

EXERCICE 1: [Indications] – Cours – Calculer – Chercher –

Soient A et B les points de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives $(2, -2, 1)$ et $(1, 2, 2)$ dans un repère orthonormé centré en O .

1. a) Déterminer les longueurs OA et OB .
b) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle en O .
c) En déduire la longueur du segment $[AB]$.
2. a) On introduit C_α le barycentre de $(A, \alpha), (B, 1 - \alpha)$ pour $\alpha \in [0, 1]$. Calculer la longueur OC_α .
b) Comment vérifier en partie votre résultat ?
c) En déduire par exemple la longueur OI si I est le milieu de $[AB]$.
3. a) Soit D un point de la droite (AB) . Déduire de toutes ces questions la ou les solutions de l'équation $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \rangle = k$.
b) Proposer une autre méthode pour arriver à ce résultat.

EXERCICE 2: [Indications] – Cours –

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(x - y + 2z)^2 \leq 6$.

EXERCICE 3: [Indications] – Calculer – Cours –

Soit la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimée dans la base canonique.

1. Déterminer la matrice de Gram G de la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\langle u, v \rangle$ où $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4: [Indications] – Calculer – Cours –

1. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ (noté dans l'ordre (v_1, v_2, v_3)) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dans la base canonique). Déterminer les coordonnées de V dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3) de la projection orthogonale de V sur
 - a) $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$
 - b) $G = \text{Vect}(v_3)$

4. Déterminer la distance

- a) de V à F
- b) de V à G .

EXERCICE 5: [Indications] – Cours – Calculer – Changement de base

Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^4$. (Ce fait est admis).

1. a) Déterminer la matrice de Gram de $\mathcal{B}$.
b) Vérifier que les vecteurs $v_2 = (0, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ et $v_3 = (0, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ ne sont pas orthogonaux sans calculs supplémentaires.
c) Reconnaître deux vecteurs orthogonaux sans calculs supplémentaires.
2. Montrer que les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont orthogonaux.
3. On pose $F = \text{Vect}(u, v)$.
 - a) Supposons que l'on dispose d'une base orthogonale $\mathcal{B}_2 = (u, v, w_3, w_4)$. Déterminer, sans faire de calculs, l'image de $N = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{\mathcal{B}_2}$ par la projection orthogonale sur F en fonction de u, v .
 - b) Déterminer l'image de $M = (a, b, c, d)_{\mathcal{B}}$ par la projection orthogonale sur F en fonction de u, v .
 - c) Déterminer l'image de $Q = (x, y, z, t)$ par la projection orthogonale sur F en fonction de u, v .

EXERCICE 6: [Indications] – Cours – Calculer –

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sans faire de calculs.
2. a) En observant la matrice $M - 3Id$, sans faire de calculs supplémentaires, vérifier que 3 est valeur propre de M . Déterminer de plus la dimension de son espace propre E_3 sans faire de calculs (ou, au plus, une soustraction de deux nombres.)
b) Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires de M en observant encore la matrice $M - 3Id$. (Pas de résolution de système.)

3. a) Justifier qu'il existe une valeur propre μ différente de 3.
- b) Dédire de la question 2b) un troisième vecteur propre de M associé à μ puis déterminer μ .
- c) A-t-on toutes les valeurs propres de M ?

EXERCICE 7: [Indications] – Cours – Calculer –

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ caractérisé par le système d'équation

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthogonale de F , nommée (v_1, v_2) .
2. Déterminer l'image d'un point $M \in \mathbb{R}^4$ (exprimé dans la base canonique) par la projection orthogonale p sur F en fonction de v_1, v_2 .
3. En déduire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur F .
4. Calculer $d(e_1, F)$ où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Aller plus loin

EXERCICE 8: [Indications] – Chercher – Mobiliser – ☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^t A A = I_n$. Montrer A est symétrique puis que A est la matrice identité.

EXERCICE 9: [Indications] – Chercher – ☆

Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$. Soit (u, v) une famille libre de E et f l'application définie sur E par

$$f(x) = \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. a) Vérifier que $\text{rg}(f) \leq 2$
- b) En déduire une première valeur propre λ_0 de f et un minorant de la dimension de l'espace propre associé.

3. Notons $(u, v, v_3, \dots, v_n)$ une base de E avec $u, v \perp \text{Vect}(v_3, \dots, v_n)$. (On admet que ceci est possible.

- a) Quelle serait la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$?
- b) En déduire l'existence de deux autres valeurs propres de f .

EXERCICE 10: [Indications] – Chercher – Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si u et v sont unitaires, on a

$$\langle u + v, u - v \rangle = 0$$

2. Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

Montrer que $\|f(u)\| = \|f(v)\|$ pour tout vecteur u, v tels que $\|u\| = \|v\|$.

3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

EXERCICE 11: [Indications] – Chercher – ☆

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle^2$$

Montrer que $(v_1, \dots, v_r)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Indications

Exercice 2

Exprimer $x^2 + y^2 + z^2$ et $x - y + 2z$ respectivement avec une norme et un produit scalaire.

Exercice 10

2. Commencer par montrer l'égalité avec u et v unitaires + qst 1.
Deuxième étape, $u = \|u\|e_1$ et $v = \|v\|e_2$ avec e_1, e_2 de norme 1.