

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer - Chercher -

Soient A et B les points de l'espace $\mathbb{R}^3$ de coordonnées respectives $(2, -2, 1)$ et $(1, 2, 2)$ dans un repère orthonormé centré en O .

1. a) Déterminer les longueurs OA et OB .
b) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle en O .
c) En déduire la longueur du segment $[AB]$.
2. a) On introduit C_α le barycentre de (A, α) , $(B, 1 - \alpha)$ pour $\alpha \in [0, 1]$. Calculer la longueur OC_α .
b) Comment vérifier en partie votre résultat ?
c) En déduire par exemple la longueur OI si I est le milieu de $[AB]$.
3. a) Soit D un point de la droite (AB) . Déduire de toutes ces questions la ou les solutions de l'équation $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \rangle = k$.
b) Proposer une autre méthode pour arriver à ce résultat.

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - Cours -

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Montrer que $(x - y + 2z)^2 \leq 6$.

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Calculer - Cours -

Soit la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$ exprimée dans la base canonique.

1. Déterminer la matrice de Gram G de la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer $\langle u, v \rangle$ où $M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Calculer - Cours -

1. Dans $\mathbb{R}^3$, montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ (noté dans l'ordre (v_1, v_2, v_3)) est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (dans la base canonique). Déterminer les coordonnées de V dans la base $\mathcal{B}$.
3. En déduire les coordonnées dans la base (v_1, v_2, v_3) de la projection orthogonale de V sur
 - a) $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$
 - b) $G = \text{Vect}(v_3)$

4. Déterminer la distance

- a) de V à F
- b) de V à G .

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer - Changement de base

Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^4$. (Ce fait est admis).

1. a) Déterminer la matrice de Gram de $\mathcal{B}$.
b) Vérifier que les vecteurs $v_2 = (0, 1, 0, 0)_{\mathcal{B}}$ et $v_3 = (0, 0, 1, 0)_{\mathcal{B}}$ ne sont pas orthogonaux sans calculs supplémentaires.
c) Reconnaître deux vecteurs orthogonaux sans calculs supplémentaires.
2. Montrer que les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ sont orthogonaux.
3. On pose $F = \text{Vect}(u, v)$.
 - a) Supposons que l'on dispose d'une base orthogonale $\mathcal{B}_2 = (u, v, w_3, w_4)$. Déterminer, sans faire de calculs, l'image de $N = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_{\mathcal{B}_2}$ par la projection orthogonale sur F en fonction de u, v .
 - b) Déterminer l'image de $M = (a, b, c, d)_{\mathcal{B}}$ par la projection orthogonale sur F en fonction de u, v .
 - c) Déterminer l'image de $Q = (x, y, z, t)$ par la projection orthogonale sur F en fonction de u, v .

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] - Cours - Calculer -

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sans faire de calculs.
2. a) En observant la matrice $M - 3Id$, sans faire de calculs supplémentaires, vérifier que 3 est valeur propre de M . Déterminer de plus la dimension de son espace propre E_3 sans faire de calculs (ou, au plus, une soustraction de deux nombres).
b) Déterminer deux vecteurs propres non colinéaires de M en observant encore la matrice $M - 3Id$. (Pas de résolution de système.)

3. a) Justifier qu'il existe une valeur propre μ différente de 3.
- b) Dédire de la question 2b) un troisième vecteur propre de M associé à μ puis déterminer μ .
- c) A-t-on toutes les valeurs propres de M ?

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] – Cours – Calculer –

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ caractérisé par le système d'équation

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$$

1. Trouver une base orthogonale de F , nommée (v_1, v_2) .
2. Déterminer l'image d'un point $M \in \mathbb{R}^4$ (exprimé dans la base canonique) par la projection orthogonale p sur F en fonction de v_1, v_2 .
3. En déduire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p sur F .
4. Calculer $d(e_1, F)$ où $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

Aller plus loin

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Chercher – Mobiliser – ☆☆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^t A A = I_n$. Montrer A est symétrique puis que A est la matrice identité.

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – Chercher – ☆

Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 3$. Soit (u, v) une famille libre de E et f l'application définie sur E par

$$f(x) = \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. a) Vérifier que $\text{rg}(f) \leq 2$
- b) En déduire une première valeur propre λ_0 de f et un minorant de la dimension de l'espace propre associé.
3. Notons $(u, v, v_3, \dots, v_n)$ une base de E avec $u, v \perp \text{Vect}(v_3, \dots, v_n)$. (On admet que ceci est possible.)
- a) Quelle serait la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$?
- b) En déduire l'existence de deux autres valeurs propres de f .

EXERCICE 10: [Indications] [Correction] – Chercher – Soit $E = \mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si u et v sont unitaires, on a

$$\langle u + v, u - v \rangle = 0$$

2. Soit f un endomorphisme de E tel que

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

Montrer que $\|f(u)\| = \|f(v)\|$ pour tout vecteur u, v tels que $\|u\| = \|v\|$.

3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

EXERCICE 11: [Indications] [Correction] – Chercher – ☆

Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, v_k \rangle^2$$

Montrer que $(v_1, \dots, v_r)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Indications

Exercice 2 [Correction]

Exprimer $x^2 + y^2 + z^2$ et $x - y + 2z$ respectivement avec une norme et un produit scalaire.

Exercice 10 [Correction]

2. Commencer par montrer l'égalité avec u et v unitaires + qst 1.
Deuxième étape, $u = \|u\|e_1$ et $v = \|v\|e_2$ avec e_1, e_2 de norme 1.

Exercice 1

1. a) On a

$$OA = \sqrt{9} = 3 \quad ; \quad OB = \sqrt{9} = 3$$

- b) Le triangle est rectangle en O si et seulement si $u = \overrightarrow{OA} \perp v = \overrightarrow{OB}$.
Or $\langle u, v \rangle = 0$. Le triangle est donc rectangle en O .
- c) Par la relation de Chasles puis le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} AB^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\|^2 \\ &= \|AO\|^2 + \|OB\|^2 \\ &= 2 \times 9 = 18 \end{aligned}$$

D'où

$$AB = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

Rem : On pourrait bien entendu chercher cette longueur à l'aide de la norme de $\overrightarrow{AB}$.

2. a) Pour des raisons pratiques de rédaction, on note ici C au lieu de C_α .
D'après les propriétés des barycentres, on sait que

$$\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}.$$

On note $w_1 = \alpha \overrightarrow{OA}$ et $w_2 = (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{OC}\|^2 &= \|w_1\|^2 + \|w_2\|^2 + 2 \underbrace{\langle w_1, w_2 \rangle}_{=0} \\ &= \alpha^2 \|u\|^2 + (1 - \alpha)^2 \|v\|^2 \\ &= 9(\alpha^2 + (1 - \alpha)^2) \\ &= 9(\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 1) \\ &= 9(2\alpha^2 - 2\alpha + 1) \end{aligned}$$

i.e.

$$OC = 3\sqrt{2\alpha^2 - 2\alpha + 1}$$

- b) On peut prendre $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ pour retomber sur A et B .

- c) Il suffit de prendre $\alpha = \frac{1}{2}$. On obtient :

$$OI = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

3. a) Si D est un point de la droite (AB) , alors c'est un barycentre du type précédent. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $D = C_\alpha$, c'est-à-dire que

$$\overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}.$$

Ainsi,

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \rangle = \langle \overrightarrow{OA}, \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB} \rangle = \alpha \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA} \rangle + (1 - \alpha) \underbrace{\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle}_{=0}$$

et donc

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \rangle = \alpha \|\overrightarrow{OA}\|^2 = 9\alpha$$

Ainsi,

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \rangle = k \quad \Leftrightarrow \quad k = 9\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{k}{9}$$

ce qui donne comme solution du système les points D tels que

$$D = \text{bar}\left(\left(A, \frac{k}{9}\right), \left(B, 1 - \frac{k}{9}\right)\right).$$

En réinjectant dans la forme de D donnée au départ, les solutions sont :

$$\overrightarrow{OD} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB} = \frac{k}{9} \overrightarrow{OA} + \left(1 - \frac{k}{9}\right) \overrightarrow{OB}.$$

ou encore

$$D = \left(1 + \frac{k}{9}, 2 - 4\frac{k}{9}, 2 - \frac{k}{9}\right)$$

- b) En posant $D = (x, y, z)$, on aurait pu établir un système d'équations pour trouver x, y, z .

Première équation : Sachant que $D = (x, y, z)$, on a

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD} \rangle = k \Leftrightarrow 2x - 2y - z = k.$$

Autre équations :

Le point D appartient à la droite (AB) , on cherche un système de deux équation décrivant la droite (AB) :

$$D \in (AB) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \mid D = A + t\overrightarrow{AB}$$

$$D = A + t\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2+2 \\ 2-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-t \\ -2+4t \\ 1+t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = -2+4t \\ z = 1+t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-t \\ y = -2+4t \\ t = z-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-(z-1) \\ y = -2+4(z-1) \\ t = z-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-z \\ y = -6+4z \\ t = z-1 \end{cases}$$

Ayant z , on peut retrouver t , ainsi,

$$D \in (AB) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3-z \\ y = -6+4z \end{cases}$$

Un système d'équations pour la droite (AB) est donc

$$(AB) : \begin{cases} x + z - 3 = 0 \\ y - 4z + 6 = 0 \end{cases}$$

Voici donc un système de 3 équations permettant d'obtenir D :

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = k \\ x + z - 3 = 0 \\ y - 4z + 6 = 0 \end{cases}$$

qui une fois résolu donne

$$x = 1 + \frac{k}{9}, \quad y = 2 - \frac{4k}{9}, \quad z = 2 - \frac{k}{9}$$

Exercice 2

On note $u = (x, y, z)$ et $v = (1, -1, 2)$. Alors

$$\begin{aligned} (x - y + 2z)^2 &= \langle u, v \rangle^2 \\ &\leq \|u\|^2 \|v\|^2 = \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\leq 1 \text{ (énoncé)}} 6 \quad \text{par le théorème de Cauchy-Schwarz} \\ &\leq 6 \end{aligned}$$

Exercice 3

- On pose P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$.

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on sait d'après le cours que

$$G = {}^tP \cdot P = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

- On trouve

$$\langle u, v \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

ou alors on dit que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, puis

$$\langle u, v \rangle = \langle v_1, v_2 + v_3 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, v_3 \rangle$$

et on lit dans la matrice de Gram que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 1, \quad \langle v_1, v_3 \rangle = 4$$

et donc

$$\boxed{\langle u, v \rangle = 5}$$

Exercice 4

1. Soit on calcule 2 par 2 les produits scalaires, soit on calcule sa matrice de Gram en gardant à l'esprit qu'elle est symétrique

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Elle est orthogonale, c'est donc une famille libre et de cardinal 3 dans $\mathbb{R}^3$ et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

2. D'après le cours, on sait que, comme la base $\mathcal{B}$ est orthogonale :

$$V = \langle V, v_1 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|^2} + \langle V, v_2 \rangle \frac{v_2}{\|v_2\|^2} + \langle V, v_3 \rangle \frac{v_3}{\|v_3\|^2}$$

Or,

$$\begin{cases} \langle V, u_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \\ \langle V, u_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \\ \langle V, u_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \end{cases}$$

et de plus,

$$\|v_1\|^2 = 2, \quad \|v_2\|^2 = 6, \quad \|v_3\|^2 = 12$$

D'où

$$V = 1 \cdot \frac{v_1}{2} + 1 \cdot \frac{v_2}{6} + 4 \cdot \frac{v_3}{12}$$

et donc, de même que plus haut :

$$V = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{6}v_2 + \frac{1}{3}v_3$$

3. a) Grâce à la formule de projection du cours, on sait que

$$p_F(V) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{6}v_2$$

- b) On a

$$p_G(V) = \frac{1}{3}v_3$$

4. a) On a

$$d(M, F) = \|M - p_F(M)\| = \left\| \frac{1}{3}v_3 \right\| = \frac{1}{3}\sqrt{12}$$

D'où

$$d(M, F) = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

- b) On a

$$\begin{aligned} d(V, G)^2 &= \|V - p_G(V)\|^2 = \left\| \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{6}v_2 \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\|v_1\|^2 + \frac{1}{36}\|v_2\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{36} \times 6 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

D'où

$$d(V, G) = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Exercice 5

1. a) $G = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

- b) v_2 et v_3 correspondent respectivement aux deuxième et troisième vecteur de la base $\mathcal{B}$. On voit donc directement sur la matrice de Gram que $\langle v_2, v_3 \rangle = 6 \neq 0$

- c) Notons (v_1, v_2, v_3, v_4) la base considérée. On observe sur la matrice de Gram que $\langle v_4, v_1 \rangle = 0$

2. On note $U_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ les coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$. On sait alors que

$$\langle u, v \rangle = {}^tU_{\mathcal{B}}GV_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 10 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

3. a) On pourrait utiliser la formule de cours ci-dessous :

$$p(N) = \langle N, u \rangle \frac{u}{\|u\|^2} + \langle N, v \rangle \frac{v}{\|v\|^2}$$

mais le résultat ici est en réalité trivial car N est donné directement dans la base $\mathcal{B}$ telle que

$$u, v \in F, \quad w_3, w_4 \perp F$$

Ainsi, on a directement

$$p(N) = \alpha u + \beta v = (\alpha, \beta, 0, 0)_{\mathcal{B}_2}$$

b) M n'est cette fois-ci pas donné dans la base adaptée à la décomposition sur F et l'orthogonal à F . On utilise donc la formule de cours dans la base orthonormée $\mathcal{B}_2 = \left(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|}, w_3, w_4 \right)$:

$$p(M) = \langle M, u \rangle \frac{u}{\|u\|^2} + \langle M, v \rangle \frac{v}{\|v\|^2}$$

u, M et v étant données dans la base $\mathcal{B}$ non orthonormée, on utilise la matrice de Gram pour calculer les produits scalaires et les normes :

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = {}^tU_{\mathcal{B}}GU_{\mathcal{B}} = 22 \quad ; \quad \|v\|^2 = {}^tV_{\mathcal{B}}GV_{\mathcal{B}} = 2$$

De plus, dans la base $\mathcal{B}$, pour tout vecteur X , De même,

$$\langle M, u \rangle = (a \quad b \quad c \quad d) GU_{\mathcal{B}}, \quad \langle M, v \rangle = (a \quad b \quad c \quad d) GV_{\mathcal{B}}$$

par calcul, on a

$$GU_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad GV_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$p(M) = \frac{11a + 4b + 3c - d}{22}u + \frac{-a + c - d}{2}v$$

c) La formule de cours est encore et toujours

$$p(Q) = \langle Q, u \rangle \frac{u}{\|u\|^2} + \langle Q, v \rangle \frac{v}{\|v\|^2}$$

Or

$$\|u\|^2 = 22 \quad ; \quad \|v\|^2 = 2$$

De plus, dans la base canonique, pour tous vecteurs X (que l'on voudra être égal ensuite à u et v) on a dans la base canonique

$$\langle Q, X \rangle = {}^tQX$$

ou alors dans la base $\mathcal{B}$:

$$\langle Q, X \rangle = {}^tM_{\mathcal{B}}(Q)GM_{\mathcal{B}}(X)$$

Or, Q est donné dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ et u et v sont donnés dans $\mathcal{B}$.

Il faut donc choisir si on veut calculer $M_{\mathcal{B}_0}(u)$ et $M_{\mathcal{B}_0}(v)$ ou alors $M_{\mathcal{B}}(Q)$. Dans les deux cas, les formules de passage sont

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(u), \quad M_{\mathcal{B}_0}(v) = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})M_{\mathcal{B}}(v) \quad (1)$$

ou

$$M_{\mathcal{B}}(Q) = P_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0)M_{\mathcal{B}_0}(Q) \quad (2)$$

Or, la matrice de passage connue est

$$P = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sachant alors que la matrice P n'est pas une matrice de base orthonormée, elle n'est pas immédiatement inversible. Il faut faire une série de calculs pour obtenir $M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$. De plus, dans la formule de produit scalaire de la base $\mathcal{B}$, il faut tenir compte du fait qu'il faut également multiplier par G . Il semble donc plus pertinent d'utiliser les formules (1).

D'où

$$M_{\mathcal{B}_0}(u) = P \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et

$$M_{\mathcal{B}_0}(v) = P \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p(Q) = \frac{x - y - 2z + 4t}{22}u - \frac{x + y}{2}v$$

Exercice 6

1. La matrice est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.
2. a) On observe que

$$M - 3Id = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs colonnes étant tous colinéaires, on a

$$\text{rg}(M - 3Id) = 1 < 3$$

Ainsi, 3 est bien valeur propre de M . De plus, par théorème du rang,

$$\dim E_3 = \dim(\ker(M - 3Id)) = 3 - 1 = 2$$

- b) N'importe quel élément non nul de $\ker(M - 3Id)$ est un vecteur propre par définition. Or on observe que sur la matrice $M - 3Id$, $C_1 = C_2$ (d'où $C_1 - C_2 = 0$) et $C_1 + C_2 + C_3 = 0$. Autrement dit,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3$$

3. a) Nous avons déjà vu cette année qu'une matrice diagonalisable ne peut pas avoir qu'une seule valeur propre. Réexpliquons pourquoi. Supposons donc (par l'absurde) qu'il n'existe qu'une seule vap. Ici $\lambda = 3$. Alors, comme M est diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$M = PDP^{-1}$$

avec D une matrice diagonale dont la diagonale est composée uniquement des valeurs propres de M . Autrement dit,

$$D = 3Id.$$

D'où

$$M = P3IdP^{-1} = 3PP^{-1} = 3Id$$

et donc

$$M = 3Id$$

Clairement, M n'est pas la matrice $3Id$. On aboutit donc à une contradiction. Ainsi, il existe bien une autre valeur propre.

- b) On sait que si la matrice est symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Autrement dit, le troisième vecteur propre sera orthogonal aux deux autres. On pose $v_3 = (x, y, z)$ et cherche donc à résoudre le système issu de

$$v_2 \perp v_1 \quad ; \quad v_3 \perp v_2.$$

On trouve par exemple

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En réinjectant dans la matrice M avec Mv_3 , on trouve

$$Mv_3 = -3v_3$$

Ainsi,

$$Sp(M) \subset \{-3, 3\}$$

- c) Oui car la somme des dimensions des espaces propres est (supérieure ou) égale à 3.

Exercice 7

1. Commençons par déterminer les éléments de F .

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = y \\ x + (x + z) - z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + z \\ t = -2x \end{cases}$$

Après résolution, on peut trouver par exemple

$$F = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \right)$$

Pour trouver une base orthogonale, il nous faut deux vecteurs orthogonaux, or ceux-ci ne le sont pas. On cherche donc par exemple un troisième vecteur v_2 dans F tel que $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. En notant $v_2 = (x, y, z, t)$, on cherche donc à résoudre

$$\begin{cases} v_2 \in F \\ \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \end{cases} = \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - z = -2z \\ t = -(-2z - z - z) \\ y = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ t = 4z \\ y = -z \end{cases}$$

On trouve comme solution l'espace vectoriel engendré par le vecteur $v_2 = (-2, -1, 1, 4)$. Ainsi, une base orthogonale de F est

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

et bien d'autres encore ...

2. On sait que comme (v_1, v_2) est une base orthogonale de F , alors, pour tout point $M \in \mathbb{R}^n$, on a

$$p(M) = \frac{\langle M, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle M, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

D'où

$$p(M) = \frac{\langle M, v_1 \rangle}{2} v_1 + \frac{\langle M, v_2 \rangle}{22} v_2$$

ou en version "simplifiée" (du moins c'est une question de point de vue... !)

$$p(M) = \frac{1}{22} (11 \langle M, v_1 \rangle v_1 + \langle M, v_2 \rangle v_2)$$

On peut préciser éventuellement encore un peu cette formule en écrivant $M = (x, y, z, t)$. Alors

$$p(M) = \frac{1}{22} (11(y + z)v_1 + (-2x - y + z + 4t)v_2)$$

3. Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

• Méthode 1 :

Il suffit de déterminer les $p(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}_0$.

Dans la question précédente, on a déterminé les $p(M)$ pour M quelconque. Utilisons alors ces résultats successivement pour

$$M = e_1 = (1, 0, 0, 0), \quad M = e_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \dots$$

On obtient donc, après avoir utilisé la formule de la question précédente :

$$\begin{cases} 22p(e_1) = -2v_2 \\ 22p(e_2) = 11v_1 - v_2 \\ 22p(e_3) = 11v_1 + v_2 \\ 22p(e_4) = 4v_2 \end{cases}$$

Puis en remplaçant ensuite v_1 par $(0, 1, 1, 0)$ et v_2 par $(-2, -1, 1, 4)$, on trouve :

$$M(p) = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -8 \\ 2 & 12 & 10 & -4 \\ -2 & 10 & 12 & 4 \\ -8 & -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Cette matrice doit être la même quelquesoit la famille (v_1, v_2) que vous avez obtenue au départ. En effet, c'est la matrice dans la base canonique. Elle n'a plus rien à voir avec (v_1, v_2) .

• Méthode 2 :

par formule générale dans la base $\mathcal{B}_0$.

Dans la question précédente, on a déterminé les $p(M)$ pour M quelconque. Remplaçons directement v_1 par $(0, 1, 1, 0)$ et v_2 par $(-2, -1, 1, 4)$:

$$\begin{aligned} p(M) &= \frac{1}{22} \left(11(y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-2x-y+z+4t) \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} -2(-2x-y+z+4t) \\ 11(y+z) - (-2x-y+z+4t) \\ 11(y+z) + (-2x-y+z+4t) \\ 4(-2x-y+z+4t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 4x+2y-2z-4t \\ 2x+12y+10z-4t \\ -2x+10y+12z+4t \\ -8x-4y+4z+16t \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -8 \\ 2 & 12 & 10 & -4 \\ -2 & 10 & 12 & 4 \\ -8 & -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où la matrice

$$M(p) = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -8 \\ 2 & 12 & 10 & -4 \\ -2 & 10 & 12 & 4 \\ -8 & -4 & 4 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 6 & 5 & -2 \\ -1 & 5 & 6 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

4. On sait que

$$d(e_1, F) = \|e_1 - p(e_1)\|$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d(e_1, F) &= \|e_1 - p(e_1)\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{11} \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{11} \left\| \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{99}}{11} = \frac{\sqrt{11 \times 9}}{11} \end{aligned}$$

D'où

$$d(e_1, F) = \frac{3}{\sqrt{11}} \simeq 0.90$$

Exercice 8

- A est symétrique :

$$A = A^t Id = A^t A A^t A = {}^t A A$$

donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

- On a alors $A^3 = Id$, donc la seule vap possible est 1. Mais comme elle est diagonalisable, c'est l'identité.

Exercice 9

2. a) Clairement, $Im(f) \subset (u, v)$ d'où $rg(f) \leq 2$.
b) On a $rg(f) \leq 2 < n$, donc 0 est vap, avec $\dim E_0 \geq n - 2$
3. a) En complétant la base (u, v) en une base $(u, v, v_3, \dots, v_n)$ avec $(v_1, \dots, v_n)$ une base de $Vect(u, v)^\perp$, la matrice de f est :

$$\begin{pmatrix} \langle v, u \rangle & \|v\|^2 & 0 & \dots \\ \|u\|^2 & \langle u, v \rangle & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

b) La recherche de vap donne

$$Sp(f) = \{0, < u, v > \pm \|u\| \cdot \|v\|\}$$

Exercice 10

1. $< u + v, u - v > = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 1 - 1 = 0$
2. • Soient u, v unitaires. Alors, d'après la question 1,

$$< u + v, u - v > = 0$$

En appliquant f , par la propriété de l'énoncé, on a

$$< f(u + v), f(u - v) > = < u + v, u - v > = 0$$

Or,

$$< f(u + v), f(u - v) > = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2$$

D'où

$$0 = \|f(u)\|^2 - \|f(v)\|^2$$

et donc

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$

- Soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ quelconques. Alors $\tilde{u} = \frac{u}{\|u\|}$ et $\tilde{v} = \frac{v}{\|v\|}$ sont unitaires. En appliquant le résultat sur $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$, on obtient

$$\|f(\tilde{u})\| = \|f(\tilde{v})\|$$

ce qui donne, comme f est linéaire,

$$\frac{\|f(u)\|}{\|u\|} = \frac{\|f(v)\|}{\|v\|}$$

et comme $\|u\| = \|v\|$, on en déduit

$$\|f(u)\| = \|f(v)\|$$

3. $\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|$ est constante : Soit u unitaire fixé, alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \underbrace{\|f(u)\|}_k$$

Exercice 11

- Montrons que la famille est orthogonale :

On prend $x = v_1$ dans l'égalité. On obtient

$$\|v_1\|^2 = \sum_{k=1}^n < v_1, v_i >^2 = \|v_1\|^1 + \sum_{k=2}^n < v_1, v_i >^2$$

Par simplification, on trouve

$$\sum_{k=2}^n \underbrace{< v_1, v_i >^2}_{\geq 0} = 0$$

Or, une somme de nombre positifs ne peut être égale à 0 que si chaque terme est nul. Donc

$$< v_1, v_i > = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$$

pour $x = v_2, \dots, v_n$. La famille est donc orthogonale.

- Montrons que c'est une base :

La famille est orthogonale, donc libre. Elle est de cardinal n , c'est une base.