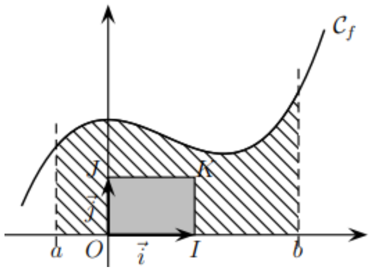
Intégration – Fiche de cours

1. Aire et intégrales

a. Fonction positive

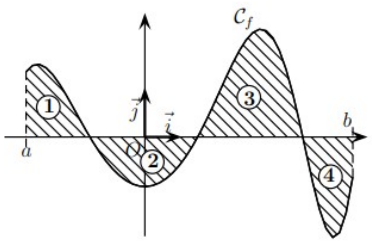
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a; b]
L'aire du domaine D délimité par la courbe Cf , l'axe des abscisses, et les droites d'équations x = a et x = b est appelée $\int_a^b f(x)\,dx$



b. Fonction continue

Pour une fonction f quelconque (continue mais pas forcément positive), l'intégrale de f sur [a; b] est l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.
L'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x)dx = \text{aire}\,(\mathcal{D}_1) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_2) + \text{aire}\,(\mathcal{D}_3) - \text{aire}\,(\mathcal{D}_4)$$



c. Aire d'un domaine compris entre 2 courbes

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a; b]
L'aire du domaine délimité par les courbes représentatives Cf et Cg de f et g et les droites d'équations x = a et x = b est définie par :

$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

2. Propriétés de l'intégrale

- Existence d'une intégrale sur un intervalle

Toute fonction continue sur [a ; b] admet une intégrale sur cet intervalle.

- Relation de Chasles

Soit une fonction f continue sur un intervalle I. Pour tout nombre a, b et c de I, on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

- Positivité

Soit une fonction f continue sur un intervalle I ; pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$. Si $f \geq 0$ sur [a ; b], alors : $f(x) \geq 0$

- Ordre d'intégration

Soient deux fonctions f et g continues sur un intervalle I pour tous nombres réels a et b de I tels que $a \leq b$. Si f g sur I, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Primitive et intégrale

Une intégrale est définie par la relation :

$$A = \int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

- Valeur moyenne Sur un intervalle [a ;b] : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

3. Intégrales et primitives

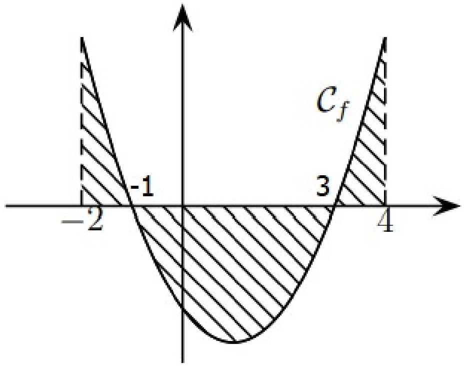
$f(x)$	$F(x)$	I
$a, a \in \mathbb{R}$	ax	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$ax^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\frac{a}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$A\sin(\omega x+\varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$-\frac{A}{\omega}\cos(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$A\cos(\omega x+\varphi), \omega \neq 0$ $A, \omega, \varphi \in \mathbb{R}$	$\frac{A}{\omega}\sin(\omega x+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$

Intégration – Exercices – Devoirs

Exercice 1 **corrigé disponible**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x - 3$, et on note $\mathcal{C}_f$ a courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Donner le tableau de signes de $f(x)$.
2. Calculer l'aire du domaine hachuré sur la figure **suivante**



Exercice 2 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

a. $I = \int_{-1}^{1} (x^3 + x^2 + x)\,dx$

b. $J = \int_{1}^{5} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$

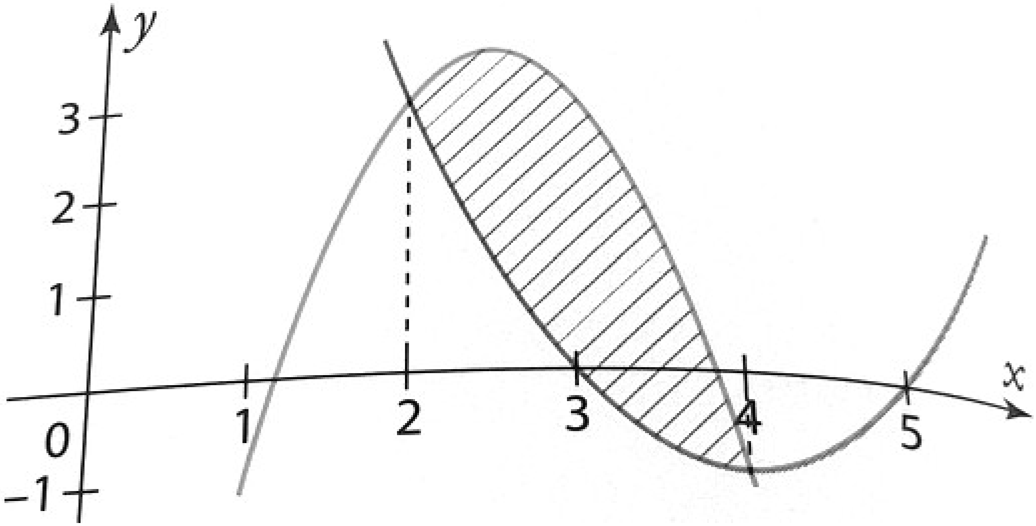
c. $K = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(3x) + \sin x)\,dx$

d. $L = \int_{-1}^{2} (x^4 + 5x^2 - 3)\,dx$

e. $M = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (\sin(4x) - \sin x)\,dx$

Exercice 3 **corrigé disponible**

Soit $f(x) = x^2 - 8x + 15$ et $g(x) = -2x^2 + 10x - 9$ définies sur $\mathbb{R}$ dont les représentations graphiques sont données ci-dessous



1. Déterminer la position relative de C_f et C_g
2. Calculer l'aire du domaine hachuré

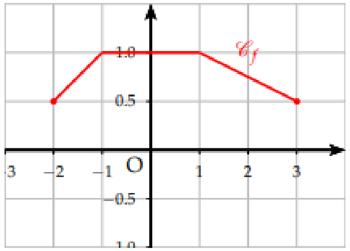
Exercice 4 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

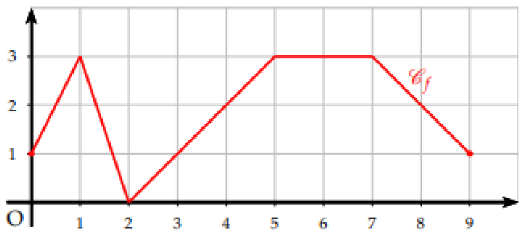
(a) $\int_{1}^{4} \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t^2}\right) dt$ **(b)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)\,dt$ **(c)** $\int_{0}^{\pi} (\sin(2t))\,dt$

Exercice 5 **corrigé disponible**

Pour chaque fonction affine définie par morceaux f, représentée ci-dessous, calculer, en utilisant les aires, l'intégrale I de f sur l'intervalle de définition de f.



cas a



cas b

Exercice 6 **corrigé disponible**

Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x) - x\cos(x) + 3}{(\sin(x)+3)^2} \text{ et } F(x) = \frac{x+1}{\sin(x)+3}$$

1. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

Exercice 7 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

$$A = \int_0^1 (2x+1)dx$$

$$B = \int_1^2 (4x^3 + 4x + 2)dx$$

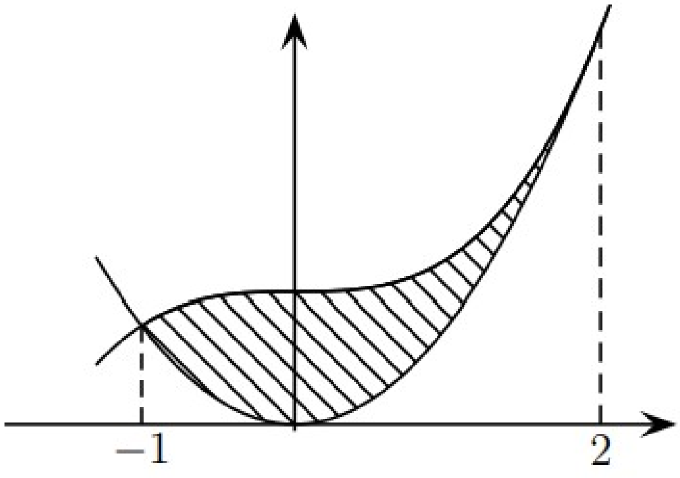
$$C = \int_0^{\pi} 2\cos x - \sin x dx$$

$$D = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x+\pi)\,dx$$

Exercice 8 **corrigé disponible**

Calculer l'aire du domaine, hachuré sur la figure ci-contre, délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g définies par

$$f(x) = x^3 + 4 \text{ et } g(x) = 3x^2$$



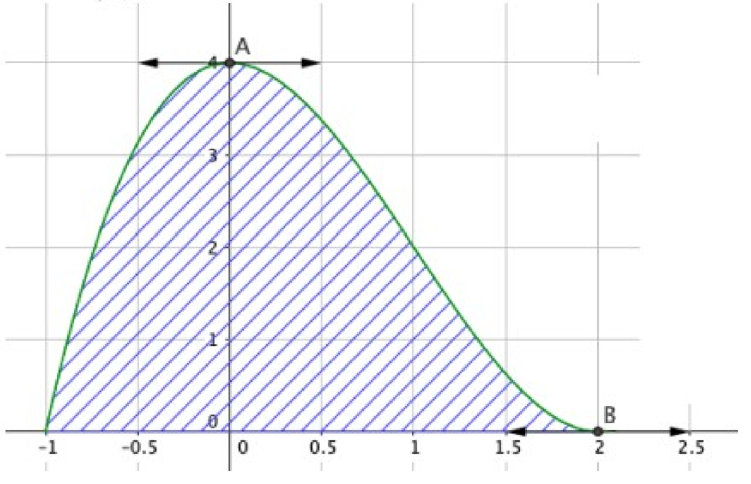
Exercice 9 **corrigé disponible**

Soit f la fonction définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F(x) = \dfrac{3x^2 + 4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 10 **corrigé disponible**

Calculer la valeur exacte de l'aire de la partie du plan hachurée.
on a $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.



Exercice 11 **corrigé disponible**

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_0^4 (x-3)\,\mathrm{d}x$ 2) $I = \displaystyle\int_{-1}^2 (t^2 - 4t + 3)\,\mathrm{d}t$

3) $I = \displaystyle\int_1^2 \left(t^2 + t\right)\mathrm{d}t$

Exercice 12

$$I = \int_0^1 (5x^4 + x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$$

$$J = \int_1^2 \frac{1}{4x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$K = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 13

Calculer la valeur moyenne de la fonction définie par :

$$f(x) = e^{3x} \text{ sur } [1\,;\ln 2]$$

Exercice 14

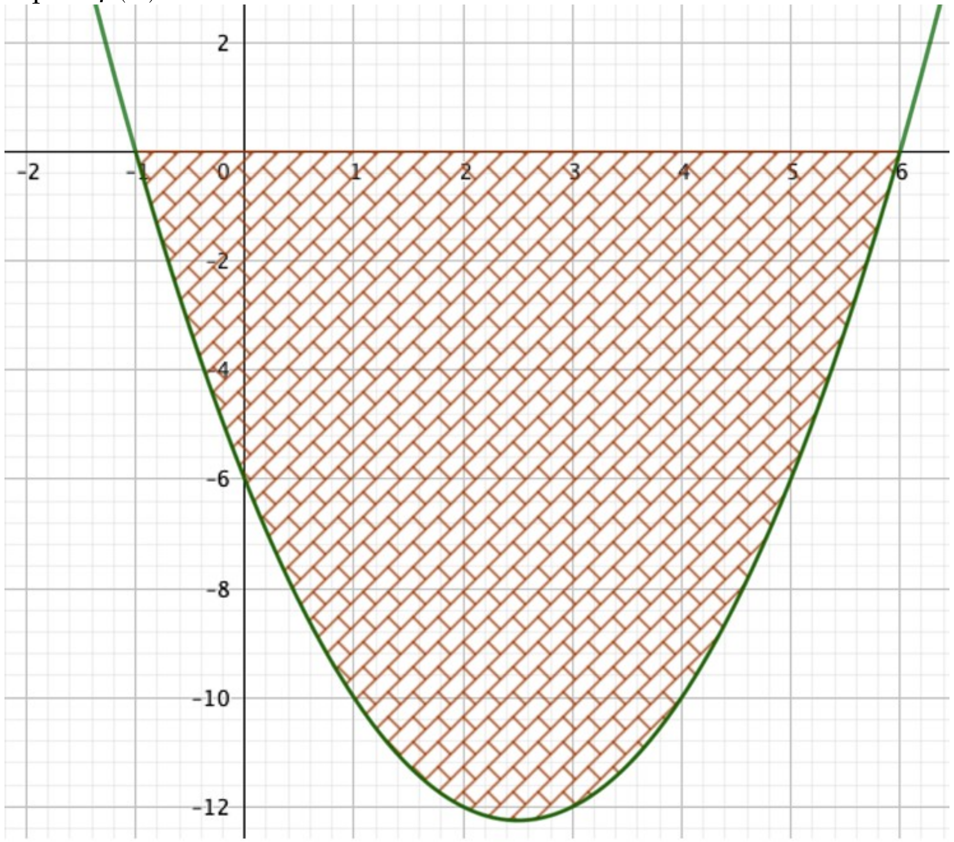
$$I = \int_0^2 (x^3 + 2x + 3)\,\mathrm{d}x$$

$$J = \int_0^1 (3x+2)^3\,\mathrm{d}x$$

$$K = \int_0^{\pi} \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 15

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur R par $f(x)=x^2-5x-6$



Calculer en détaillant la démarche la valeur exacte de l'aire hachurée

Exercice 16

1. Calculer la valeur efficace des fonctions périodiques suivantes :

$$f(x)=325\cos\left(100\pi t+\frac{\pi}{3}\right) \quad g(x)=537\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$$

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction suivante :

$$f(x)=x+1 \text{ pour } x\in[0;10]$$

Exercice 17

Soit f et F les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{\sin(x)-\cos(x)-x\cos(x)+3}{(\sin(x)+3)^2} \text{ et } F(x)=\frac{x+1}{\sin(x)+3}$$

Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Calculer $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

Exercice 18

Calculer les intégrales suivantes :

$$A=\int_0^1 (2x+1)dx$$

$$B=\int_1^2 (4x^3+4x+2)dx$$

$$C=\int_0^{\pi} 2\cos x-\sin x dx$$

$$D=\int_{-1}^2 (4x+4)^4 dx$$

$$E=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(3x+\pi)\,dx$$

Exercice 19

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} 4e^t\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 te^{t^2-1}\,dt$ **(c)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1}\,dt$

Exercice 20

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^4 (t-3)\,dt$ **(b)** $\displaystyle\int_4^{-1} (t^2-4t)\,dt$ **(c)** $\displaystyle\int_1^2 \left(t^2-\frac{1}{t}\right)dt$

Exercice 21

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_1^6 \frac{1}{(x-3)^3}\,dx \qquad J = \int_{-1}^{2} \frac{1}{3x+5}\,dx \qquad K = \int_{-1}^{1} xe^{3x^2-1}\,dx$$

Exercice 22

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^3}\,dx$$