

Exercice 1 (★). Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série converge puis donner sa somme si possible :

- | | | | |
|-------------------------------------|---|------------------------------------|---|
| 1. $\sum_{n \geq 0} n^2$ | 2. $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ | 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{2}{3^n}$ | 4. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ |
| 5. $\sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!}$ | 6. $\sum_{n \geq 1} \frac{5}{6^n}$ | 7. $\sum_{n \geq 0} 2^n$ | 8. $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ |

Exercice 2 (★★). Dans chacun des cas suivants, montrer que la série converge et calculer sa somme :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$ | 2. $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n!}$ | 3. $\sum_{n \geq 0} \frac{5}{(2n+1)(2n+3)}$ |
|--|---|---|

Exercice 3 (★★). On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire u_n sous la forme $u_n = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$.
- Calculer alors la somme de la série.

Exercice 4 (★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

- | | | | |
|--------------------------------------|---|--|---|
| 1. $u_n = \frac{n+1}{n}$ | 2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ | 3. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ | 4. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ |
| 5. $u_n = \frac{1}{n^2 + \sin(n^6)}$ | 6. $u_n = \frac{n^2 + 3n + 4}{2(n+1)^4 + \ln(n)}$ | 7. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$ | 8. $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2}$ |
| 9. $u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{e^n}$ | 10. $u_n = \frac{(-1)^n \tan(\frac{1}{n})n^2}{e^{\frac{n}{2}}}$ | 11. $u_n = \frac{3n^2 - \ln(n+1)}{5(n+1)^3}$ | 12. $u_n = \frac{1}{\ln(n)}$ |

Exercice 5 (★). Étudier la convergence des séries de terme général

- | | |
|---|---|
| 1. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$ | 2. $v_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ |
|---|---|

Exercice 6 (★). On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente. Montrer alors que la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ converge aussi.

Exercice 7 (★★). Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants.

- | | | |
|-------------------------------|--|---|
| 1. $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ | 2. $u_n = \ln\left(\frac{2 + \sin(\frac{1}{n})}{2 - \sin(\frac{1}{n})}\right)$ | 3. $u_n = \frac{\cos(n^2) + n \sin(n)}{n^2 \sqrt{n}}$ |
|-------------------------------|--|---|

Exercice 8 (★★). On définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

- Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.
- Montrer que pour tous entiers n et m dans $\mathbb{N}^*$, on a $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{(k+1)^3} \leq \int_n^{n+m+1} \frac{1}{x^3} dx \leq \sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{k^3}$.
- En déduire un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9 (★★★). Démontrer la convergence de la série de terme général ne^{-n^2} , puis montrer que ses restes R_n vérifient $|R_n| \leq \frac{1}{2}e^{-n^2}$ pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10 (★★). Soit $x \in]-1, 1[$ et P un polynôme de degré inférieur à 2. On cherche à étudier $\sum P(n)x^n$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k$, définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que S_n est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.
2. En exprimant $S'_n(x)$ de deux manières différentes, montrer que $\sum_{n \geq 0} (n+1)x^n$ converge et donner sa somme.
3. Montrer que $\sum_{n \geq 0} (n+1)(n+2)x^n$ est convergente et donner sa somme.
4. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$ existent et déterminer leurs valeurs.
5. De façon générale, quelle méthode adopter pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$ quelconque ?

Exercice 11 (Type DS). On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{\text{ch}(u_n)}$.

1. Soit (x_n) une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi.
2. Rappeler le tableau de variations de la fonction ch , ainsi que son développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et décroissante.
 (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
 (a) Montrer que la suite (v_n) est négative.
 (b) Montrer que (v_n) est convergente de limite nulle.
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n diverge.
5. (a) Montrer que : $v_n \sim -\frac{u_n^2}{2}$.
 (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 diverge.
 (c) Conclure quant à la nature de la série de terme général u_n .