

Exercice 1 : Longueur d'onde de de Broglie

1. Calculer la longueur d'onde de de Broglie d'un homme de 75 kg marchant à 5.0 km.h^{-1} . Comparer à la largeur de la porte de votre chambre et conclure.
2. Quelle énergie, en électronvolts, doit-on communiquer à des électrons, de masse $m_e = 9.11.10^{-31} \text{ kg}$ pour que leur longueur d'onde de de Broglie soit égale à 0.1 nm ?
3. Calculer les longueurs d'onde de de Broglie pour un électron et un proton, de masse $m_p = 1.67.10^{-27} \text{ kg}$, dont les énergies cinétiques valent toutes 100 eV .

$$\begin{aligned} 1) \quad m &= 75 \text{ kg} \\ v &= 5,0 \text{ km/h} = 1,4 \text{ m.s}^{-1} \\ \lambda_{\text{dB}} &= \frac{h}{\|\vec{p}\|} = \frac{h}{m\|\vec{v}\|} = 6,3.10^{-36} \text{ m} \end{aligned}$$

$6,63.10^{-34} \text{ Js}$

$l \sim 1 \text{ m} \rightarrow \lambda \ll l$
L'aspect ondulatoire n'intervient pas
ds ce type de situation.

$$2) \text{ On a } \lambda = \frac{h}{\|\vec{p}\|}$$

On suppose que l'on parle d'énergie cinétique

$$\text{Alors } E = \frac{\|\vec{p}\|^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = 151 \text{ eV}$$

3) De même $E_c = 100 \text{ eV}$

$$\rightarrow \lambda_{dB} = \frac{h}{\|p\|} = \frac{h}{\sqrt{2mE_c}}$$

$$\rightarrow \lambda_{dB e^-} = 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\rightarrow \lambda_{dB p} = 2,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Exercice 2 : Classique ou quantique ?

- Une personne marche dans la rue. Evaluer sa vitesse v , ainsi que sa quantité de mouvement p .
 - Cette personne marche avec une variation de vitesse de l'ordre de 10%. Quelle est l'indétermination quantique sur sa position ? Ce problème nécessite-t-il un traitement quantique ?
- On considère un électron en mouvement autour d'un proton. On considère que l'indétermination quantique sur la position de l'électron est $\Delta X = 10^{-10}$ m.
 - Déterminer l'indétermination quantique sur la vitesse Δv . On considérera que l'on peut utiliser la relation valable pour un mouvement unidimensionnel.
 - Comparer à la vitesse de l'électron. Ce problème nécessite-t-il un traitement quantique ?
- On considère une particule libre de masse $m = 10^{-15}$ kg de taille caractéristique $l = 1 \mu\text{m}$ supposée correspondre à la largeur caractéristique d'un paquet d'onde de matière.
 - Montrer que l'équation de Schrödinger donne, en ordre de grandeur, le temps caractéristique d'étalement du paquet d'onde $\tau = \frac{2ml^2}{\hbar}$.
 - Calculer numériquement τ . La mécanique quantique remet-elle en cause la localisation d'une particule macroscopique ?

Données : masse électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg ; rayon de l'atome d'hydrogène : $r_0 = 0,53 \times 10^{-10}$ m.

1) a) On prend $v = 1 \text{ m.s}^{-1}$ et $m = 70 \text{ kg}$
alors $p = m v = 70 \text{ kg.m.s}^{-1}$

b) On a $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

avec $\Delta v = 0,1 \times v = 0,1 \text{ m.s}^{-1}$
soit $\Delta p = m \Delta v = 7 \text{ kg.m.s}^{-1}$

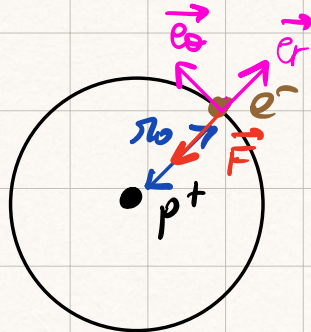
$$\rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta p} = 7,5 \cdot 10^{-36} \text{ m}$$

On peut avoir une précision toute petite sur la position $\rightarrow$ mécanique quantique insignifiante

$$2) a) \text{ On a } \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x} \Leftrightarrow \Delta v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta x}$$

$$\text{On trouve } \Delta v \geq 5,8 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

b)



$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

$$\text{PFD: } -m \frac{v^2}{r_0} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2}$$

accélération en mouvement circulaire uniforme

Alors

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m r_0}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Pour } \Delta v_{\min} = 5,8 \cdot 10^5, \text{ on a } \frac{\Delta v_{\min}}{v} = 27\%$$

→ L'indétermination quantique sur la vitesse est énorme, on doit utiliser la mécanique quantique

3a) Particule libre: $V=0$

alors : $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

odg $\downarrow$ $\hbar \frac{\psi}{\tau} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi}{l^2}$

$\rightarrow \tau = \frac{2m l^2}{\hbar}$

b) On trouve $\tau = 1,9 \cdot 10^7 \text{ s}$
 $= 219 \text{ jours}$

Pour un système / macroscopique, l'échelle
 mésoscopique

- mais du paquet d'onde a lieu sur des
 durées très grande devant la durée de
 l'expérience

$\rightarrow$ Mécanique quantique insignifiante

Exercice 3 : Potentiel harmonique (Oral CCINP MP)

Soit $\Psi(x, t)$ la fonction d'onde d'une particule de masse m pouvant se déplacer sur l'axe Ox :

$$\Psi(x, t) = A \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t\right) \text{ où } A \text{ et } \omega_0 \text{ sont des constantes}$$

1. Quelles sont les dimensions de A et ω_0 ?
2. Déterminer les valeurs possibles de A .
3. Quel type d'état est représenté par cette fonction d'onde ? Quelle est l'énergie de la particule ?
4. A quelle énergie potentielle $V(x)$ est soumise cette particule ?
5. Dans quel(s) type(s) de situation rencontre-t-on cette énergie potentielle ?
6. On prépare $N \gg 1$ systèmes dans cet état et l'on mesure pour chacun d'entre eux la position x de la particule, quelle est la moyenne des mesures réalisées ?
7. Qu'en est-il de la moyenne quadratique $\langle x^2 \rangle$?
8. Que dire de l'étalement des mesures en quantité de mouvement dans cet état ?

Donnée : pour $\alpha > 0$: $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ et $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$.

1) Argument d'une exponentielle et sans dimension
donc $[\omega_0 t] = 1$
 $\rightarrow \underline{[\omega_0] = T^{-1}} \rightarrow \text{pulsation}$

On a la normalisation de la f.c. d'onde

$$\int_{\text{espace}} |\Psi|^2 dx = 1$$

$$\Leftrightarrow [|\Psi|^2] = \frac{1}{L}$$

$$\Leftrightarrow [\Psi] = \frac{1}{L^{1/2}} \rightarrow [A] = \frac{1}{L^{1/2}}$$

$$\underline{[A] = L^{-1/2}}$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 \underbrace{\left| e^{-i\frac{\omega_0}{2}t} \right|^2}_{=1} \left| e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}} \right|^2 dx = 1$$

$$\Leftrightarrow |A|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}} dx}_{\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_0}}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_0}}$$

$$\Leftrightarrow |A|^2 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}} \rightarrow |A| = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4}$$

$$\underline{A} = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{i\vartheta}$$

3) On reconnaît une fonction d'onde d'un état stationnaire :

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$$

$$\Psi(x, t) = A \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i \frac{\omega_0}{2} t\right)$$

$$= A \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right) \exp\left(-i \frac{\omega_0}{2} t\right)$$

On identifie $\frac{E}{\hbar} = \frac{\omega_0}{2} \Leftrightarrow E = \frac{\hbar\omega_0}{2}$

Rq: c'est l'énergie du niveau fondamental de l'oscillateur harmonique

4) $\psi(x)$ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \psi(x) = 0 \quad (1)$$

avec $\psi(x) = A \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{m\omega_0 A x}{\hbar} e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{m\omega_0 A}{\hbar} e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}} + \frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} x^2 e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}}$$

$$= \left(\frac{m^2\omega_0^2}{\hbar^2} x^2 - \frac{m\omega_0}{\hbar} \right) \psi(x)$$

Ds (5) $\left[\cancel{\frac{m\omega_0}{\hbar}} \left(\frac{m\omega_0}{\hbar} x^2 - 1 \right) + \frac{\cancel{2}}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar\omega_0}{2} - V(x) \right) \right] \psi = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{m\omega_0^2}{\hbar} x^2 - \cancel{\omega_0} + \cancel{\omega_0} - \frac{2V(x)}{\hbar} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2V(x)}{\hbar} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2}$$

5) On reconnaît $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$ énergie potentielle élastique

C'est d'un oscillateur harmonique.

$$6) \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx$$

$$\text{avec } |\psi(x)|^2 = |\phi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}|^2 \\ = \phi(x)^2$$

$$\rightarrow \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x A^2 \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right)^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} A^2 x \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}\right) dx$$

$$= \left[-A^2 \frac{\hbar}{2m\omega_0} \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}\right) \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= 0$$

7) De même:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 x^2 e^{-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$$

$$\rightarrow \langle x^2 \rangle = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi \hbar^3}{4 m^3 \omega_0^3}}$$

$$\text{or } |A|^2 = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi \hbar}}$$

$$\rightarrow \langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\pi \hbar}} \sqrt{\frac{\pi \hbar^3}{4 m^3 \omega_0^3}} = \frac{\hbar}{2m\omega_0}$$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$$

8) On a un état stationnaire, donc son énergie est connue avec certitude car elle n'évolue pas, donc l'indétermination quantique sur l'énergie n'évolue pas.

Pour la quantité de mouvement, on peut utiliser l'inégalité spatiale de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\text{Or } \Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}$$

$$\text{donc } \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{2m\omega_0}{\hbar}} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega_0}{2}}$$

Exercice 4 : Courant de probabilité (*Oral CCINP*)

L'état quantique d'une particule de masse m est caractérisé par sa fonction d'onde $\psi(x, t)$ obéissant à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) \text{ où } V(x) \text{ représente l'énergie potentielle de la particule.}$$

1. Quelle signification physique est donnée à $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$?
2. Par analogie avec la conservation de la charge en électromagnétisme, écrire une équation locale de conservation de la probabilité de présence en introduisant un vecteur $\vec{J}(x, t) = J(x, t)\vec{u}_x$ appelé vecteur densité de courant de probabilité.

On peut montrer que $\vec{J}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi(x, t) \frac{\partial \psi^*(x, t)}{\partial x} - \psi^*(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right) \vec{u}_x$

3. Montrer que l'expression de $\vec{J}(x, t)$ proposée vérifie bien l'équation de conservation.
4. La particule est maintenant libre ($V(x) = 0$) et possède une énergie E . Montrer que la fonction d'onde $\psi(x, t)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux ondes planes progressives se propageant en sens opposés.
5. Nous considérons l'onde se propageant dans le sens des x croissants. Exprimer les grandeurs $\rho(x, t)$ et $\vec{J}(x, t)$ associés. Commenter.

1)

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

$\rho(x, t)$ est la densité linéique de probabilité de présence de la particule

Concrètement, $\rho(x, t) dx = |\psi(x, t)|^2 dx$ correspond à la probabilité que la particule se trouve entre x et $x + dx$.

2) Analogie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

Em 1D cartesienne:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0$$

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \vec{u}_x$$

$$3) \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} - \psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \psi) = \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}$$

Schrödinger: $\left(i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \overset{Re}{V(x)} \psi \right) \times \psi^*$

conjugue $\left(-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V(x) \psi^* \right) \psi$

$$i\hbar \underbrace{\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right)}_{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \psi^* + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi$$

d'où
$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = + \underbrace{\frac{i\hbar}{2m} \left(\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \right)}_{-\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x}}$$

On a bien

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x} = 0}$$

4) $E=0$

état stationnaire : $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iE}{\hbar}t}$

ds (S):
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \cancel{V(x)} \psi$$

$$\downarrow i\hbar \left(-\frac{iE}{\hbar} \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

$$\Leftrightarrow E \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x)$$

$$\Leftrightarrow \psi''(x) + \boxed{\frac{2mE}{\hbar^2}} \psi = 0$$

$\hbar^2$

On pose $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ($k = \|\vec{k}\|$ vecteur onde)

$$\rightarrow \psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$\rightarrow \psi(x,t) = \underbrace{A e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}}_{\text{Onde se déplace vers } +\vec{ux}} + \underbrace{B e^{i(-kx - \frac{Et}{\hbar})}}_{\text{Onde se déplace vers } -\vec{ux}}$$

5) On s'intéresse à $\psi(x,t) = A e^{i(kx - \frac{Et}{\hbar})}$

• $\rho(x,t) = |\psi|^2 = |A|^2 \rightarrow \rho \text{ constant}$

→ Probabilité de présence uniforme ds l'espace
 → Particule totalement délocalisée.

$$\bullet \vec{J}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \vec{e}_x$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(\psi \frac{\partial}{\partial x} \left(A^* e^{-i(\hbar n - \frac{E}{\hbar} t)} \right) - A^* e^{-i(\hbar n - \frac{E}{\hbar} t)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \vec{e}_x$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(-ik |A|^2 - ik |A|^2 \right) \vec{e}_x$$

$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(-2ik |A|^2 \right) \vec{e}_x$$

$$= \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \vec{e}_x$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$= |\psi(x,t)|^2 \times \frac{\hbar k}{m}$$

Expression du
courant.

$$\vec{J} = \rho(x,t) \times \vec{v}$$

Exercice 5 : oscillateur harmonique quantique (Oral CCINP)

Le concept d'oscillateur harmonique joue un rôle majeur en physique car il permet de décrire les petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable avec une énergie potentielle d'interaction quelconque. A une dimension, l'oscillateur harmonique de masse m et de pulsation propre ω_0 est soumis à une énergie potentielle $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$. On rappelle que les indéterminations quantiques sur x et p_x s'écrivent :

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \text{ et } \Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$$

Vision semi-classique

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la position $x(t)$ pour la particule plongée dans le potentiel $V(x)$.
2. En déduire la position $x(t)$ et l'impulsion $p_x(t)$ en prenant comme conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $v(t=0) = 0$.
3. Déterminer également l'expression de l'énergie mécanique E de la particule.
4. En déduire les valeurs moyennes $\langle x \rangle$ et $\langle p_x \rangle$ puis les indéterminations quantiques Δx et Δp_x .
5. Montrer que l'inégalité spatiale de Heisenberg implique que l'énergie mécanique est bornée inférieurement et exprimer cette énergie minimale en fonction de $\hbar$ et ω_0 .

Vision quantique

En mécanique quantique, l'énergie de l'oscillateur harmonique est quantifiée. Les valeurs accessibles de l'énergie vérifient : $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0$ avec $n \in \mathbb{N}$.

6. Ce résultat est-il compatible avec celui obtenu à la question 5 ?
7. Les vibrations de la molécule HCl peuvent être décrites en première approche par le modèle de l'oscillateur harmonique avec $\omega_0 = 5,4 \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$.
 - (a) Dans quel domaine de spectre électromagnétique se trouve la pulsation ω_0 ?
 - (b) Calculer l'énergie minimale de la molécule en eV.
 - (c) Comparer à l'énergie d'agitation thermique $E = k_B T$ de la molécule où $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

$$1) \quad V(n) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = -\vec{\text{grad}} V$$

$$= -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x = -m \omega_0^2 x \vec{e}_x$$

gène loi de Newton appliquée au système ds

le référentiel du labo galiléen:

$$m \vec{a} = \vec{F} \xleftrightarrow{\vec{e}_x} m \ddot{x} = -m\omega_0^2 x$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2) Sol: $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

$$x(t=0) = A = x_0$$

$$v(t=0) = \dot{x}(t=0) = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) \\ = B\omega_0 = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

et $p_x = m v_x = m \dot{x}$

$$p_x = -m\omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t)$$

3) $E = E_c + E_p$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$$

$$= \frac{m^2 \omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \omega_0^2 / \omega_0$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \left(\underbrace{\sin^2(\omega_0 t)}_1 + \underbrace{\omega_0^2 / \omega_0}_1 \right)$$

$$\rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2$$

$$4) \quad \langle x \rangle = \langle x_0 \cos(\omega_0 t) \rangle = 0$$

$$\langle p_x \rangle = \langle -m \omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t) \rangle = 0$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\langle x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \rangle} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{or } \Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = \sqrt{\langle m^2 \omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \rangle}$$

$$= \frac{m \omega_0 x_0}{\sqrt{2}}$$

5) Inégalité spatiale de Heisenberg:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_x}{\omega_0} \frac{m \omega_0^2 x_0^2}{2} \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2}_{E_m} \geq \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_m \geq \frac{\hbar \omega_0}{2}}$$

$$E_{\min} = \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$6) E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega_0 ; n \in \mathbb{N}$$

$$\text{On a } E_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2} = E_{\min}.$$

↳ Coherent.

$$7) a) \quad \omega_0 = 5,4 \cdot 10^{14} \text{ rad/s}$$

$$\rightarrow \nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = 8,6 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = 3491 \text{ nm}$$

↳ Infra-rouge.

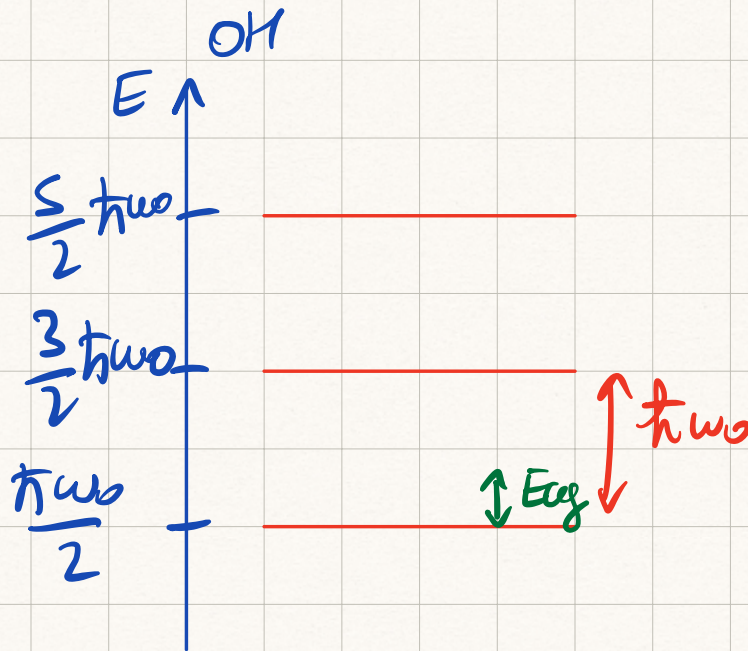
$$b) \quad E_{\min} = \frac{\hbar \omega_0}{2} = 0,178 \text{ eV}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

c) A T ambiante:

$$E_{ag} = k_B T = 0,026 \text{ eV}$$

$$E_{\text{ag}} \ll E_{\text{min}}$$

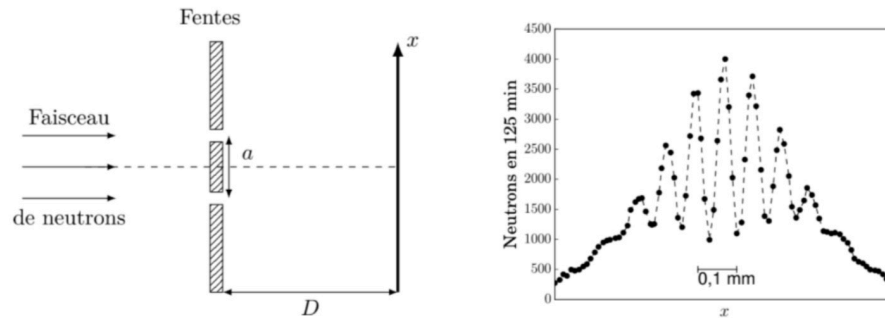


Toutes les molécules sont ds leur état fondamental

→ Les modes propres de vibration sont "gelés".

Exercice 6 : diffraction de neutrons froids (*Oral CCINP*)

Nous considérons l'expérience de diffraction de neutrons froids par une double fente réalisée dans les années 1980 par A. Zeilinger et ses collaborateurs et sommairement schématisée ci-dessous. Les neutrons possèdent une longueur d'onde de de Broglie moyenne λ avec une indétermination relative $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 15\%$. La distance entre les fentes est $a = 125 \mu\text{m}$.



Un détecteur est déplacé le long de l'axe (Ox) situé à la distance $D = 5,0 \text{ m}$ des fentes et permet d'enregistrer le nombre de neutrons arrivant au voisinage d'un point d'abscisse x de l'écran pendant des intervalles de temps identiques. L'allure de la répartition des neutrons sur le plan de détection est donné sur la figure à droite.

1. Interpréter la répartition des impacts de neutrons sur le plan de détection. Définir et calculer l'interfrange i obtenue expérimentalement.
2. En déduire la longueur d'onde moyenne λ des neutrons, puis leur vitesse moyenne.
3. En admettant que, en ordre de grandeur, l'énergie cinétique d'un neutron vaille $k_B T$, en déduire leur température T . Justifier l'appellation de "neutron froid".
4. En s'inspirant du cours d'optique ondulatoire, estimer la longueur L_C du paquet d'ondes caractérisant un neutron en fonction de $\Delta\lambda$ et λ .
5. Expliquer pourquoi la longueur finie L_C des paquets d'ondes limite le nombre de franges observables sur le plan de détection. Comment nomme-t-on ce phénomène ?
6. En adoptant un critère semi-quantitatif à préciser, estimer le nombre de franges qu'il est possible d'observer et comparer aux résultats expérimentaux.

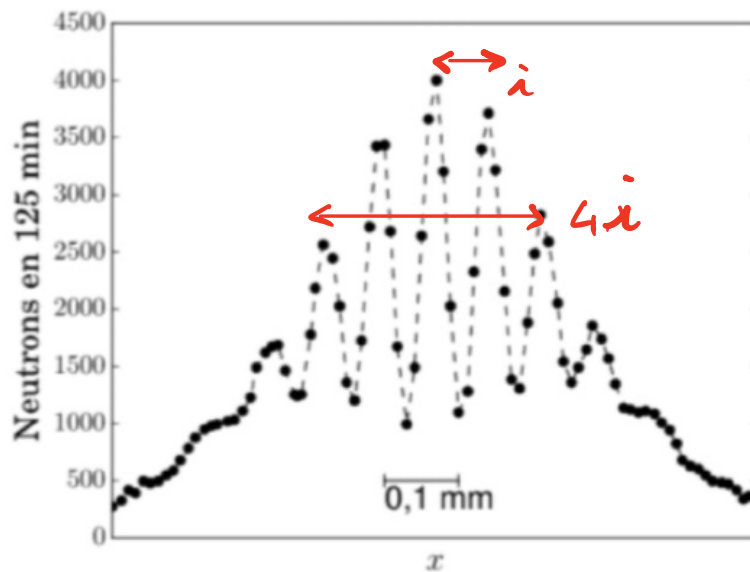
Données : constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ Js}$, masse du neutron : $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ et constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$.

1) La répartition ressemble à celle d'une figure d'interférences en optique.
⇒ Interférences quantiques des neutrons.
Cette expérience met en évidence la dualité.

onde - corpuscule de la matière

• aspect corpusculaire: impacts des neutrons

• aspect ondulatoire: la répartition des impacts fait apparaître des zones privilégiées (interférences constructives) et des zones avec le moins d'impact (interférences destructives)



On a $i \sim 0,1 \text{ mm}$

2) Par analogie avec les fentes de Young:

$$i = \frac{\lambda D}{a} \Leftrightarrow d = \frac{ai}{D} = 2,5 \text{ mm}$$

Relation de de Broglie : $\lambda_{dB} = \frac{h}{m\|\vec{v}\|}$

$$\rightarrow \|\vec{v}\| = \frac{h}{m\lambda} = 1,6 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$$

$$3) E_c \sim k_B T$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 = k_B T$$

$$\Rightarrow T = \frac{m v^2}{2 k_B} = 9,6 \text{ mK}$$

$\rightarrow$ neutron froid

4) cf vidéos de cours d'optique ondulatoire

$$L_c = c \tau_c = \frac{c}{\Delta \nu} = \frac{d^2}{\Delta \lambda}$$

Ici $L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 17 \text{ nm}$

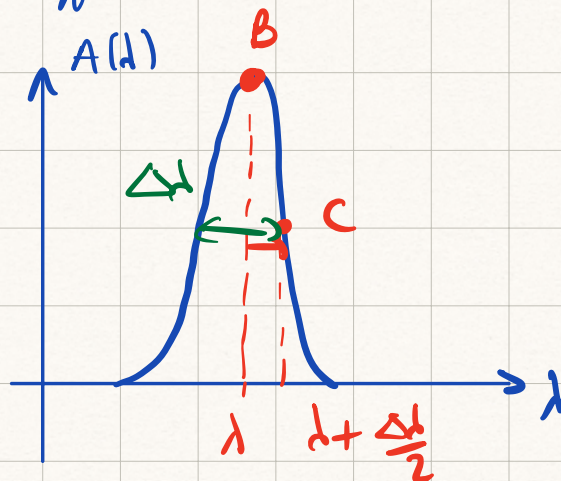
$\Delta\lambda = 0,15 \lambda = 3,8 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

5) Phénomène de brouillage par cohérence temporelle.

On ne peut observer des interférences que si $\delta \leq L_c$

6) Critère semi-quantitatif: en partant d'une situation de coïncidence, on a brouillage dès que $|\Delta p| = \frac{\lambda}{2}$ où Δp correspond à

une différence d'ordre d'interférences



$$\Delta p = \frac{\delta}{\lambda} - \frac{\delta}{\lambda + \frac{\Delta \lambda}{2}} = \frac{\delta \frac{\Delta \lambda}{2}}{\lambda(\lambda + \frac{\Delta \lambda}{2})} \sim \frac{\delta \Delta \lambda}{2\lambda^2}$$

Critère semi-quantitatif:

$$|\Delta p| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\delta \Delta \lambda}{2\lambda^2} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta < \frac{\lambda^2}{\Delta \lambda} = L_c}$$

$$\text{Ici } \delta = \frac{a\pi}{D} \Leftrightarrow \frac{a\pi}{D} < L_c$$

$$\pi < \frac{L_c D}{a}$$

$$\text{Soit } \pi < 6,67 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\text{or } i = \frac{\lambda D}{a} = 0,1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$\left\lfloor \frac{\pi}{i} \right\rfloor = 6$$

On peut voir 6 franges pour $n > 0$

6 franges pour $n < 0$

1 frange en $n = 0$

→ 13 franges visibles

Ordre de grandeur cohérent.

Exercice 7 : Oscillations quantiques entre deux états (*Oral Mines-Ponts*)

Une particule possède deux états stationnaires d'énergies respectives E_1 et E_2 .

1. Donner les pulsations correspondantes ω_1 et ω_2 .
2. Exprimer les fonctions d'onde correspondantes en notant $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les termes spatiaux associés.
3. Exprimer les densités de probabilité $\rho_1(x)$ et $\rho_2(x)$ correspondantes.
4. On pose $\Phi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2^*(x) = r(x)e^{i\theta(x)}$. Donner l'expression de la densité $\rho(x)$ de la superposition des deux ondes en fonction de $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $\theta(x)$, E_1 et E_2 . Montrer qu'il y a des oscillations quantiques à une pulsation ω_{12} que l'on déterminera en fonction de E_1 , E_2 et $\hbar$.

1) Relation de Planck-Einstein: $E = \hbar\omega$

$$\bullet \omega_1 = \frac{E_1}{\hbar}$$

$$\bullet \omega_2 = \frac{E_2}{\hbar}$$

2) États stationnaires: $\psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$

$$\rightarrow \psi_1(x,t) = \psi_1(x) e^{-i\omega_1 t}$$

$$\text{et } \psi_2(x,t) = \psi_2(x) e^{-i\omega_2 t}$$

$$3) \quad \rho(n, t) = |\psi(n, t)|^2$$

$$\text{car } |e^{-i\omega t}| = 1$$

$$\text{D'où } \underline{\rho_1(n, t) = |\psi_1(n)|^2}$$

$$\underline{\rho_2(n, t) = |\psi_2(n)|^2}$$

$$4) \quad \Phi(n) = \psi_1(n) \psi_2^*(n) = r(n) e^{i\theta(n)}$$

Superposition d'états:

$$\psi(n, t) = \psi_1(n, t) + \psi_2(n, t)$$

$$\rho(n, t) = |\psi|^2 = \psi \psi^*$$

$$= (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*)$$

$$= \psi_1 \psi_1^* + \psi_2 \psi_2^* + \psi_1 \psi_2^* + \psi_2 \psi_1^*$$

$$= |\psi_1(n)|^2 + |\psi_2(n)|^2 + \psi_1(n) e^{-i\omega_1 t} \psi_2^* e^{i\omega_2 t}$$

$$+ \psi_2(n) e^{-i\omega_2 t} \psi_1^* e^{i\omega_1 t}$$

$$= p_1(n,t) + p_2(n,t) + \boxed{\psi_1 \psi_2^*} e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \boxed{\psi_2 \psi_1^*} e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t}$$

$\Phi(n)$ $\Phi^*(n)$

$$\Phi(n) = \alpha(n) e^{i\theta(n)}$$

$$\Phi^*(n) = \alpha(n) e^{-i\theta(n)}$$

$$\text{D'où } p = p_1 + p_2 + \alpha(n) \left[e^{i(\theta + (\omega_2 - \omega_1)t)} + e^{-i(\theta + (\omega_2 - \omega_1)t)} \right]$$

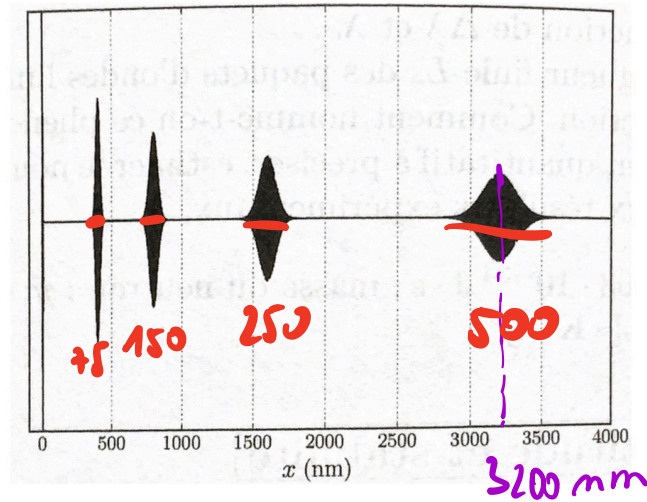
$$\Rightarrow p = p_1 + p_2 + 2\alpha(n) \cos((\omega_2 - \omega_1)t + \theta)$$

On a donc des oscillations quantiques de $p(n,t)$
à la pulsation $\omega_{12} = |\omega_2 - \omega_1|$

$$\text{Période correspondante : } T_{12} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}$$

Exercice 8 : Étalement du paquet d'onde (*Mines-Telecom*)

Un électron libre de masse m se déplace à la vitesse v dans la direction et le sens de $\vec{u}_x$. On lui associe un paquet d'onde de vecteur d'onde moyen $\vec{k} = k\vec{u}_x$ et de pulsation moyenne ω . L'indétermination sur la position initiale $x = 0$ de l'électron est notée Δx_0 et celle sur la vitesse $\Delta v = \frac{v}{20}$. La figure ci-dessous représente le paquet d'onde à cinq instants successifs : $t_1 = 0$, $t_2 = 2,0 \times 10^{-13}$ s, $t_3 = 2t_2$, $t_4 = 2t_3$ et $t_5 = 2t_4$.



Il apparaît que le paquet d'onde s'étaie, c'est-à-dire que l'indétermination quantique sur la position de l'électron augmente au cours du temps. En revanche, l'indétermination Δp sur l'impulsion de l'électron n'évolue pas puisque celui-ci est libre.

1. Rappeler la relation de dispersion de la particule libre ($V=0$) et expliquer l'étalement du paquet d'onde.
2. Exprimer la vitesse de groupe v_g du paquet d'onde. Que représente-t-elle ? Déduire de la figure les valeurs de v , k et ω .
3. Estimer la largeur Δx du paquet d'onde aux quatre instants non nuls considérés. Vérifier que ces valeurs sont compatibles avec l'inégalité spatiale de Heisenberg.
4. A l'instant $t = 0$, l'indétermination sur la position de l'électron est supposée minimale compte-tenu de l'indétermination sur la vitesse. Calculer Δx_0 .

Données : constante de Planck : $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s et masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31}$ kg.

$$\begin{aligned}
 1) \quad V &= 0 & E &= E_C \\
 & & \text{''} & \\
 \hbar \omega &= \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}} \quad (D)$$

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} = f(\omega)$$

La propagation est dispersive et le paquet d'onde s'étale au cours de la propagation.

$$2) \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}(\omega)$$

On différencie (D):

$$2k dk = \frac{2m}{\hbar} d\omega$$

$$(\rightarrow) \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{\hbar k}{m} \Rightarrow v_g = \frac{\hbar k}{m}$$

$$\text{Soit } v_g = \frac{\|\vec{P}\|}{m} = \|\vec{v}\| = v$$

Or vitesse de groupe = vitesse de déplacement de l'enveloppe.

L'électron a parcouru $d = 3200 \text{ nm}$ en

$$\Delta t = \delta t_2 = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ s}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow v &= \frac{d}{\Delta t} = \frac{3200 \cdot 10^{-9}}{1,6 \cdot 10^{-12}} \\ &= \frac{3,2 \cdot 10^{-6}}{1,6 \cdot 10^{-12}} = \underline{2,0 \cdot 10^6 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

$$\text{On a } v = \frac{\hbar k}{m} \Leftrightarrow \hbar = \frac{mv}{k}$$

$$\rightarrow \underline{k = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ rad/m}}$$

$$E = \hbar \omega = \frac{1}{2} mv^2 \Leftrightarrow \omega = \frac{mv^2}{2\hbar}$$

Soit $\omega = 1,7 \cdot 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$

$$3) \Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Ici Δp_x est constant (état stationnaire,

$$\Delta p_x = m \Delta v = \frac{m v}{2} = \underline{9,1 \cdot 10^{-26} \text{ kg.m.s}^{-1}}$$

$$\Delta x_{\text{max}} = 500 \text{ nm} \text{ et } \Delta x_{\text{min}} = 75 \text{ nm}$$

Pour Δx_{min} : $\Delta x \Delta p_x = \underline{6,8 \cdot 10^{-33} \text{ J.s}}$

$$\frac{\hbar}{2} = \underline{5,3 \cdot 10^{-35} \text{ J.s}}$$

On a bien $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \forall \Delta x.$

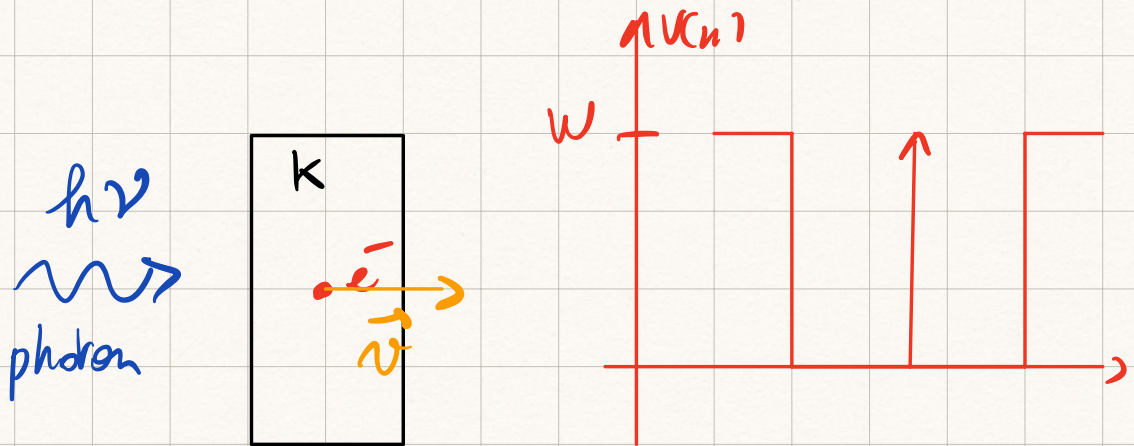
$$4) \text{ On a } \Delta x_0 \Delta p_x = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x_0 = \frac{\hbar}{2 \Delta p_x} = \underline{0,58 \text{ nm.}}$$

Problème : effet photoélectrique (CCINP)

On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette $\lambda = 254 \text{ nm}$ et on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est de 2.57 eV . Avec une raie du visible $\lambda = 502 \text{ nm}$, l'énergie maximale est alors de 0.165 eV .

Déterminer à l'aide de ces données, la constante de Planck, la valeur du travail d'extraction W des électrons de potassium et la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photoélectrique sur le potassium.



Conservation de l'énergie (pour un e^- éjecté)

$$h\nu = W + E_c \geq 0$$

$\uparrow$ énergie cinétique e^-

$$h\nu - W \geq 0 \Rightarrow \nu \geq \boxed{\frac{W}{h}} \quad \text{seuil}$$

$$\Leftrightarrow c = \lambda \nu$$

$$\downarrow$$
$$\frac{c}{\lambda} \geq \frac{W}{h}$$

$$\Rightarrow \lambda \leq \boxed{\frac{hc}{W}} \quad \lambda_{\text{seuil}}$$

ici: • $\frac{hc}{\lambda_1} = W + E_{c1} \quad (1)$

• $\frac{hc}{\lambda_2} = W + E_{c2} \quad (2)$

$$\lambda_1 = 254 \text{ nm} \quad E_{c1} = 2,57 \text{ eV}$$

$$\lambda_2 = 502 \text{ nm} \quad E_{c2} = 0,165 \text{ eV}$$

$$(1) - (2) \quad \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = E_{c1} - E_{c2}$$

$$hc \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = E_{c1} - E_{c2}$$

$$\rightarrow h = \frac{E_{c1} - E_{c2}}{c \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)} = 6,59 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$(1) \quad W = \frac{hc}{\lambda_1} - E_{C1} = 2,3 \text{ eV}$$

$$(2) \quad W = \frac{hc}{\lambda_2} - E_{C2} = 2,3 \text{ eV.}$$

$$\text{On a} \quad \lambda \leq \frac{hc}{W}$$

$$\lambda_{\text{seuil}} = \frac{hc}{W} = 538 \text{ nm.}$$