

Fonction inverse

I Rappels

1 - Fonction dérivée

Définition :

La fonction, qui à tout réel x , associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f . Elle se note f' .

Pour dériver une fonction, il faut connaître les formules de dérivation de certaines fonctions :

Fonction	Dérivée
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

On peut également utiliser des formules d'opération sur les fonctions dérivées :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$

Application : Exercice 1

2 - Dérivée d'une fonction du second degré

Définition :

Soit f une fonction du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f'(x) = a \times 2x + b$

Exemple :

On cherche la dérivée de la fonction $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$

En appliquant les formules de dérivation, on a : $f'(x) = 4 \times 2x - 6 + 0$

Donc : $f'(x) = 8x - 6$

3 - Dérivée d'une fonction polynôme de degré 3

Définition :

Soit f une fonction polynôme de degré 3 définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f'(x) = a \times 3x^2 + b \times 2x + c$

Exemple :

On cherche la dérivée de la fonction $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$

En appliquant les formules de dérivation, on a : $g'(x) = 5 \times 3x^2 + 2 \times 2x + 2$

Donc : $g'(x) = 15x^2 + 4x + 2$

4- Variations d'une fonction polynôme

Définition :

En étudiant le signe de la dérivée d'une fonction f , on peut en déduire les variations de la fonction f :

- Si $f'(x)$ est positif, alors la fonction f est croissante.
- Si $f'(x)$ est négatif, alors la fonction f est décroissante.

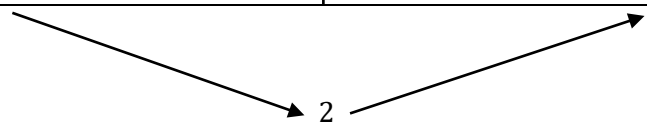
Exemple : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 - 2x + 3$

- On cherche d'abord la dérivée : $f'(x) = 2x - 2$
- Pour ensuite, étudier son signe en résolvant l'équation $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned}2x - 2 &= 0 \\2x &= 2 \\x &= 1\end{aligned}$$

La fonction f' s'annule donc pour $x = 1$ et elle est négative entre $] -\infty ; 1]$ et positive entre $[1 ; +\infty[$ puisque son coefficient directeur est positif.

- Enfin, on dresse le tableau de variations de la fonction f en appliquant la définition :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$		\emptyset	
		-	+
f			

$$f(1) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 2$$

Application : Exercice 2

II Définition et représentation graphique

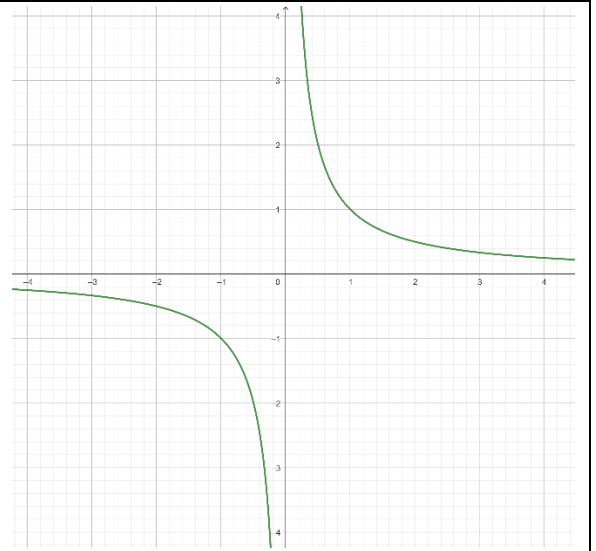
Définition :

La fonction inverse f est définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{1}{x}$

Représentation graphique :

x	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
$f(x)$	-0,5	-1	-2	\emptyset	2	1	0,5

La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ est une **hyperbole** de centre O et est symétrique par rapport à l'origine.



III Dérivée et sens de variation

Propriété :

La dérivée de la fonction inverse f est définie sur \mathbb{R}^* par $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Etude du signe de la dérivée :

- 1 est positif
- x^2 est positif puisqu'un carré est strictement positif sur \mathbb{R}

Par conséquent le signe de la fonction dérivée f' est négatif.

Propriété :

La fonction inverse est décroissante sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$

Application : Exercice 3

IV Aux bornes de son ensemble de définition

1- En $-\infty$ et $+\infty$

x	-100 000	-10 000	-100	-10	-1	...	1	10	100	10 000	100 000
$f(x)$	-0,00001	-0,0001	-0,01	-0,1	-1	...	1	0,1	0,01	0,0001	0,00001

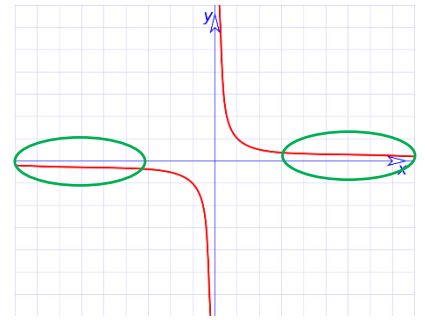
Grâce à ce tableau de valeurs, on constate que :

- Plus la valeur de x est petite quand il est négatif, plus $f(x)$ se rapproche de 0.

- Plus la valeur de x est grande quand il est positif, plus $f(x)$ se rapproche de 0.

On dit que :

- La limite de f lorsque x tend vers $-\infty$ est égale à 0 : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- La limite de f lorsque x tend vers $+\infty$ est égale à 0 : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



Graphiquement, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses.

Définition :

L'axe des abscisses est une **asymptote horizontale** à la courbe de la fonction inverse en $-\infty$ et en $+\infty$

2- En zéro

x	-1	-0,1	-0,01	-0,001	0	0,001	0,01	0,1	1
$f(x)$	-1	-10	-100	-1000	\emptyset	1000	100	10	1

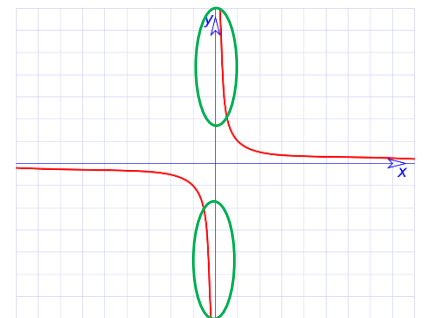
→
←

Grâce à ce tableau de valeurs, on constate que :

- Plus la valeur de x est proche de 0 quand x est négatif, plus $f(x)$ est petit.
- Plus la valeur de x est proche de 0 quand x est positif, plus $f(x)$ est grand.

On dit que :

- La limite de f lorsque x tend vers 0, pour x positif, est égale à $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- La limite de f lorsque x tend vers 0, pour x négatif, est égale à $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$



Graphiquement, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de l'axe des ordonnées.

Définition :

L'axe des ordonnées est une **asymptote verticale** à la courbe de la fonction inverse en 0.

Application : Exercice 4

Fonction inverse (Exercices)

Exercice 1

1/ Donner la dérivée des fonctions suivantes :

a/ $f(x) = 3x$

b/ $g(x) = x^2 + 5$

c/ $h(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 23$

d/ $i(x) = \frac{x^2}{4} + 3x - 16$

2/ Donner le résultat des opérations suivantes :

a/ Soient $f(x) = 4x^2 + 7x - 8$ et $g(x) = -x^2 - 4$. Calculer $(f + g)'$

b/ Soient $h(x) = x^2 + 2x + 3$. Calculer $(kh)'$ sachant que $k = 3$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$

1/ Calculer la fonction dérivée de f

2/ Déterminer le signe de f' en fonction de x

3/ Dresser le tableau de variations de f

4/ A l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f .

Exercice 3

Pour chaque fonction :

- Calculer la dérivée sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$
- Déterminer le signe de la dérivée en fonction de x
- Dresser le tableau de variation de la fonction

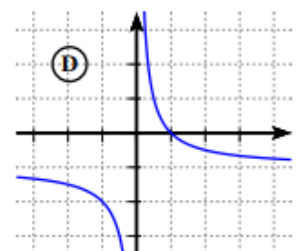
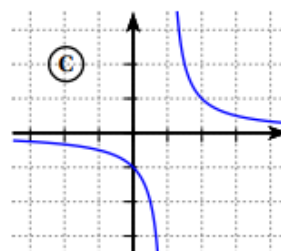
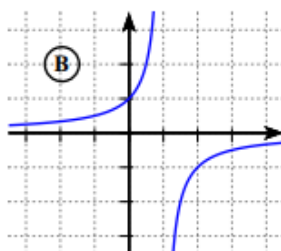
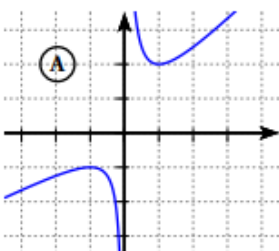
1/ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

2/ $g(x) = 3x - 2 + \frac{1}{x}$

3/ $h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

Exercice 4

Sur les graphiques ci-dessous sont représentées quatre fonctions :



1/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

2/ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

3/ $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = -\infty$

4/ $\lim_{x \rightarrow 1^+} i(x) = +\infty$

a/ Associer chaque fonction à la bonne courbe.

b/ Définir les différentes asymptotes pour chaque graphique.

Exercice 5

On veut tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $g(x) = 3 - \frac{2}{x}$

1/ Recopier et compléter le tableau de valeur ci-dessous

x	-1000	-500	-100	-50	50	100	500	1000
$g(x)$								

2/ Que peut-on en déduire sur le comportement de g en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 6

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = 3 + \frac{1}{x}$

1/ Etudier le sens de variations de la fonction f .

2/ Définir les différentes asymptotes à la courbe représentative de la fonction f .

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1/ Calculer $f'(x)$

2/ Montrer que pour tout réel x non nul : $f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

3/ Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f .

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par $g(x) = 4x + 1 + \frac{9}{x}$

1/ Montrer que pour tout réel x non nul $f'(x) = \frac{(2x-3)(2x+3)}{x^2}$

2/ Etudier le signe de $f'(x)$ sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$

3/ En déduire les variations de la fonction f sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$

Exercice 9

Soit h la fonction définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$ par $h(x) = x + 10 - \frac{1}{x}$

1/ Montrer que pour tout réel x non nul : $h'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$

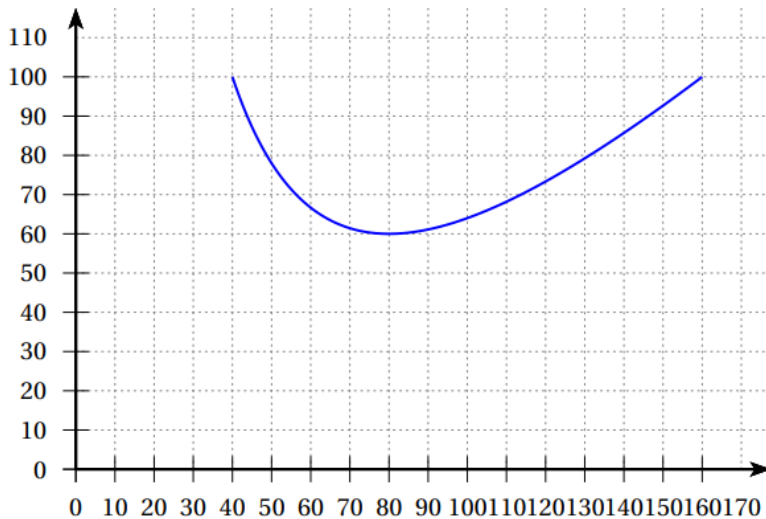
2/ Etudier le signe de $h'(x)$ sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$

3/ En déduire les variations de la fonction h sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[40 ; 160]$ par $f(x) = x - 100 + \frac{6400}{x}$

La courbe ci-dessous est la représentation graphique de f dans un repère.



1/ Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle peut s'écrire $f'(x) = \frac{x^2-6400}{x^2}$

2/ Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[40 ; 160]$

3/ En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[40 ; 160]$

4/ Le coût exprimé en €, de x repas préparés par service dans un restaurant, peut s'écrire, pour $x \in [40 ; 160]$: $C(x) = x^2 - 100x + 6400$

Compléter le tableau :

Nombre de repas	40	50	100
Coût de x repas			
Coût moyen d'un repas			

5/ Ecrire le coût moyen d'un repas en fonction du nombre x de repas préparés. On notera ce coût moyen unitaire $C_m(x)$.

6/ Déduire de la question 3 le nombre de repas que ce restaurant doit servir pour que le coût moyen d'un repas soit minimal.

7/ Trouver, à l'aide du graphique, à quel intervalle doit appartenir x pour que le coût moyen unitaire soit inférieur ou égale à 90 €.