

Devoir surveillé n°0 révisions

Nom : Prénom :

Exercice 1 :	
Exercice 2 :	
Exercice 3 :	
Problème partie A :	
Problème partie B :	

La page 1 est à remettre avec la copie!
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. Si au cours de l'épreuve, un

candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre. **Durée du devoir : 3h. Les téléphones portables doivent être éteints et mis dans votre sac. Le devoir est composé de 3 pages où se trouvent trois exercices et un problème, indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez.**



Évariste Galois vers quinze ans

Évariste Galois, né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine, mort le 31 mai 1832 à Paris, est un mathématicien français, qui a donné son nom à une branche des mathématiques dont il a posé les prémisses, la théorie de Galois. Il est un précurseur dans la notion de groupe et un des premiers à mettre en évidence la correspondance entre symétries et invariants.

Mort à la suite d'un duel galant à l'âge de vingt ans, il laisse un manuscrit élaboré trois ans plus tôt, dans lequel il établit qu'une équation algébrique est résoluble par radicaux si et seulement si le groupe de permutations de ses racines a une certaine structure, qu'on appellera plus tard résoluble. Ce mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux, publié par Joseph Liouville quatorze ans après sa mort, ainsi qu'un article Sur la théorie des nombres paru alors qu'il avait dix-neuf ans, ont été considérés par ses successeurs, comme le déclencheur du point de vue structural et méthodologique des mathématiques modernes.

Républicain radical, il s'engage dans une société secrète, la Société des amis du peuple, à la suite des Trois Glorieuses. Ses démêlés avec les autorités, tant scientifiques que politiques, les zones d'ombre entourant sa mort prématurée, contrastant avec l'importance désormais reconnue de ses travaux, ont contribué à en faire l'incarnation du génie romantique malheureux et d'une jeunesse prometteuse et mal-aimée.

Exercice 1. On considère les matrices suivantes. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X\}$.

- Déterminer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.
- Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1} .
- Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\Delta = \alpha I + J$.
- (a) Calculer J^2 , puis J^k pour tout entier naturel $k \geq 2$.
(b) À l'aide la formule du binôme de Newton, exprimer $\forall n \in \mathbb{N}$, Δ^n en fonction de I et J .
(c) En déduire l'expression matricielle $\forall n \in \mathbb{N}$, de A^n .

Exercice 2. D'après eml Toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et une boule rouge. On procède à des tirages successifs d'une boule au hasard selon le protocole suivant :

- si on obtient une boule bleue, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule bleue supplémentaire;
- si on obtient une boule rouge, on la remet dans l'urne et on arrête l'expérience.

On suppose que toutes les boules sont indiscernables au toucher et on admet que l'expérience s'arrête avec une probabilité égale à 1. On note N la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne à la fin de l'expérience.

- (a) Montrer soigneusement : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \mathbb{P}([N = n]) = \frac{1}{n(n-1)}$.
(b) La variable aléatoire N admet-elle une espérance?
- Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction **Python** suivante de façon à ce qu'elle renvoie une simulation de la variable aléatoire N .

```
import random as rd
def simuleN() :%
    b = 1 # b désigne le nombre de boules bleues dans l'urne
    while rd.random() < ..... :
        b = b+1
    N = .....
    return N
```

Exercice 3. Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes d'inconnues $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $(E_1) : y' - 3y = e^{-3x} + 6.$
2. $(E_2) : 2y'' - 3y' + y = xe^x.$ (Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx)e^x.$)

PROBLEME. D'après EML et Ecricome

Ce problème est constitué de deux parties totalement indépendantes.

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. (a) Montrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.
(b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.
(c) Montrer qu'il existe un unique réel $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(\ell) = \ell$.
(d) Justifier : $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ (Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près).
(e) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$: $|f'(x)| \leq f(x)$. En déduire que : $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
(f) Vérifier que $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \quad \text{puis} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .
- (d) Informatique :
 - i. Ecrire une fonction **Python** f qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$.
 - ii. En utilisant la fonction f précédente, écrire une fonction **SuiteU** qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n .
 - iii. En utilisant la fonction **SuiteU** précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Python** une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près?

Partie B :

On considère, pour tout entier naturel n , l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx$$

1. Calculer I_0, I_1 .
2. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n .
3. (a) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, écrire $I_{n+1} - I_n$ sous forme d'une intégrale.
(b) En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
(c) En déduire que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
(d) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

- (e) En déduire la valeur de ℓ .