(x,y)\big)=g\left(\sqrt{x^2+y^2},\text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)=\psi\left(\text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$.

La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc, par composition, $\psi\circ\text{Arctan}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, il existe $\Psi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(x,y)\in U$, $f(x,y)=\Psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Synthèse

On pose, pour tout $(x,y)\in U$, $f(x,y)=\Psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où $\Psi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

La fonction rationnelle $(x,y)\mapsto\dfrac{y}{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U (son dénominateur ne s'annule pas sur U), donc, par composition, f est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

De plus, pour tout $(x,y)\in U$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-y}{x^2}\times\Psi'\left(\frac{y}{x}\right)\quad\text{et}\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{x}\times\Psi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

D'où, $x\times\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\times\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$. Donc f est solution de $x\times\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\times\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$.

Conclusion

L'ensemble des solutions de l'EDP $x\times\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\times\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ est :

$$\left\{(x,y)\mapsto\Psi\left(\frac{y}{x}\right)\,|\,\Psi\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}.$$

Remarque 19.36 – Coordonnées polaires : lorsqu'on travaille sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)|x\in\mathbb{R}_-\}$

On sait que (faire un dessin) l'application $\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^\star\times]-\pi,\pi[&\to&\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)|x\in\mathbb{R}_-\}\\(r,\theta)&\mapsto&\big(r\times\cos(\theta),r\times\sin(\theta)\big)\end{array}$ est une bijection. Donnons l'expression de φ^{-1}.

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)|x\in\mathbb{R}_-\}$. On note (r,θ) l'unique couple de $\mathbb{R}_+^\star\times]-\pi,\pi[$ tel que $x=r\times\cos(\theta)$ et $y=r\times\sin(\theta)$.

On a alors $r=\sqrt{x^2+y^2}>0$.

Attention, comme $\theta\in]-\pi,\pi[$, on peut avoir $\theta\neq\tan(\text{Arctan}(\theta))$.

On note $z=x+iy$. On a $z+r=r\times e^{i\theta}+r=2r\times\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ (factoriser par l'angle moitié $e^{i\frac{\theta}{2}}$ et utiliser la formule d'Euler).

D'où, en prenant les parties réelle et imaginaire de $z+r$, on a : $x+r=2r\times\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\times\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ et $y=2r\times\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Or, $\dfrac{\theta}{2}\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc, $x+r\neq0$, puis $\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{y}{x+r}$, puis, $\dfrac{\theta}{2}=\text{Arctan}\left(\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right)=\text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x+r}\right)$.

D'où, $\theta=2\,\text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x+r}\right)$.

$$\text{Ainsi, } \varphi^{-1}: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \in \mathbb{R}_-\} & \to & \mathbb{R}_+^\star \times]-\pi,\pi[\\ (x,y) & \mapsto & \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right). \end{array}$$