

**Objectifs du chapitre :**

- Résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants
- Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée
- Appliquer la méthode d'Euler pour approcher une solution
- Rappeler les nombres complexes (forme algébrique, module, conjugué) et résoudre une équation du second degré à discriminant négatif
- Résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants
- Identifier les régimes aperiodique, critique et pseudo-périodique
- Modéliser des phénomènes physiques : circuits RC, RLC, thermique, amortisseurs

**Situation professionnelle****Charge d'un condensateur et confort thermique**

Un technicien en électronique étudie la charge d'un condensateur dans un circuit RC alimenté par une source de tension continue de 12 V. Il constate que la tension aux bornes du condensateur augmente progressivement avant de se stabiliser. Comment modéliser mathématiquement cette évolution ?

Par ailleurs, un ingénieur en génie climatique souhaite modéliser le refroidissement d'un bâtiment après l'arrêt du chauffage. La température intérieure décroît selon une loi qui dépend de l'isolation et de la température extérieure.

Ces deux phénomènes se modélisent à l'aide d'**équations différentielles** : des équations reliant une fonction inconnue à ses dérivées.

# 1. Équations différentielles linéaires du premier ordre

## 1.1 Définition et forme générale

### DÉFINITION — ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Une **équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants** est une équation de la forme :

$$a y'(t) + b y(t) = c(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes réelles ( $a \neq 0$ ) et  $c(t)$  est une fonction donnée appelée **second membre**.

- Si  $c(t) = 0$  : l'équation est dite **homogène** (ou sans second membre).
- Si  $c(t) \neq 0$  : l'équation est dite **avec second membre**.

### EXEMPLES

- $2y' + 3y = 0$  — équation homogène ( $a = 2, b = 3$ )
- $y' + 5y = 10$  — second membre constant
- $3y' - y = 6t + 1$  — second membre polynôme
- $y' + 2y = 4e^{-t}$  — second membre exponentielle

## 1.2 Solution de l'équation homogène

### PROPRIÉTÉ — SOLUTION HOMOGENÈNE

L'équation homogène  $a y' + b y = 0$  admet pour solution générale :

$$y_H(t) = C e^{-\frac{b}{a} t}$$

où  $C$  est une constante réelle quelconque.

Solution de  $a y' + b y = 0$

$$y_H(t) = C e^{-\frac{b}{a} t}$$

### MÉTHODE — RÉSOUDRE L'ÉQUATION HOMOGÈNE

1. Identifier les coefficients  $a$  et  $b$ .
2. Calculer  $-\frac{b}{a}$ .
3. Écrire la solution :  $y_H(t) = C e^{-\frac{b}{a}t}$ .

### EXEMPLE

Résoudre  $3y' + 6y = 0$ .

On a  $a = 3$ ,  $b = 6$ , donc  $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{3} = -2$ .

Solution :  $y_H(t) = C e^{-2t}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$ .

### 1.3 Solution particulière selon le second membre

#### PROPRIÉTÉ — STRUCTURE DE LA SOLUTION GÉNÉRALE

La solution générale de  $a y' + b y = c(t)$  est :

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

où  $y_H$  est la solution générale de l'équation homogène et  $y_P$  est **une** solution particulière de l'équation complète.

### MÉTHODE — TROUVER UNE SOLUTION PARTICULIÈRE

On cherche  $y_P$  de la

**même forme**

que le second membre  $c(t)$  :

Second membre $c(t)$	Forme de $y_P(t)$
Constante $k$	$y_P = \alpha$ (constante)
Polynôme de degré $n$	Polynôme de degré $n$
$k e^{\lambda t}$ (avec $\lambda \neq -b/a$ )	$y_P = \alpha e^{\lambda t}$

On injecte  $y_P$  dans l'équation et on identifie les coefficients.

### EXEMPLE 1 — SECOND MEMBRE CONSTANT

Résoudre  $y' + 5y = 10$ .

**Homogène :**  $y_H = C e^{-5t}$ .

**Particulière :** on cherche  $y_P = \alpha$ . Alors  $y'_P = 0$ , d'où  $0 + 5\alpha = 10$ , soit  $\alpha = 2$ .

**Solution générale :**  $y(t) = C e^{-5t} + 2$ .

### EXEMPLE 2 — SECOND MEMBRE POLYNÔME

Résoudre  $y' + 2y = 4t + 6$ .

**Homogène :**  $y_H = C e^{-2t}$ .

**Particulière :** on cherche  $y_P = \alpha t + \beta$ . Alors  $y'_P = \alpha$ .

En substituant :  $\alpha + 2(\alpha t + \beta) = 4t + 6$ , soit  $2\alpha t + (\alpha + 2\beta) = 4t + 6$ .

Par identification :  $2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$  et  $\alpha + 2\beta = 6 \Rightarrow 2 + 2\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2$ .

Donc  $y_P(t) = 2t + 2$  et **solution générale :**  $y(t) = C e^{-2t} + 2t + 2$ .

### EXEMPLE 3 — SECOND MEMBRE EXPONENTIEL

Résoudre  $y' + 3y = 2e^t$ .

**Homogène :**  $y_H = C e^{-3t}$ .

**Particulière :** on cherche  $y_P = \alpha e^t$ . Alors  $y'_P = \alpha e^t$ .

En substituant :  $\alpha e^t + 3\alpha e^t = 2e^t$ , soit  $4\alpha = 2$ , d'où  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**Solution générale :**  $y(t) = C e^{-3t} + \frac{1}{2}e^t$ .

## 1.4 Détermination de la constante par condition initiale

### MÉTHODE — UTILISER LA CONDITION INITIALE

1. Écrire la solution générale  $y(t) = C e^{-\frac{b}{a}t} + y_P(t)$ .
2. Remplacer  $t$  par la valeur initiale (souvent  $t = 0$ ) et  $y$  par  $y(0)$  donné.
3. Résoudre l'équation obtenue pour trouver  $C$ .

### EXEMPLE

Résoudre  $y' + 5y = 10$  avec  $y(0) = 0$ .

Solution générale :  $y(t) = C e^{-5t} + 2$ .

Condition initiale :  $y(0) = C e^0 + 2 = C + 2 = 0$ , donc  $C = -2$ .

**Solution** :  $y(t) = -2 e^{-5t} + 2 = 2(1 - e^{-5t})$ .

### À retenir — Résolution complète d'une ED du 1er ordre

1. Résoudre l'équation homogène  $\rightarrow y_H = C e^{-\frac{b}{a}t}$
2. Trouver une solution particulière  $y_P$  de même forme que  $c(t)$
3. Solution générale :  $y = y_H + y_P$
4. Déterminer  $C$  avec la condition initiale

### MINI-EXERCICE 1

Résoudre une ED du 1er ordre

Résoudre l'équation différentielle  $2y' + 4y = 12$  avec la condition initiale  $y(0) = 1$ .

### MINI-EXERCICE 2

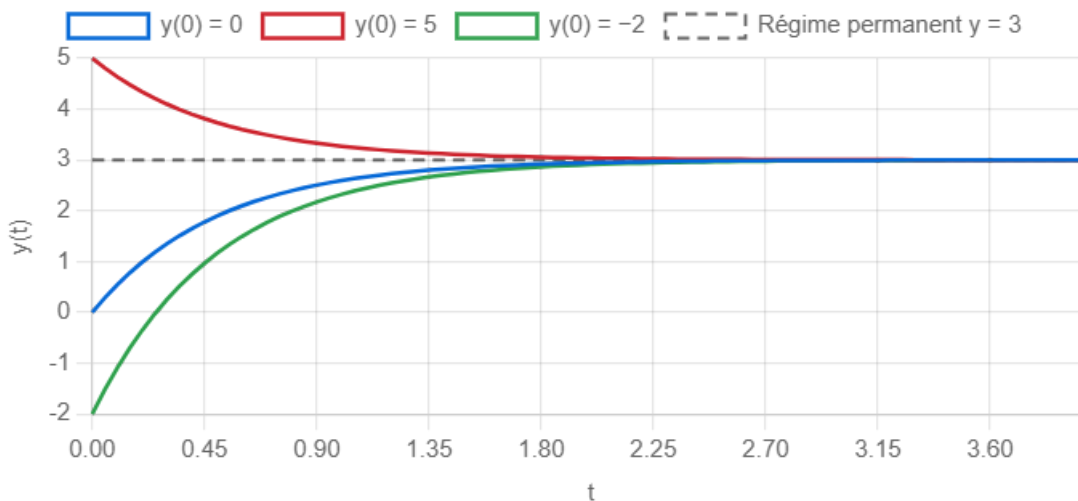
Second membre polynomial

Résoudre  $y' - y = 2t$  avec  $y(0) = 3$ .

## 1.5 Représentation graphique des solutions

Observons l'allure des solutions du premier ordre pour l'équation  $y' + 2y = 6$  avec différentes conditions initiales :

### Solutions de $y' + 2y = 6$ (différentes conditions initiales)



#### ATTENTION

Quelle que soit la condition initiale, la solution tend toujours vers la solution particulière constante  $y_P = 3$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Le terme  $C e^{-2t}$  s'appelle le **régime transitoire** et  $y_P$  le **régime permanent**.

## 1.6 Méthode d'Euler

### DÉFINITION — MÉTHODE D'EULER

La **méthode d'Euler** est une méthode numérique qui permet d'approcher la solution d'une équation différentielle  $y' = f(t, y)$  pas à pas, à partir d'une condition initiale  $y(t_0) = y_0$ .

### MÉTHODE — ALGORITHME D'EULER

On choisit un

**pas**

$h > 0$  et on construit une suite de points  $(t_n, y_n)$  :

$$t_{n+1} = t_n + h \quad \text{et} \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$$

À chaque étape, on avance le long de la tangente sur une distance  $h$ .

**EXEMPLE — EULER SUR  $Y' = 3 - 2Y$ ,  $Y(0) = 0$ ,  $H = 0,5$**

On a  $f(t, y) = 3 - 2y$ .

$n$	$t_n$	$y_n$	$f(t_n, y_n) = 3 - 2y_n$	$y_{n+1} = y_n + 0,5 \times f$
0	0	0	3	1,5
1	0,5	1,5	0	1,5
2	1,0	1,5	0	1,5
3	1,5	1,5	0	1,5

La solution exacte est  $y(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t})$ . En  $t = 0,5$ ,  $y(0,5) \approx 1,13$ , tandis qu'Euler donne 1,5. L'erreur diminue si l'on réduit le pas  $h$ .

**ATTENTION**

Plus le pas  $h$  est petit, plus l'approximation est précise, mais plus le nombre de calculs augmente. En pratique, on utilise un tableur ou un programme informatique.

## 2. Rappels sur les nombres complexes (forme algébrique)

Les nombres complexes interviennent dans la résolution des équations du second ordre lorsque le discriminant est négatif.

**DÉFINITION — UNITÉ IMAGINAIRE**

On note  $j$  le nombre tel que :

$$j^2 = -1$$

*(En BTS, on utilise la notation  $j$  au lieu de  $i$  pour éviter la confusion avec l'intensité électrique.)*

### DÉFINITION — FORME ALGÈBRIQUE

Tout **nombre complexe**  $z$  peut s'écrire sous la forme :

$$z = a + jb$$

où  $a = \operatorname{Re}(z)$  est la **partie réelle** et  $b = \operatorname{Im}(z)$  est la **partie imaginaire**.

### PROPRIÉTÉ — MODULE ET CONJUGUÉ

Soit  $z = a + jb$ .

- Le **conjugué** de  $z$  est  $\bar{z} = a - jb$ .
- Le **module** de  $z$  est  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .
- Propriété utile :  $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$ .

## 2.1 Équation du second degré à discriminant négatif

### PROPRIÉTÉ — RÉOLUTION DANS $\mathbb{C}$

Soit  $ar^2 + br + c = 0$  avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ .

En posant  $\Delta' = |\Delta| = 4ac - b^2 > 0$ , les deux racines **complexes conjuguées** sont :

$$r_1 = \frac{-b + j\sqrt{\Delta'}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - j\sqrt{\Delta'}}{2a} = \bar{r}_1$$

### EXEMPLE

Résoudre  $r^2 + 2r + 5 = 0$ .

$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ , donc  $\Delta' = 16$ ,  $\sqrt{\Delta'} = 4$ .

$$r_1 = \frac{-2 + 4j}{2} = -1 + 2j \quad \text{et} \quad r_2 = -1 - 2j.$$

### MINI-EXERCICE 3

Résoudre dans  $\mathbb{C}$

Résoudre l'équation  $r^2 + 4r + 13 = 0$ .

## 3. Équations différentielles linéaires du second ordre

### 3.1 Définition et équation caractéristique

#### DÉFINITION — ED DU SECOND ORDRE

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est de la forme :

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = d(t)$$

où  $a, b, c$  sont des constantes réelles ( $a \neq 0$ ) et  $d(t)$  est le second membre.

#### DÉFINITION — ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE

L'équation caractéristique associée à  $a y'' + b y' + c y = 0$  est l'équation algébrique :

$$a r^2 + b r + c = 0$$

Son discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  détermine la nature des solutions.

### 3.2 Résolution de l'équation homogène : les trois cas

#### PROPRIÉTÉ — SOLUTION HOMOGENÈNE SELON LE SIGNE DE $\Delta$

Soit  $ay'' + by' + cy = 0$  et  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

Cas	Racines	Solution générale
$\Delta > 0$	$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$y_H = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$
$\Delta = 0$	$r_0 = \frac{-b}{2a}$ (racine double)	$y_H = (A + Bt) e^{r_0 t}$
$\Delta < 0$	$r = \alpha \pm j\omega$ avec $\alpha = \frac{-b}{2a}, \omega = \frac{\sqrt{ \Delta }}{2a}$	$y_H = e^{\alpha t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes réelles déterminées par les conditions initiales.

Les trois formes de la solution homogène du 2nd ordre

$$\Delta > 0 : y_H = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t}$$

$$\Delta = 0 : y_H = (A + Bt) e^{r_0 t}$$

$$\Delta < 0 : y_H = e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

#### EXEMPLE 1 — $\Delta > 0$ (RÉGIME APÉRIODIQUE)

Résoudre  $y'' + 5y' + 6y = 0$ .

Équation caractéristique :  $r^2 + 5r + 6 = 0$ ,  $\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ .

$$r_1 = \frac{-5 - 1}{2} = -3 \text{ et } r_2 = \frac{-5 + 1}{2} = -2.$$

Solution :  $y(t) = A e^{-3t} + B e^{-2t}$ .

**EXEMPLE 2 —  $\Delta = 0$  (RÉGIME CRITIQUE)**

Résoudre  $y'' + 4y' + 4y = 0$ .

Équation caractéristique :  $r^2 + 4r + 4 = 0$ ,  $\Delta = 16 - 16 = 0$ .

Racine double :  $r_0 = \frac{-4}{2} = -2$ .

Solution :  $y(t) = (A + Bt)e^{-2t}$ .

**EXEMPLE 3 —  $\Delta < 0$  (RÉGIME PSEUDO-PÉRIODIQUE)**

Résoudre  $y'' + 2y' + 5y = 0$ .

Équation caractéristique :  $r^2 + 2r + 5 = 0$ ,  $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ .

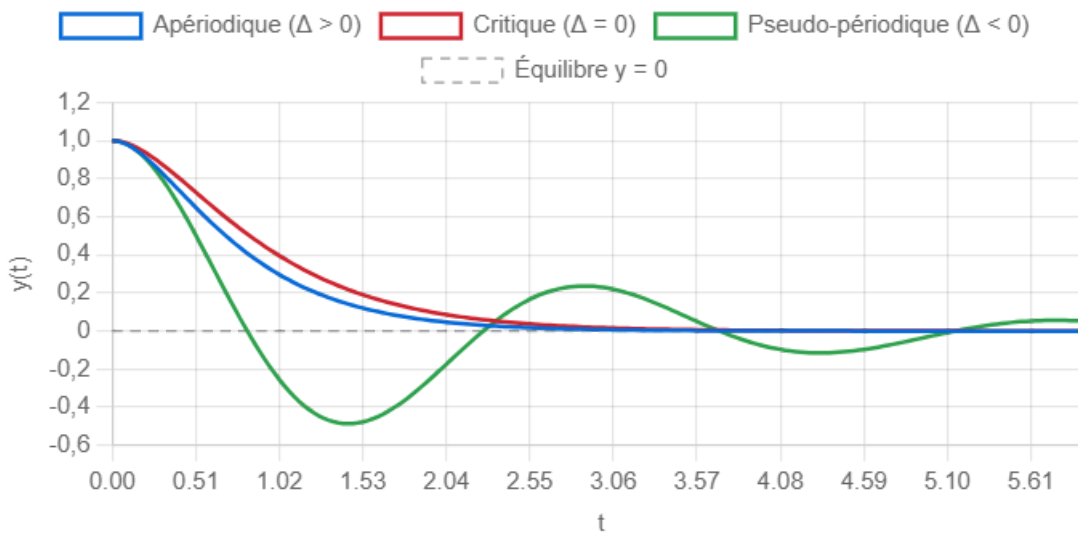
$\alpha = \frac{-2}{2} = -1$ ,  $\omega = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$ .

Solution :  $y(t) = e^{-t} (A \cos(2t) + B \sin(2t))$ .

**3.3 Les trois régimes**

Le graphique suivant illustre les trois types de solutions pour des conditions initiales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  :

### Les trois régimes du second ordre ( $y(0)=1, y'(0)=0$ )



#### À retenir — Les trois régimes du second ordre

- **Apériodique** ( $\Delta > 0$ ) : retour lent à l'équilibre, sans oscillation.
- **Critique** ( $\Delta = 0$ ) : retour le plus rapide possible sans oscillation.
- **Pseudo-périodique** ( $\Delta < 0$ ) : oscillations amorties autour de l'équilibre.

### 3.4 Solution particulière du second ordre

#### MÉTHODE — SOLUTION PARTICULIÈRE DE $AY'' + BY' + CY = D(T)$

On cherche  $y_P$  de la même forme que le second membre  $d(t)$  :

Second membre $d(t)$	Forme de $y_P(t)$
Constante $k$	$y_P = \alpha$
Polynôme de degré $n$	Polynôme de degré $n$
$k e^{\lambda t}$	$y_P = \alpha e^{\lambda t}$ (si $\lambda$ n'est pas racine)
$A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$	$y_P = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$

La solution générale est toujours  $y = y_H + y_P$ .

#### EXEMPLE — SECOND MEMBRE CONSTANT

Résoudre  $y'' + 2y' + 5y = 15$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ .

Homogène :  $y_H = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$  (vu précédemment).

Particulière :  $y_P = \alpha$ ,  $5\alpha = 15$ ,  $\alpha = 3$ .

Solution générale :  $y(t) = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t) + 3$ .

Conditions initiales :

- $y(0) = A + 3 = 0 \Rightarrow A = -3$ .
- $y'(t) = e^{-t}[(-A + 2B) \cos 2t + (-B - 2A) \sin 2t]$ .
- $y'(0) = -A + 2B = 3 + 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{2}$ .

Solution :  $y(t) = e^{-t}(-3 \cos 2t - \frac{3}{2} \sin 2t) + 3$ .

### 3.5 Conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$

#### MÉTHODE — DÉTERMINER A ET B

1. Écrire la solution générale  $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$  contenant  $A$  et  $B$ .
2. Calculer  $y'(t)$  (dérivée de la solution générale).
3. Utiliser  $y(0) = y_0$  pour obtenir une première équation en  $A$  et  $B$ .
4. Utiliser  $y'(0) = y'_0$  pour obtenir une seconde équation.
5. Résoudre le système de 2 équations à 2 inconnues.

#### MINI-EXERCICE 4

##### Équation caractéristique et solution homogène

Pour chaque équation, déterminer la nature des racines et écrire la solution homogène :

1)  $y'' + 3y' + 2y = 0$     2)  $y'' + 6y' + 9y = 0$     3)  $y'' + y' + y = 0$

## 4. Applications professionnelles

### 4.1 Circuit RC — Charge d'un condensateur

#### Contexte FED (Fluides, Énergies, Domotique)

Un technicien en domotique réalise un circuit RC série composé d'une résistance  $R = 10 \text{ k}\Omega$  et d'un condensateur  $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ , alimenté par une tension continue  $E = 12 \text{ V}$ .

La loi des mailles donne l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_C(t)$  aux bornes du condensateur :

$$\begin{aligned} &\text{Équation du circuit RC} \\ &RC u'_C(t) + u_C(t) = E \end{aligned}$$

C'est une ED du 1er ordre avec  $a = RC$ ,  $b = 1$ ,  $c(t) = E$ .

#### RÉSOLUTION

On pose  $\tau = RC = 10 \times 10^3 \times 100 \times 10^{-6} = 1 \text{ s}$  (constante de temps).

L'équation devient :  $u'_C + u_C = 12$ .

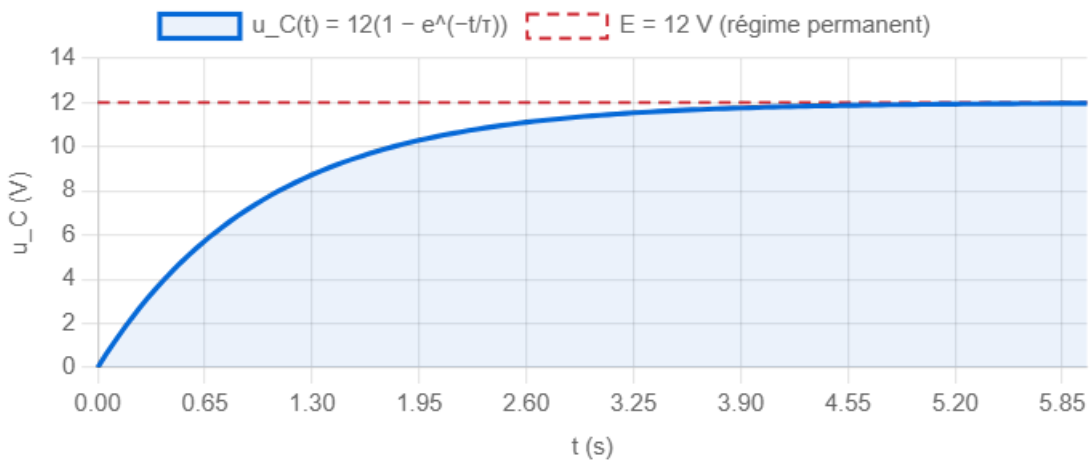
**Homogène :**  $u_{C,H} = K e^{-t/\tau} = K e^{-t}$ .

**Particulière :**  $u_{C,P} = 12$ .

Avec  $u_C(0) = 0$  (condensateur initialement déchargé) :  $K + 12 = 0$ ,  $K = -12$ .

**Solution :**  $u_C(t) = 12(1 - e^{-t})$

### Charge d'un condensateur — Circuit RC ( $\tau = 1$ s)



#### ATTENTION

Après  $t = 5\tau$ , le condensateur est chargé à plus de 99 %. On considère en pratique que le régime permanent est atteint.

#### MINI-EXERCICE 5

##### Décharge d'un condensateur

On décharge le condensateur précédent (initialement chargé à 12 V) à travers la même résistance (sans source de tension). L'équation devient  $u'_C + u_C = 0$  avec  $u_C(0) = 12$ . Déterminer  $u_C(t)$ .

#### 4.2 Circuit RLC — Oscillations

##### Contexte électricité

Un technicien en électricité étudie un circuit RLC série ( $R, L, C$  en série) soumis à un échelon de tension  $E$ . Les oscillations dans ce circuit apparaissent naturellement et sont modélisées par une ED du second ordre.

### Équation du circuit RLC

$$LC u_C'' + RC u_C' + u_C = E$$

L'équation caractéristique est  $LC r^2 + RC r + 1 = 0$ . Selon la valeur de  $R$  (amortissement), on retrouve les trois régimes :

- **Apériodique** ( $R$  grand) :  $\Delta > 0$ , retour lent sans oscillation.
- **Critique** ( $R = R_c = 2\sqrt{L/C}$ ) :  $\Delta = 0$ , retour le plus rapide possible.
- **Pseudo-périodique** ( $R$  petit) :  $\Delta < 0$ , oscillations amorties.

#### EXEMPLE NUMÉRIQUE

Avec  $L = 0,1$  H,  $C = 100$   $\mu$ F,  $E = 10$  V :

- Résistance critique :  $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{0,1}{10^{-4}}} = 2 \times \sqrt{1000} \approx 63,2$   $\Omega$ .
- Pour  $R = 200$   $\Omega > R_c$  : régime apériodique.
- Pour  $R = 63,2$   $\Omega = R_c$  : régime critique.
- Pour  $R = 10$   $\Omega < R_c$  : régime pseudo-périodique (oscillations).

### 4.3 Refroidissement d'un bâtiment

#### Contexte bâtiment / thermique

Un ingénieur en génie climatique étudie le refroidissement d'un local après coupure du chauffage. La température intérieure  $T(t)$  vérifie la loi de Newton :

#### Loi de refroidissement de Newton

$$\tau T'(t) + T(t) = T_{\text{ext}}$$

où  $\tau$  est la constante de temps thermique du bâtiment (en heures) et  $T_{\text{ext}}$  la température extérieure (constante).

### EXEMPLE

Un local est à  $T(0) = 20$  °C, température extérieure  $T_{\text{ext}} = 5$  °C, constante de temps  $\tau = 10$  h.

L'ED s'écrit :  $10 T' + T = 5$ , soit  $T' + 0,1 T = 0,5$ .

**Solution :**  $T(t) = K e^{-0,1 t} + 5$ .

Avec  $T(0) = 20$  :  $K + 5 = 20$ ,  $K = 15$ .

$$T(t) = 15 e^{-0,1 t} + 5$$

Après 10 h :  $T(10) = 15 e^{-1} + 5 \approx 15 \times 0,368 + 5 \approx 10,5$  °C.

#### 4.4 Amortisseur mécanique

##### Contexte maintenance

Un technicien de maintenance étudie un système masse-ressort-amortisseur. La position  $x(t)$  de la masse par rapport à l'équilibre vérifie :

Système masse-ressort-amortisseur

$$m x'' + f x' + k x = 0$$

où  $m$  est la masse,  $f$  le coefficient de frottement visqueux et  $k$  la raideur du ressort.

### EXEMPLE

Avec  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $f = 2 \text{ N.s/m}$ ,  $k = 5 \text{ N/m}$ .

Équation caractéristique :  $r^2 + 2r + 5 = 0$ ,  $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ .

$\alpha = -1$ ,  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ .

Le système oscille en s'amortissant :  $x(t) = e^{-t}(A \cos 2t + B \sin 2t)$ .

C'est le régime **pseudo-périodique** : le mouvement est oscillant amorti.

### MINI-EXERCICE 6

#### Amortisseur critique

Quelle valeur du coefficient de frottement  $f$  rend le système précédent ( $m = 1 \text{ kg}$ ,  $k = 5 \text{ N/m}$ ) critique ?

## Équations différentielles

BTS | Exercices | Groupements B1, B2

### Compétences travaillées :

- Résoudre une ED linéaire du 1er ordre à coefficients constants
- Déterminer la solution vérifiant une condition initiale
- Résoudre une ED du 2nd ordre (3 cas selon le discriminant)
- Trouver une solution particulière selon le type de second membre
- Appliquer la méthode d'Euler pour approcher une solution
- Modéliser des phénomènes physiques : circuits RC, RLC, thermique

**EXERCICE 1**

**Résolution d'équations homogènes du 1er ordre**

Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes :

a)  $y' + 3y = 0$

b)  $2y' - 6y = 0$

c)  $5y' + y = 0$

d)  $4y' + 10y = 0$

*Mes calculs :*

---

---

---

---

## EXERCICE 2

### 1er ordre avec second membre constant

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a)  $y' + 2y = 8$

b)  $3y' + y = 5$

c)  $y' + 4y = -12$

*Mes calculs :*

---

---

---

---

### EXERCICE 3

#### Condition initiale du 1er ordre

Résoudre les équations avec condition initiale :

a)  $y' + y = 6, y(0) = 0$

b)  $y' + 3y = 9, y(0) = 5$

c)  $2y' + y = 4, y(0) = 10$

*Mes calculs :*

---

---

---

---

## EXERCICE 4

### Équation caractéristique du 2nd ordre

Pour chaque équation, écrire l'équation caractéristique, calculer le discriminant et les racines :

a)  $y'' + 7y' + 12y = 0$

b)  $y'' + 6y' + 9y = 0$

c)  $y'' + 2y' + 10y = 0$

d)  $y'' - 4y = 0$

*Mes calculs :*

---

---

---

---

**EXERCICE 5**

**1er ordre avec second membre polynomial**

Résoudre les équations suivantes :

a)  $y' + 2y = 6t + 4$  avec  $y(0) = 0$

b)  $y' - y = 3t^2$  (solution générale uniquement)

*Mes calculs :*

---

---

---

---

**EXERCICE 6**

**1er ordre avec second membre exponentiel**

Résoudre  $y' + 4y = 3e^{-t}$  avec  $y(0) = 2$ .

*Mes calculs :*

---

---

---

---

## EXERCICE 7

### 2nd ordre homogène — Les trois cas

Résoudre les équations suivantes avec les conditions initiales indiquées :

a)  $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

b)  $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$

c)  $y'' + 2y' + 5y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4$

*Mes calculs :*

---

---

---

---

## EXERCICE 8

### Nombres complexes et équation caractéristique

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $r^2 + 6r + 25 = 0$ .

2) En déduire la solution générale de  $y'' + 6y' + 25y = 0$ .

3) Déterminer la solution vérifiant  $y(0) = 3$  et  $y'(0) = -3$ .

*Mes calculs :*

---

---

---

---

**EXERCICE 9**

**2nd ordre avec second membre constant**

Résoudre  $y'' + 4y' + 3y = 6$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ .

*Mes calculs :*

---

---

---

---

**EXERCICE 10**

**2nd ordre avec second membre exponentiel**

Résoudre  $y'' + 3y' + 2y = 4e^{-3t}$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 0$ .

*Mes calculs :*

---

---

---

---

## EXERCICE 11

### Méthode d'Euler

On considère l'équation  $y' = 4 - 2y$  avec  $y(0) = 0$ .

- 1) Résoudre analytiquement cette équation.
- 2) Appliquer la méthode d'Euler avec un pas  $h = 0,25$  pour calculer les valeurs approchées de  $y$  aux points  $t = 0, 0,25, 0,50, 0,75$  et  $1,00$ .
- 3) Comparer les valeurs approchées aux valeurs exactes.

*Mes calculs :*

---

---

---

---

**EXERCICE 12**

**Circuit RC — Charge et décharge d'un condensateur**

Un technicien en électronique réalise un circuit RC série avec  $R = 4,7 \text{ k}\Omega$  et  $C = 47 \text{ }\mu\text{F}$ , alimenté par une source de tension  $E = 9 \text{ V}$ .

**Partie A — Charge**

L'équation vérifiée par  $u_C(t)$  est :  $\tau u'_C + u_C = E$  où  $\tau = RC$ .

- 1) Calculer la constante de temps  $\tau$  (en secondes).
- 2) Résoudre l'équation avec  $u_C(0) = 0$  (condensateur initialement déchargé).
- 3) Calculer  $u_C(\tau)$ ,  $u_C(3\tau)$ ,  $u_C(5\tau)$ . Commenter.
- 4) Au bout de combien de temps le condensateur atteint-il 7 V ?

**Partie B — Décharge**

À l'instant  $t_0$ , on déconnecte la source (le condensateur est chargé à 9 V). L'équation devient  $\tau u'_C + u_C = 0$  avec  $u_C(t_0) = 9$ .

- 5) Résoudre et tracer l'allure de la courbe de décharge.

*Mes calculs :*

---

---

---

---

### EXERCICE 13

#### Circuit RLC — Régimes transitoires

Un circuit RLC série est composé de  $L = 50 \text{ mH}$ ,  $C = 200 \mu\text{F}$ , et une source de tension  $E = 24 \text{ V}$ . L'équation vérifiée par  $u_C(t)$  est :

$$LC u_C'' + RC u_C' + u_C = E$$

soit, numériquement :  $10^{-5} u_C'' + 2 \times 10^{-4} R u_C' + u_C = 24$ .

- 1) Calculer la résistance critique  $R_c = 2\sqrt{L/C}$ .
- 2) Cas 1 :  $R = 50 \Omega$ . Déterminer la nature du régime. Écrire la solution homogène (sans calculer  $A$  et  $B$ ).
- 3) Cas 2 :  $R = R_c$ . Même question.
- 4) Cas 3 :  $R = 5 \Omega$ . Déterminer  $\alpha$  et  $\omega$ . Écrire la solution homogène.
- 5) Quel régime est le plus adapté pour un système de régulation qui doit atteindre la valeur finale le plus rapidement possible sans dépassement ?

*Mes calculs :*

---

---

---

---

## EXERCICE 14

### Thermique du bâtiment — Chauffage et refroidissement

Un ingénieur en génie climatique étudie la température d'un local de bureaux. La température intérieure  $T(t)$  (en °C) vérifie l'équation :

$$\tau T'(t) + T(t) = T_c(t)$$

où  $\tau = 8$  h est la constante de temps thermique du bâtiment et  $T_c(t)$  la température de consigne (en régime chauffé) ou la température extérieure (chauffage coupé).

#### Phase 1 — Refroidissement nocturne

Le chauffage est coupé à 18 h, la température intérieure est de 20 °C. La température extérieure est  $T_{\text{ext}} = 2$  °C (constante).

- 1) Montrer que  $T(t) = 18 e^{-t/8} + 2$  (avec  $t$  en heures à partir de 18 h).
- 2) Quelle est la température à 6 h du matin (12 h plus tard) ?
- 3) Au bout de combien d'heures la température descend-elle sous 12 °C ?

#### Phase 2 — Remise en chauffe

À 6 h, le chauffage redémarre. La consigne est  $T_c = 20$  °C. La condition initiale est la température trouvée à la question 2.

- 4) Écrire et résoudre l'équation différentielle correspondante.
- 5) À quelle heure la température atteint-elle 19 °C ?

*Mes calculs :*

---

---

---

---



# Équations différentielles

BTS | Mathématiques | Durée : 40 min | /20

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_ Date : \_\_\_\_\_

### Exercice 1 — ED du premier ordre, second membre constant (4 pts)

On considère l'équation différentielle  $y' + 3y = 6$ , avec la condition initiale  $y(0) = 0$ .

- Donner la solution générale de l'équation homogène associée. (1 pt)
- Déterminer une solution particulière constante. (1 pt)
- En déduire la solution générale, puis la solution vérifiant  $y(0) = 0$ . (2 pts)

### Exercice 2 — ED du premier ordre, second membre polynôme (4 pts)

Résoudre l'équation  $y' + y = 2t + 1$  avec  $y(0) = 3$ .

### Exercice 3 — Nombres complexes (3 pts)

On rappelle que  $j^2 = -1$ .

- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $r^2 + 6r + 13 = 0$ . (2 pts)
- Donner le module du nombre complexe  $z = -3 + 2j$ . (1 pt)

### Exercice 4 — ED du second ordre homogène (5 pts)

Pour chaque équation, écrire l'équation caractéristique, calculer  $\Delta$ , préciser le régime et donner la solution générale  $y_H(t)$ .

- $y'' + 7y' + 12y = 0$  (1,5 pt)
- $y'' + 6y' + 9y = 0$  (1,5 pt)
- $y'' + 4y' + 13y = 0$  (2 pts)

### Exercice 5 — Application : circuit RC (4 pts)

Un circuit RC série, alimenté par une tension continue  $E = 10 \text{ V}$ , de constante de temps  $\tau = 1 \text{ s}$ , vérifie l'équation  $u'_C + u_C = 10$ , avec  $u_C(0) = 0$  (condensateur déchargé).

- Résoudre cette équation et donner l'expression de  $u_C(t)$ . (3 pts)

b. Calculer  $u_C(1)$  (on prendra  $e^{-1} \approx 0,368$ ). (1 pt)

---