

Modèles de base

EXERCICE 1: – *Modéliser* – Modèle basique

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Rappelez le nombre d'éléments suivants et redonner, pour chaque cas, une rapide démonstration. (*On pourra se contenter de justifier ceci sur un exemple avec n et p petits, par exemple $n = 3$.*)

1. p -listes avec répétition de n éléments.
2. p -listes sans répétition
 - a) de n éléments avec $p \leq n$.
 - b) de p éléments
3. De p tirages sans remise dans une urne contenant n boules numérotées distinctes, avec $p \leq n$.

EXERCICE 2: – *Modéliser* – Modèle "des boîtes" :

On dispose de p boîtes discernables. Combien y a-t-il de manières de répartir

1. n boules indiscernables dans ces boîtes, avec au moins une boule par boîte ?
2. n boules discernables entre elles dans ces boîtes, avec la possibilité de mettre plusieurs boules dans la même boîte ?
3. n boules indiscernables entre elles dans ces boîtes (avec la possibilité de mettre 0 boule dans les boîtes.) ?
4. n boules indiscernables entre elles dans ces boîtes, avec maximum une boule par boîte ?

EXERCICE 3: – *Modéliser* – Répartitions pertinentes

Modéliser les cas ci-dessous grâce aux situations basiques des exercices précédents et répondre aux questions posées.

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de p -listes $(i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que :
 - a) $i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \dots p, i_k \neq 0$
 - b) $i_1 + i_2 + \dots + i_p = n$ avec $\forall k = 1 \dots p, i_k \in \mathbb{N}$.
 - c) $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ ☆
 - d) $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n$ ☆
2. Applications :
 - a) Quel est le nombre de solutions de $x + y + z + t = 50$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{N}^*$?
 - b) Quel est le nombre de solutions de $x + y + z + t = 50$, avec $x, y, z, t \in \mathbb{N}$?

EXERCICE 4: – *Modéliser* – Système complet ☆

Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de $x + 2y + z = 40$, avec $x, y, z \in \mathbb{N}$.

1. Détailler la situation avec des "ou" en prenant en compte les différentes valeurs de y possibles. En déduire un système complet détaillant les solutions.
2. En déduire un dénombrement des solutions.

EXERCICE 5: – *Modéliser* – Tirage avec remise sans ordre ☆

Une urne contient n boules numérotées. Le but de cet exercice est de déterminer combien il y a de manières d'effectuer k tirages avec remise, sans se soucier de l'ordre des tirages et en se préoccupant du nombre d'occurrence d'un numéro.

1. Montrer que l'ensemble des tirages peut être modélisé par l'ensemble des situations du type $N_1 + \dots + N_n = N$ où les N_i sont des entiers positifs ou nuls.
2. En déduire le nombre de tirages possibles.

Applications concrètes

EXERCICE 6: – *Modéliser* –

De combien de façons peut-on placer 12 personnes dans 3 pièces de manière à avoir :

- 2 personnes dans la pièce 1
- 6 personnes dans la pièce 2
- 4 personnes dans la pièce 3

EXERCICE 7: – *Modéliser* –

Un concert comprend trois chanteurs et deux chanteuses avec chacun un numéro. De combien de façons peut-on arranger le programme si on veut commencer et finir par un chanteur ?

EXERCICE 8: – *Modéliser* –

Le but de cet exercice est de déterminer combien de mots de 8 lettres on peut composer avec seulement les lettres A, B et C comprenant autant de lettres A que de lettres B .

1. Découper les possibilités avec des "ou" afin de créer un système complet. (*On pourra s'intéresser au nombre de fois où on obtient A .*)
2. En déduire le nombre de résultats possibles.

EXERCICE 9: – *Modéliser* –

Trois personnes A, B, C se partagent 7 pièces de 1 euros.

1. Combien de partages sont possibles ? (avec possibilité de ne rien recevoir.)
2. Combien y a-t-il de partages où chaque personne reçoit quelque chose ?
3. Reprendre les questions avec n pièces.

EXERCICE 10: – *Modéliser* –

Combien y a-t-il de façon de répartir alternativement 5 plantes vertes et 5 plantes fleuries distinctes sur un parterre (toutes les plantes sont discernables)

1. longiligne
2. circulaire.

★

EXERCICE 11: – *Modéliser* –

Dans combien de nombres entre 1000 et 9999 rencontre-t-on

1. zéro fois le nombre 3 ?
2. une fois le nombre 3 ?
3. trois fois le nombre 7 ?

EXERCICE 12: – *Modéliser – Cours* –

On considère les ensembles $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Combien existe-t-il d'applications de E dans F ?
2. Combien existe-t-il d'applications f de E dans F telles que $f(a) = 1$?
3. Combien existe-t-il d'applications injectives de E dans F ?
4. Combien existe-t-il d'applications surjectives de E dans F ?
5. Combien existe-t-il d'applications de $E \times F$ dans F^3 ?

EXERCICE 13: – *Modéliser – Chercher* –

★

Soient p et n deux entiers naturels non nuls. Montrer que le nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ est $\binom{n+p-1}{p}$.

EXERCICE 14: – *Modéliser – Chercher* –

★★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble de cardinal $n+1$ dans un ensemble de cardinal n ?

EXERCICE 15: – *Cours* –

Soit E un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etant donné A une partie de E à p éléments, déterminer le cardinal des ensembles suivants :
 - a) $M = \{B \in \mathcal{P}(E) : B \subseteq A\}$.
 - b) $N = \{B \in \mathcal{P}(E) : B \cap A = \emptyset\}$.
 - c) $R = \{B \in \mathcal{P}(E) : A \subseteq B\}$.
2. Pour tout p , déterminer le cardinal de l'ensemble

$$\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 : |A| = p \text{ et } B \cap A = \emptyset\}$$

3. En déduire le cardinal de l'ensemble $\{(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 : B \cap A = \emptyset\}$.

Inclusion - Exclusion

EXERCICE 16: – *Modéliser – Chercher* –

★

1. Quel est le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 5, ni par 7 compris entre 1 et 210 ?
2. Quel est le nombre d'entiers qui ne sont divisibles ni par 3, ni par 5, ni par 7 compris entre 1 et 1000 ?

Coefficients binomiaux

EXERCICE 17: – *Calculer – Chercher* –

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

1. $C_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $C_2 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$
2. $S_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$

3. *Application* : Montrer qu'il y a autant de parties de $E = \{1, \dots, n\}$ de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

EXERCICE 18: – *Calculer – Chercher* –

★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. À l'aide de la formule de Pascal, calculer $\sum_{k=n}^{2n} \binom{k-1}{n-1}$
2. Calculer de deux manières différentes combien de mots de $2n$ lettres on peut former avec n lettres A et n lettres B , puis retrouver la formule.

EXERCICE 19: – *Calculer – Raisonner* –

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$, où $n \geq p$.

1. Le but de cette question est d'établir une égalité en étudiant le nombre total de façons de choisir $p+1$ éléments dans un ensemble en contenant $n+1$ de deux façons différentes.
 - a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note également $S_k = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$.

On note " C_k " la méthode de choix suivante :

C_k : ne pas choisir $x_{k+1}, \dots, x_n$, mais choisir x_k puis p autres éléments dans S_k .

Justifier que l'ensemble des $(C_k)_{k=p, \dots, n}$ est une partition de l'ensemble des choix possibles de $p+1$ éléments de S .

- b) Sans utiliser la formule de Pascal, mais en utilisant des arguments de dénombrement, en déduire que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

2. En déduire la valeur de $S' = \sum_{k=p}^n k \binom{k}{p}$.

(On rappelle que $(k+1) \binom{k}{p} = (p+1) \binom{k+1}{p+1}$).

EXERCICE 20: Formule de Vandermonde – *Modéliser – Calculer –*

1. Montrer que, pour tout entier $n, m \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, m+n \rrbracket$, on a

★

$$\sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$$

2. En déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Quelques problèmes

EXERCICE 21: – *Modéliser – Chercher –*

1. De combien de façons une femme peut-elle arranger deux bagues différentes sur l'index, le majeur et l'annulaire (en supposant que tous ces doigts aient même grosseur...)
(*Attention* : à l'ordre des bagues sur un même doigt !)
2. Même question avec n bagues.

★★

EXERCICE 22: binôme généralisé par dénombrement – *Chercher – Raisonner –* ★★

On dispose de a lettres A et b lettres B, avec ces $n = a + b$ lettres on forme un " mot ".

1. Combien de mots distincts peut-on former ?
2. Généraliser au cas de k lettres.
3. En déduire la formule :

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{r_1+r_2+\dots+r_k=n} \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_k^{r_k}$$

Indications

Exercice 2

2. Chaque boule peut choisir sa boîte.

Exercice 3

1. a) On pourra se ramener à des boules indiscernables dans des boîtes avec au moins une boule par boîte.
- b) On pourra se ramener à des boules indiscernables dans des boîtes avec possibilité de 0 boule par boîte.
- c) On pourra se servir du modèle des boules et des cloisons en repensant la définition des i_k .
- d) On pourra se servir du modèle des boîtes et des croix en repensant la définition des i_k .

Exercice 4

1. On pourra se demander pour commencer quelles sont précisément les valeurs de y possible afin de pouvoir se dire, dans la question suivante "si $y = 1$, si $y = 2$, etc. . .
2. Pour un y fixé, on peut se ramener à des cas déjà traités (ou réfléchir directement au nombre de cas de $x + z = 40 - 2y$, éventuellement un par un si besoin ($y = 0, y = 1, y = 2, \dots$))

Exercice 6

Il s'agit d'une suite de choix successifs.

Exercice 7

Il s'agit d'une suite de choix successifs.

Exercice 11

Attention, il faut penser à retirer les nombres entre 0 et 999.

Exercice 13

Modéliser en se servant des premiers exercices.

Exercice 14

Considérer la liste des $n + 1$ images des éléments de l'ensemble de départ.

Exercice 16

1. Calculer le cardinal de l'ensemble $M_2 \cup M_5 \cup M_7$, où M_i désigne l'ensemble des multiples de i dans $\llbracket 1; 210 \rrbracket$.

Exercice 17

2. Calculer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$

Exercice 18

2. On pourra par exemple créer un système complet en considérant le nombre exact de B au début du mot.

Exercice 19

2. Se ramener à l'exercice précédent : penser à dire que $k = (k + 1) - 1$!

Exercice 20

1. Décomposer par exemple $(x+y)^{m+n} = (x+y)^m (x+y)^n$ puis utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 21

1. Distinguer par exemple le fait d'avoir une ou 2 bague(s) par doigt.
2. On pourra :
- soit se poser d'abord la question du choix du nombre de bagues par doigt, puis faire le choix des bagues.
 - soit commencer par décomposer suivant toutes les possibilités d'ordonner les bagues sans tenir compte des doigts et ensuite, découper par doigt.