

TD S8.1 - Interférences et ondes stationnaires

1 Onde résultante de la superposition de deux ondes sinusoïdales

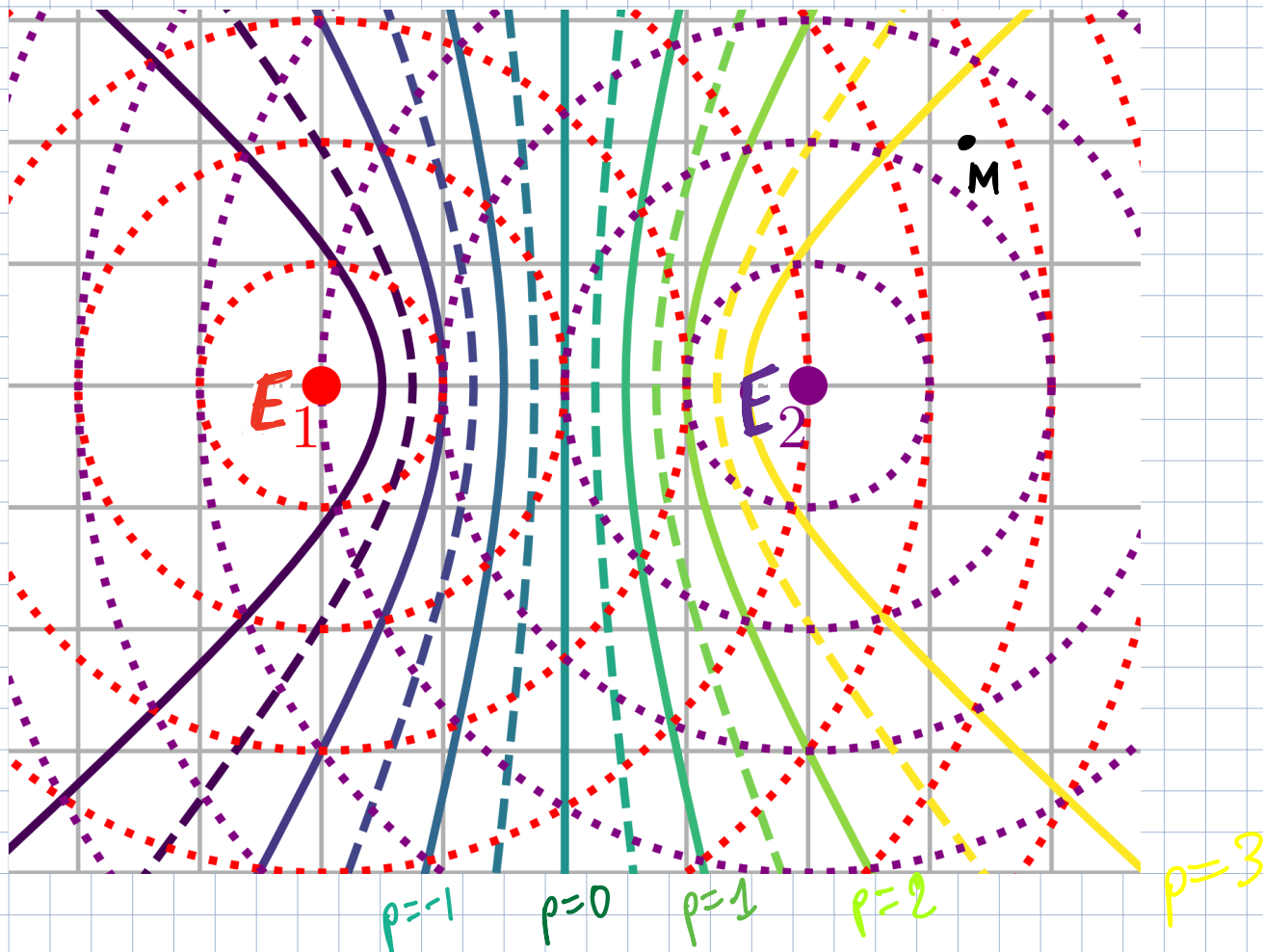
Deux émetteurs d'ondes mécaniques E_1 et E_2 émettent chacun une onde de même amplitude, de même fréquence et en phase :

$$s_1(E_1, t) = s_2(E_2, t) = A \sin(\omega t)$$

1.1. Ces deux ondes peuvent-elles interférer ? Pourquoi ?

Ces deux ondes peuvent interférer car elles ont la même fréquence.

1.2. Donner un exemple et décrire les observations.



1.3. Soit un point M de l'espace, pourquoi les signaux arrivant en M sont-ils déphasés ?

Gm a :

$$s_1(r_1, t) = s_1 \left(E_1, t - \frac{E_1 M}{c} \right) = A \sin \left(\omega \left(t - \frac{E_1 M}{c} \right) \right) \\ = A \sin \left(\omega t - \underbrace{k E_1 M}_{\varphi_1} \right) \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

De même $s_2(r_2, t) = A \sin \left(\omega t - \underbrace{k E_2 M}_{\varphi_2} \right)$

Le déphasage de l'onde 2 par rapport à l'onde 1 s'écrit :

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -k E_2 M + k E_1 M = \frac{2\pi}{\lambda} \underbrace{(E_1 M - E_2 M)}_{\delta(M)}$$

$\delta(M)$: différence de marche en M .

$\delta(M)$ n'est pas nécessairement un multiple de λ et les 2 ondes ne sont donc pas nécessairement en phase en M .

1.4. Calculer le déphasage des deux ondes au point M , noté $\varphi(M)$.

Gm a $\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda} \delta(M)$ d'où $\delta(M) = \frac{\lambda}{2\pi} \varphi(M)$.

1.5. Retrouver alors les conditions d'interférences constructives et destructives.

• Il y a interférences constructives si :

$$\varphi(M) = n \times 2\pi \Leftrightarrow \delta(M) = n \times \cancel{2\pi} \times \frac{\lambda}{\cancel{2\pi}} = n \lambda, \quad n \in \mathbb{Z}$$

• Il y a interférences destructives si :

$$\varphi(M) = \pi + m \cdot 2\pi \Leftrightarrow \delta(M) = \frac{\lambda}{2} + m \cdot \lambda, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Remarque : Gm note $p(M) \triangleq \frac{\delta(M)}{\lambda}$ l'ordre d'interférence.
 p est entier si M est un lieu d'interf. constructives.

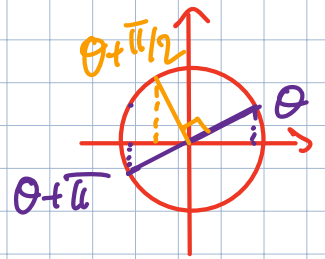
2 Position des nœuds et des ventres

Sur une corde vibrante d'axe (Ox) , on superpose deux ondes sinusoïdales progressives, de même pulsation et de même amplitude A , mais se propageant en sens inverse à la célérité c :

$$\psi_1(x,t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \quad \text{et} \quad \psi_2(x,t) = A \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$$

2.1. Le point $x = 0$ est un nœud de vibration, en déduire φ .

Cela signifie que $\psi(0,t) = 0 \quad \forall t \Leftrightarrow \psi_1(0,t) + \psi_2(0,t) = 0$
 $\Leftrightarrow A \cos(\omega t) + A \cos(\omega t + \varphi) = 0$
 $\Leftrightarrow \varphi = \pi$



2.2. A l'aide de la relation de trigonométrie

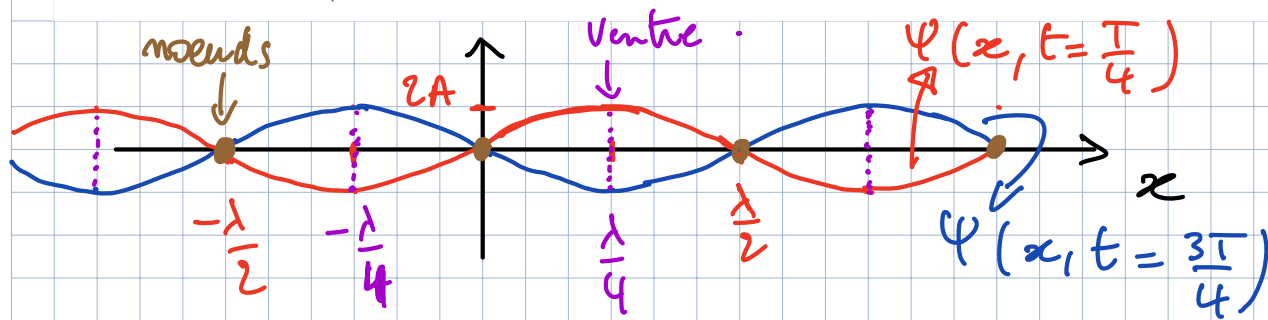
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

déterminer l'expression de l'amplitude de l'onde résultante $\psi(x,t)$.

Rappel : $\psi_1(x,t) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$ et $\psi_2(x,t) = A \cos\left(\omega\left(t + \frac{x}{c}\right) + \pi\right)$

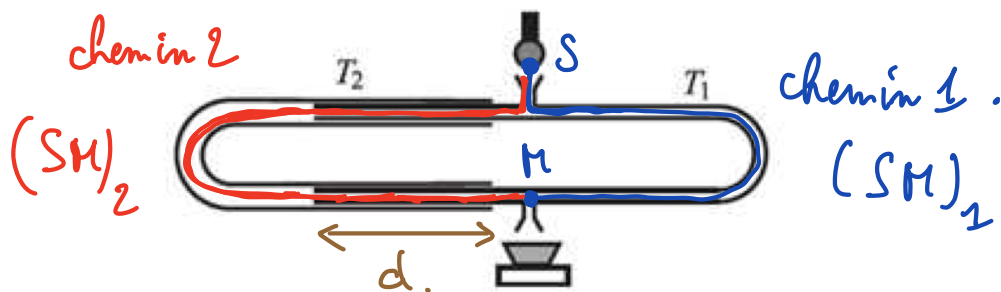
On a $\psi(x,t) = \psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)$
 $= A \left[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \pi) \right]$
 $= 2A \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx + \pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx - \pi}{2}\right)$
 $= 2A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \times \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)$
 $= 2A (-\sin(\omega t)) \times (-\sin(kx))$
 $= 2A \sin(kx) \times \sin(\omega t) = \underbrace{F(x)}_{\text{onde statio.}} \times G(t)$

2.3. Pourquoi parle-t-on d'onde stationnaire ? En donner les caractéristiques (positions des nœuds et ventres).



3 Mesure de la vitesse du son

Le trombone de KOENIG est un dispositif de laboratoire permettant de faire interférer deux ondes sonores ayant suivi des chemins différents. Le haut-parleur alimenté par un générateur de basses fréquences émet un son de fréquence $f = 1500 \text{ Hz}$.



On mesure le signal à la sortie d'un microphone branché sur un oscilloscope. En déplaçant la partie T2, on fait varier l'amplitude du signal observé. Elle passe deux fois de suite par une valeur minimale lorsqu'on déplace T2 de $d = 11,5 \text{ cm} \pm 2 \text{ mm}$.

3.1. Déterminer la valeur de la célérité du son dans l'air à 20°C , température à laquelle l'expérience est faite.

Onde 1 en M : $s_1(M, t) = s_1(S, t - \frac{(SM)_1}{c})$

Onde 2 en M : $s_2(M, t) = s_2(S, t - \frac{(SM)_2}{c})$

1^{ère} position de trombone :

$$(SM)_2 - (SM)_1 = n\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{nœud en M}) \quad n \in \mathbb{N}$$

2^{ème} position du trombone :

$$(SM)_2 + 2d - (SM)_1 = (n+1)\lambda + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{nœud en M})$$

$\Rightarrow$

$$2d = \lambda$$

$$c = \lambda f = 2d f = 2 \times 14,5 \times 10^{-2} \times 1500$$

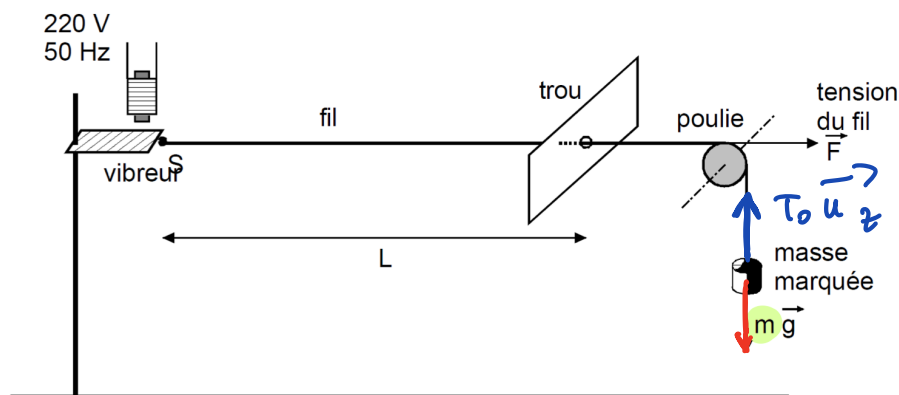
$$= 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4 Corde de Melde

Une corde de MELDE de longueur finie est excitée en $x = 0$ par un vibreur de faible amplitude et de fréquence f variable, et passe en $x = L$ par la gorge d'une poulie. Elle est tendue par une masse m accrochée à l'extrémité de la corde.

4.1. Faire un schéma et décrire le phénomène observé lorsqu'on modifie la fréquence f d'excitation.

Schéma de l'expérience



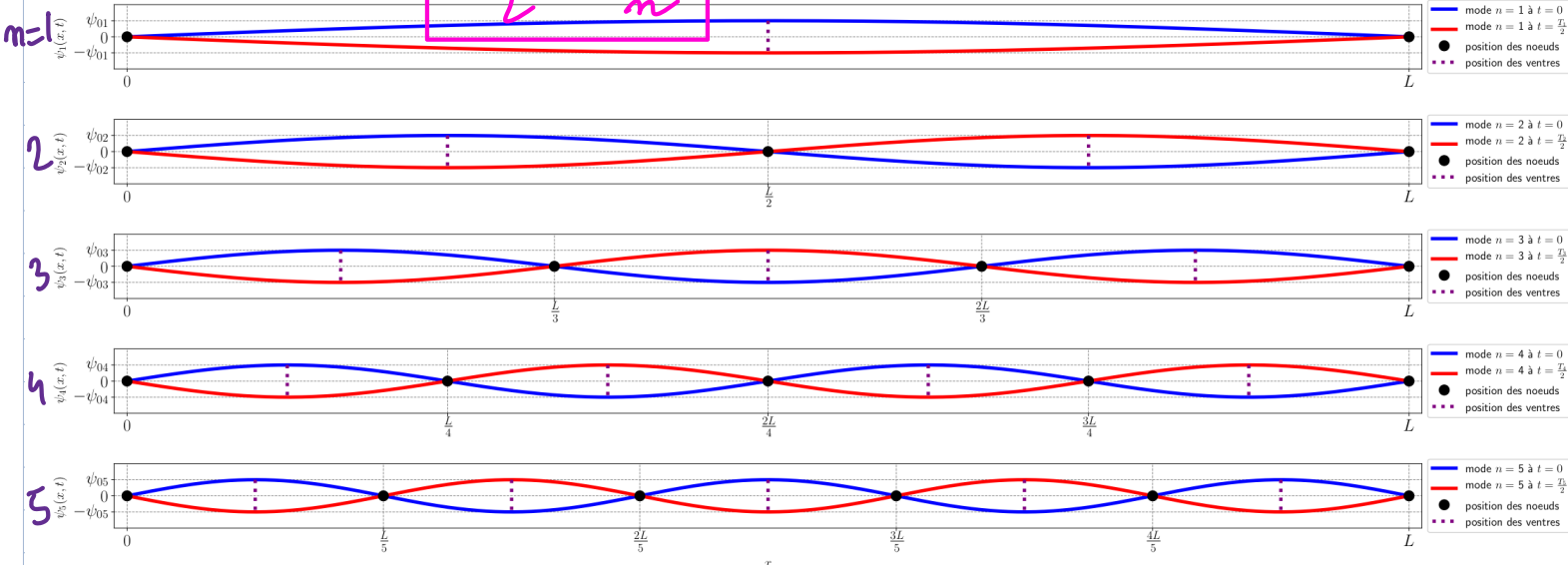
$$T_0 - mg = 0$$

$$\Rightarrow T_0 = mg.$$

4.2. Exprimer la longueur L en fonction de la longueur d'onde λ_n du mode n concerné et en déduire les fréquences f_n des modes propres en fonction de n , L et c .

lorsque la corde entre résonance le vibreur est quasi confondu avec un nœud.

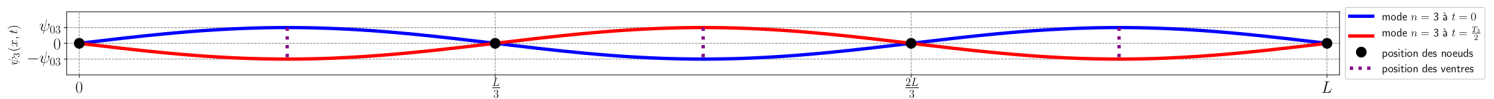
$$\frac{\lambda_n}{2} = \frac{L}{n}$$



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

On a $f_n = \frac{c}{\lambda_n}$ donc $f_n = c \times \frac{n}{2L}$

4.3. Représenter la corde dans le mode $n = 3$. La corde vibrante a une masse linéique $\mu = 50 \text{ g.m}^{-1}$ et la masse permettant de la tendre (accrochée à l'extrémité libre après la poulie) est $m = 500 \text{ g}$. La célérité des ondes sur une corde est donnée par l'expression $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ où T_0 est la tension de la corde.



4.4. Vérifier l'homogénéité de cette expression.

$$[c] = \left(\frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{M} \cdot \text{L}^{-1}} \right)^{1/2} = (\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2})^{1/2} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$$

4.5. Commenter les variations de c en fonction de T_0 et μ , puis calculer c pour l'expérience considérée.

$$c = \left(\frac{T_0}{\mu} \right)^{1/2}$$

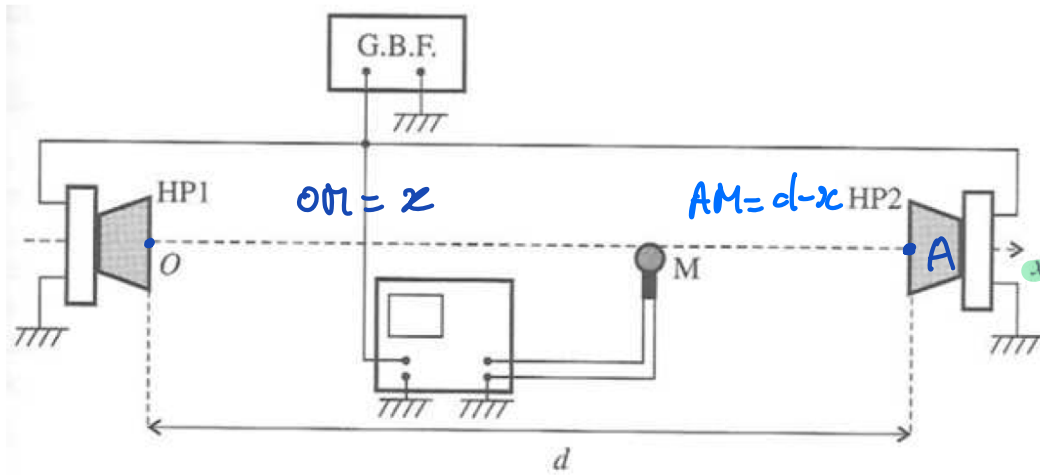
si $T_0 \nearrow$ $c \nearrow$ $f_n \nearrow$: la note est plus aiguë.

si $\mu \nearrow$ $c \searrow$ $f_n \searrow$: on utilise des cordes de μ élevé pour les notes graves.

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{mg}{\mu}} = \sqrt{\frac{500 \times 10}{50}} = 10 \text{ m.s}^{-1}$$

5 Ondes sonores

On s'intéresse aux interférences d'ondes sonores produites par deux haut-parleurs identiques HP1 et HP2, placés face à face, à distance d l'un de l'autre, et alimentés par la même tension sinusoïdale de fréquence $f = 1250 \text{ Hz}$. L'axe (Ox) passe par les centres des haut-parleurs; le centre de HP1 est en $x = 0$ et le centre de HP2 est en $x = d$. Un microphone M de petite dimension peut être déplacé le long de (Ox) .



On envoie sur un oscilloscope le signal du générateur alimentant les haut-parleurs et la tension u délivrée par le micro, le premier signal servant de source de déclenchement. Lorsqu'on déplace **autour de la position médiane** entre les deux HP, on observe que l'amplitude de la tension u varie et passe successivement par des maxima et des minima quasiment nuls. L'écart entre deux positions successives pour lesquelles l'amplitude est minimale est constant et vaut : $e = 13,8 \text{ cm}$. Pour modéliser la situation on suppose que les surpressions acoustiques $p_1(x,t)$ émise par HP1 et $p_2(x,t)$ émise par HP2, ont des amplitudes constantes au voisinage de la position médiane toutes les deux égales à p_0 et qu'elles ont toutes les deux la même phase initiale φ_0 au départ des haut-parleurs.

5.1. Écrire les expressions de $p_1(x,t)$ et $p_2(x,t)$ en fonction de p_0 , f , c , x , d , t et φ_0 .

$$\text{Gr} \quad p_1(x=0, t) = p_2(x=d, t) = p_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

$$\text{et} \quad p_1(0, t) = p_1(x, t) = p_1(0, t - \frac{OM}{c}) = p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right)$$

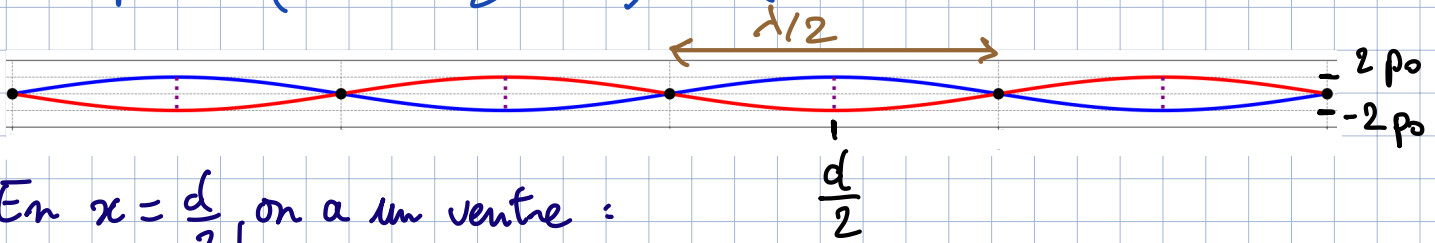
$$p_1(x, t) = p_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f$$

$$\begin{aligned} \text{de même} \quad p_2(0, t) &= p_2(x, t) = p_2(0, t - \frac{AM}{c}) \\ &= p_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{d-x}{c}\right) + \varphi_0\right) \end{aligned}$$

$$p_2(0, t) = p_0 \cos(\omega t + kx - kd + \varphi_0) \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f.$$

5.2. Obtenir une expression de la surpression $p(x,t)$ résultant de la superposition de ces deux ondes et expliquer les observations ci-dessus.

$$\begin{aligned}
 & p_1(x,t) + p_2(x,t) \\
 &= p_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) + p_0 \cos(\omega t + kx - kd + \varphi_0) \\
 &= p_0 \left(2 \cos \frac{\omega t - kx + \varphi_0 + \omega t + kx - kd + \varphi_0}{2} \times \right. \\
 &\quad \left. \cos \frac{\omega t - kx + \varphi_0 - (\omega t + kx - kd + \varphi_0)}{2} \right) \\
 &= p_0 \left(2 \cos \left(\frac{2\omega t + 2\varphi_0 - kd}{2} \right) \times \cos \left(\frac{-2kx + kd}{2} \right) \right) \\
 &= 2p_0 \cos \left(\omega t - \frac{kd}{2} + \varphi_0 \right) \cos \left(k \left(x - \frac{d}{2} \right) \right)
 \end{aligned}$$



En $x = \frac{d}{2}$, on a un ventre :

$$p\left(\frac{d}{2}, t\right) = 2p_0 \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2} + \varphi_0\right) \times 1 : \text{amplitude } 2p_0.$$

De manière générale, on a un ventre en $x_v = \frac{d}{2} + n \frac{\lambda}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$
 et on a un nœud en $x_{nds} = \frac{d}{2} + \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2}$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
 p(x_{nds}, t) &= 2p_0 \cos\left(\omega t - \frac{kd}{2} + \varphi_0\right) \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\cancel{\frac{d}{2}} + \frac{\lambda}{4} + m \frac{\lambda}{2} - \cancel{\frac{d}{2}}\right)\right] \\
 &= \cos\left(\frac{2\pi}{4} + m\pi\right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

5.3. Calculer la vitesse du son dans les conditions de cette expérience.

$$\text{On a mesuré } e = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2e, \text{ de plus } \lambda = cT = \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow c = \lambda f = 2e f = 2 \times 13,8 \cdot 10^{-2} \times 1250 = 345 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$