
I	Rayon de convergence	3
I.1	Convergence simple d'une série entière	3
I.2	Opérations sur les séries entières : série dérivée, somme et produit de Cauchy	8
II	Régularité de la somme d'une série entière	11
II.1	Continuité de la somme d'une série entière	11
II.2	Dérivation de la somme d'une série entière	12
II.3	Primitivation de la somme d'une série entière	14
III	Développements en série entière	15
III.1	Généralités	15
III.2	Développements en séries entières de référence	17
	Fonction exponentielle	18
	Fonctions cosinus et sinus, fonctions hyperboliques	18
	À partir du développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$	20
	Fonction puissance $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$	22

Extrait du programme

C - Séries entières

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Rayon de convergence

Série entière de la variable réelle, de la variable complexe.

Lemme d'Abel :

si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Rayon de convergence R défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$ de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

Intervalle ouvert de convergence.

Disque ouvert de convergence.

Avec R_a (resp. R_b) le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, (resp. $\sum b_n z^n$) :

- si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
- si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $R(\sum n^\alpha x^n) = 1$.

Le résultat s'applique en particulier lorsque $a_n = o(b_n)$.

La limite du rapport $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être directement utilisée.

b) Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

Convergence normale d'une série entière d'une variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

Continuité de la somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Primitivation d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence.

Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière d'une variable réelle sur l'intervalle ouvert de convergence et obtention des dérivées par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif au moyen des dérivées successives en 0 de sa somme.

L'étude des propriétés de la somme au bord de l'intervalle ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

Relation $R(\sum a_n x^n) = R(\sum n a_n x^n)$.

c) Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

Fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$.

Série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Unicité du développement en série entière.

Développements des fonctions usuelles.

Formule de Taylor avec reste intégral.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions : exponentielle, cosinus, sinus, cosinus et sinus hyperboliques, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

d) Séries géométrique et exponentielle d'une variable complexe

Continuité de la somme d'une série entière de la variable complexe sur le disque ouvert de convergence.

Développement de $\frac{1}{1-z}$ sur le disque unité ouvert.

Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$.

La démonstration est hors programme.

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

I. Rayon de convergence

I.1. Convergence simple d'une série entière



Définition 17.1 – Séries entières

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On appelle **série entière** et on note $\sum a_n \times z^n$ la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto a_n \times z^n$.

Remarque 17.1

Lorsqu'on considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la variable réelle, la série entière est plutôt notée $\sum a_n \times x^n$.

Lemme 17.1 – Lemme d'Abel

Soient $\sum a_n \times z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ telle que la suite $(a_n \times z_0^n)$ est bornée. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n \times z^n$ converge absolument.

Démonstration

- Si $z_0 = 0$, alors c'est terminé.
- Supposons $z_0 \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n \times z^n| = |a_n \times z_0^n| \times \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$.

Or, la suite $(a_n \times z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc $|a_n \times z^n| = O\left(\left| \frac{z}{z_0} \right|^n\right)$.

De plus, $0 \leq \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$, donc la série géométrique $\sum \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ converge.

Par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum |a_n \times z^n|$ converge. Autrement dit, $\sum a_n \times z^n$ converge absolument. $\square$

Remarque 17.2 – Rappel

On sait que toute partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure notée $\sup A$. On adopte la convention suivante : si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ non majorée, alors on note $\sup A = +\infty$.



Exercice 17.1

Soient $A \subset B$ deux parties de $\mathbb{R}$ non vides. Montrer que $\sup A \leq \sup B$.

Résolution

Cas 1 : B n'est pas majoré. Dans ce cas, $\sup B = +\infty$. On a alors clairement $\sup A \leq \sup B$.

Cas 2 : B est majoré. Dans ce cas, $\sup B \in \mathbb{R}$ et est un majorant de B .

Soit $a \in A$. Comme $A \subset B$, on a $a \in B$. Donc, $a \leq \sup B$.

Donc, $\sup B$ est un majorant de A .

Par définition, $\sup A$ est le plus petit majorant de A , donc, $\sup A \leq \sup B$.

L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (0 appartient à cet ensemble). Avec la remarque précédente, on peut donner la définition suivante.



Définition 17.2 – Rayon de convergence

Le **rayon de convergence**, noté R , de la série entière $\sum a_n \times z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n \times r^n)$ est bornée :

$$R = \sup \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}.$$

Le rayon de convergence R appartient à $[0, +\infty]$, où $[0, +\infty]$ désigne $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \times z^n$ est parfois noté $R(\sum a_n \times z^n)$.

Exemple 17.1

La série $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1 (dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 1$). En effet, on sait que la suite (r^n) est bornée si, et seulement si, $r \in [0, 1]$.

Donc, $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (r^n) \text{ est bornée}\} = [0, 1]$, puis $R = \sup[0, 1] = 1$.



Exercice 17.2

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha \times z^n$.

Résolution

Soit $r \in [0, 1]$. Par croissances comparées, $n^\alpha \times r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc, la suite $(n^\alpha \times r^n)$ est bornée.

Soit $r > 1$. Par croissances comparées, $n^\alpha \times r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc, la suite $(n^\alpha \times r^n)$ n'est pas bornée.

Donc,

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (n^\alpha \times r^n) \text{ est bornée}\} = [0, 1] \quad \text{ou} \quad \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (n^\alpha \times r^n) \text{ est bornée}\} = [0, 1].$$

Dans les deux cas,

le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha \times z^n$ est 1.



Théorème 17.1

Soit $\sum a_n \times z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Soit $z \in \mathbb{C}$.

► Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum a_n \times z^n$ converge absolument. En particulier, la suite $(a_n \times z^n)$ converge vers 0, et est bornée.

► Si $|z| > R$, alors la suite $(a_n \times z^n)$ n'est pas bornée et la série numérique $\sum a_n \times z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration

► On suppose que $|z| < R$. Par définition de la borne supérieure, $|z|$ n'est pas un majorant de $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$. Donc, il existe $r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$ tel que $r_0 > |z|$, autrement dit, la suite $(a_n \times r_0^n)$ est bornée. Par le lemme d'Abel, la série $\sum a_n \times z^n$ converge absolument.

► On suppose que $|z| > R$.

Par l'absurde, supposons la suite $(a_n \times z^n)$ bornée. On en déduit que la suite $(a_n \times |z|^n)$ est bornée.

On a alors $|z| \in \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$ et, par définition de borne supérieure, $|z| \leq R$. Contradiction.

Donc, la suite $(a_n \times z^n)$ n'est pas bornée.

On en déduit que la suite $(a_n \times z^n)$ ne peut pas converger vers 0. Donc, la série $\sum a_n \times z^n$ diverge grossièrement.

□

Remarque 17.3 – IMPORTANT!!!

On a les implications :

$$\begin{aligned} |z| < R &\implies \sum a_n \times z^n \text{ converge absolument} \\ |z| > R &\implies \sum a_n \times z^n \text{ diverge} \\ \sum a_n \times z^n \text{ converge} &\implies |z| \leq R \\ \sum a_n \times z^n \text{ diverge} &\implies |z| \geq R. \end{aligned}$$

En particulier : R est « le moment » où la série $\sum a_n z^n$ change de nature.

$$R = \sup \left\{ |z| \mid \text{la série numérique } \sum a_n \times z^n \text{ converge (absolument)} \right\}.$$



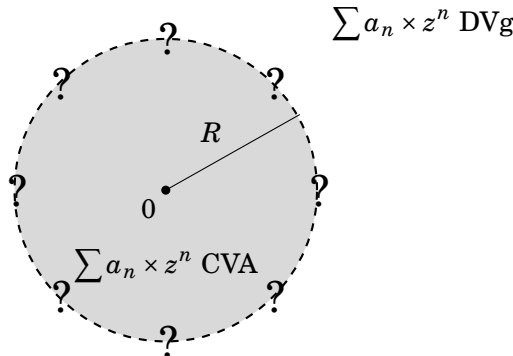
Définition 17.3 – Disque ouvert de convergence, Intervalle ouvert de convergence

Soit $\sum a_n \times z^n$ une série entière.

L'ensemble $D_o(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé **disque ouvert de convergence** de la série entière. Lorsque $R = +\infty$, on a $D_o(0, R) = \mathbb{C}$.

L'ensemble $] -R, R[$ est appelé **intervalle ouvert de convergence** de la série entière. Lorsque $R = +\infty$, on a $] -R, R[= \mathbb{R}$.

Remarque 17.4 – Visualisation



Remarque 17.5 – ♥ ♥ ♥ Utilisation du critère de d'Alembert pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière

Soit $\sum a_n \times z^n$ une série entière. **On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$.**

Pour déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \times z^n$, on fixe $z \neq 0$, puis on étudie la limite du

quotient $\frac{|a_{n+1} \times z^{n+1}|}{|a_n \times z^n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \times |z|$.

► **Cas 1 :** On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc $\frac{|a_{n+1} \times z^{n+1}|}{|a_n \times z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \times |z|$.

D'après le critère de d'Alembert :

- si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors $\ell \times |z| < 1$ et la série numérique $\sum a_n \times z^n$ converge absolument.
- si $|z| > \frac{1}{\ell}$, alors $\ell \times |z| > 1$ et la série numérique $\sum a_n \times z^n$ diverge (grossièrement).

Donc,

$$R = \frac{1}{\ell}.$$

► **Cas 2 :** On suppose que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\frac{|a_{n+1} \times z^{n+1}|}{|a_n \times z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum a_n \times z^n$ converge absolument. Ceci est vrai pour tout $|z| > 0$.
Donc,

$$R = +\infty.$$

► **Cas 3 :** On suppose que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc $\frac{|a_{n+1} \times z^{n+1}|}{|a_n \times z^n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'après le critère de d'Alembert, la série numérique $\sum a_n \times z^n$ diverge.
Ceci est vrai pour tout $|z| > 0$, donc,

$$R = 0.$$

 Méthode 17.1 – ATTENTION!!! La puissance de z doit être n pour appliquer cette méthode

Soit $\sum a_n \times z^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ a_{n+1} }{ a_n }$	Rayon de convergence
0	$+\infty$
$\ell \in]0, +\infty[$	$\frac{1}{\ell}$
$+\infty$	0

Cette méthode fonctionne encore lorsque la puissance de z est $n+1$, $n-1$, ...

 Exemple 17.2

1. On considère la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{1}{n!} \neq 0$, et, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, par le critère de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$.

2. On considère la série entière $\sum z^n$.

Pour tout $n \geq 1$, $a_n = 1 \neq 0$, et $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc, par le critère de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est $R = 1$.

3. On considère la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$.

Pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n} \neq 0$, et $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc, par le critère de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ est $R = 1$.

4. On considère la série entière $\sum n! \times z^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = n! \neq 0$, et, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = (n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, par le critère de D'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum n! \times z^n$ est $R = 0$.

Remarque 17.6 – Sur le bord du disque/intervalle de convergence ? On ne peut rien dire !

Soit $\sum a_n \times z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

Si $|z| = R$, alors on ne peut pas conclure quant à la convergence (absolue) de la série numérique $\sum a_n \times z^n$.

1. Considérons la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ dont le rayon de convergence est $R = 1$.

Pour $z = 1$, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique).

Pour $z = -1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (critère spécial des séries alternées ; pour le calcul de la somme de la série, voir le chapitre SÉRIES NUMÉRIQUES).

2. Considérons la série entière $\sum z^n$ dont le rayon de convergence est $R = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|z|^n = 1$. D'où la suite $(|z|^n)$ ne tend pas vers 0, donc $\sum z^n$ diverge grossièrement.

3. Considérons la série entière $\sum \frac{z^n}{n^2}$. Pour tout $n \geq 1$, on a $a_n = \frac{1}{n^2} \neq 0$, et $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Donc, par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est $R = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| \frac{z^2}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$ (terme général d'une série de Riemann convergente car $2 > 1$). D'où, la série numérique $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument.

Méthode 17.2 – Cas des séries entières lacunaires

Soit $\sum a_n \times z^n$ une série entière. **On suppose qu'une infinité de a_n sont nuls.**

On dit que la série entière $\sum a_n \times z^n$ est **lacunaire**.

Pour déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \times z^n$, on fixe $z \in \mathbb{K}^*$ (quand $z = 0$, la série numérique $\sum a_n \times z^n$ converge clairement), puis on applique le critère de D'Alembert en conservant z dans le quotient.

Exemple 17.3 – Attention à la puissance de z !!!

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} 2^n \times \ln(n) \times z^{2n}$.

Il faut bien noter que dans ce cas, il s'agit bien d'une série entière lacunaire : on étudie la série entière $\sum a_n \times z^n$ où la suite (a_n) est définie par $a_0 = 0$, $a_{2n} = 2^n \times \ln(n)$ pour $n \geq 1$ et $a_{2n+1} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit $z \neq 0$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{|2^{n+1} \times \ln(n+1) \times z^{2(n+1)}|}{|2^n \times \ln(n) \times z^{2n}|} = 2 \times \left(1 + \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\ln(n)} \right) \times |z|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 |z|^2.$$

Par le critère de d'Alembert,

- si $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors la série numérique $\sum_{n \geq 1} 2^n \times \ln(n) \times z^{2n}$ converge absolument.
- si $|z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors la série numérique $\sum_{n \geq 1} 2^n \times \ln(n) \times z^{2n}$ diverge.

Ainsi, le rayon de convergence de la série $\sum 2^n \times \ln(n) \times z^{2n}$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Théorème 17.2 – Théorème de comparaison pour les séries de fonctions

Soient $\sum a_n \times z^n$ et $\sum b_n \times z^n$ deux séries entières. On note R_a le rayon de convergence de la série $\sum a_n \times z^n$ et R_b le rayon de convergence de la série $\sum b_n \times z^n$.

1. Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
2. Si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
3. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration

1. On suppose que $a_n = O(b_n)$.

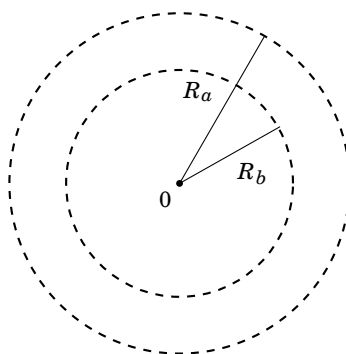
Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ et $M > 0$ tels que, pour tout $n \geq N$, $|a_n| \leq M \times |b_n|$.

D'où, pour tout $r \geq 0$, pour tout $n \geq N$, $|a_n| \times r^n \leq M \times |b_n| \times r^n$.

On en déduit que $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (b_n \times r^n) \text{ est bornée}\} \subset \{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$.

Donc, tout majorant de $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$ est un majorant de $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (b_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$.

Donc, par définition de la borne supérieure, $R_a \geq R_b$.



2. Si $a_n = o(b_n)$, alors $a_n = O(b_n)$.
3. On suppose que $a_n \sim b_n$. Donc, $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$. D'où, par le premier point, $R_a \geq R_b$ et $R_a \leq R_b$. Donc, $R_a = R_b$. □

I.2. Opérations sur les séries entières : série dérivée, somme et produit de Cauchy

Théorème 17.3 – Série dérivée

Les séries entières $\sum a_n \times z^n$ et $\sum n \times a_n \times z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \times z^n$ et R' le rayon de convergence de la série entière $\sum n \times a_n \times z^n$.

► Soit $r \geq 0$. On a : $a_n \times r^n = O(n \times a_n \times r^n)$.

Donc, par le théorème 17.2 page 8, $R' \leq R$.

► Soit $r \in]0, R[$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\gamma \in]r, R[$. On a : $n \times a_n \times r^n = a_n \times \gamma^n \times n \times \left(\frac{r}{\gamma}\right)^n$.

Or, $\left|\frac{r}{\gamma}\right| < 1$, donc par croissances comparées, $n \times \left(\frac{r}{\gamma}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc la suite $\left(n \times \left(\frac{r}{\gamma}\right)^n\right)$ est bornée.

De plus, $\gamma < R$, donc la suite $(a_n \times \gamma^n)$ est bornée.

On en déduit que la suite $(n \times a_n \times r^n)$ est bornée.

Donc, $]0, R[\subset \{r \geq 0 \mid \text{la suite } (n \times a_n \times r^n) \text{ est bornée}\}$.

Donc, par définition du sup, $R \leq R'$.

Ainsi, $R = R'$. □

Théorème 17.4 – Somme

Soient $\sum a_n \times z^n$ et $\sum b_n \times z^n$ deux séries entières. On note R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n \times z^n$ et R_b le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n \times z^n$.

Le rayon de convergence R de la série $\sum (a_n + b_n) \times z^n$ vérifie l'inégalité $R \geq \min(R_a, R_b)$.

De plus, lorsque $R_a \neq R_b$, on a $R = \min(R_a, R_b)$.

Démonstration

► Soit $r \in]0, \min(R_a, R_b)[$. Les séries $\sum a_n \times r^n$ et $\sum b_n \times r^n$ convergent.

On en déduit que la série $\sum (a_n + b_n) \times r^n$ converge.

Ceci est vrai pour tout $r \in]0, \min(R_a, R_b)[$, donc $R \geq \min(R_a, R_b)$.

► On suppose que $R_a < R_b$ (le cas $R_a > R_b$ est similaire). Soit $r \in]R_a, R_b[$.

On en déduit que la série $\sum a_n \times r^n$ diverge grossièrement et que la série $\sum b_n \times r^n$ converge (absolument).

On en déduit que la série $\sum (a_n + b_n) \times r^n$ diverge grossièrement.

Ceci est vrai pour tout $r \in]R_a, R_b[$, donc $R \leq R_a$.

Par le premier point $R \geq \min(R_a, R_b)$. Or, ici $\min(R_a, R_b) = R_a$, donc $R = \min(R_a, R_b)$. □

Exemple 17.4

En utilisant le critère de d'Alembert, on montre que la série entière $\sum 2^n \times z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{2}$ et la série entière $\sum 3^n \times z^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.

On en déduit que la série entière $\sum (2^n + 3^n) \times z^n$ a pour rayon de convergence $\min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Définition 17.4 – Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n \times z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n \times z^n$ deux séries entières.

Le **produit de Cauchy** des deux séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n \times z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n \times z^n$ est la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n \times z^n$ avec :

$$\forall n \geq 0, \quad c_n = \sum_{p+q=n} a_p \times b_q = \sum_{k=0}^n a_k \times b_{n-k} = \sum_{k=0}^n a_{n-k} \times b_k.$$

Théorème 17.5 – Produit de Cauchy

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n \times z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n \times z^n$ deux séries entières. On note R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n \times z^n$ et R_b le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} b_n \times z^n$.

► Le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} c_n \times z^n$ vérifie l'inégalité $R \geq \min(R_a, R_b)$.

► De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \times z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \times z^n \right).$$

Démonstration

► Soit $r \in]0, \min(R_a, R_b)[$.

D'où, les séries numériques $\sum a_n \times r^n$ et $\sum b_n \times r^n$ convergent absolument.

Par théorème (produit de Cauchy de séries numériques), la série numérique $\sum \left(\sum_{k=0}^n (a_k \times r^k \times b_{n-k} \times r^{n-k}) \right)$ converge absolument.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (a_k \times r^k \times b_{n-k} \times r^{n-k}) = \sum_{k=0}^n (a_k \times b_{n-k} \times r^n) = \left(\sum_{k=0}^n (a_k \times b_{n-k}) \right) \times r^n = c_n \times r^n$.

Donc, la série $\sum c_n \times r^n$ converge absolument.

Ceci est vrai pour tout $r \in]0, \min(R_a, R_b)[$, donc, $R \geq \min(R_a, R_b)$.

► Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \in]0, \min(R_a, R_b)[$.

D'où, les séries numériques $\sum a_n \times z^n$ et $\sum b_n \times z^n$ convergent absolument.

Par théorème (produit de Cauchy de séries numériques), la série numérique $\sum c_n \times z^n$ converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \times z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \times z^n \right).$$

□

💡 Exemple 17.5

À l'aide du critère de d'Alembert on montre que les séries $\sum \frac{1}{n!} \times z^n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n!} \times z^n$ ont pour rayon de convergence $+\infty$.

On en déduit que le rayon de convergence du produit de Cauchy $\sum c_n \times z^n$ des deux séries entières $\sum \frac{1}{n!} \times z^n$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n!} \times z^n$ est $+\infty$.

De plus, en notant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n!}$ et $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, on a :

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! \times (n-k)!} = \frac{1}{n!} \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (-1)^k = \frac{1}{n!} \times (1-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \times z^n \right) = 1.$$

II. Régularité de la somme d'une série entière

Théorème 17.6

Soit $\sum a_n \times x^n$ une série entière (de la variable réelle) de rayon de convergence $R > 0$.

La série entière $\sum a_n \times x^n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$.

Démonstration

Soit $[a, b] \subset] -R, R[$. On considère $0 \leq r < R$ tel que $[a, b] \subset] -r, r[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, b]$, on a $|a_n \times x^n| \leq |a_n| \times r^n$. Ce majorant ne dépend pas x , donc $\sup_{x \in [-r, r]} |a_n \times x^n| \leq |a_n| \times r^n$.

Or, $0 \leq r < R$, donc la série numérique $\sum a_n \times r^n$ converge absolument.

Par théorème de comparaison, la série numérique $\sum \sup_{x \in [a, b]} |a_n \times x^n|$ converge.

Ainsi, la série entière $\sum a_n \times x^n$ converge normalement sur $[a, b]$. □

II.1. Continuité de la somme d'une série entière

Théorème 17.7

Soit $\sum a_n \times x^n$ une série entière (de la variable réelle) de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$ continue sur $] -R, R[$.

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$x \mapsto a_n \times x^n$$

D'après la proposition précédente, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $] -R, R[$. De plus, les fonctions f_n sont continues sur $] -R, R[$ (car polynomiales).

Donc, par théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, la fonction S est continue sur $] -R, R[$. □

Exemple 17.6

La série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

Donc, la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est continue sur $] -1, 1[$.

Théorème 17.8

Soit $\sum a_n \times z^n$ une série entière (de la variable complexe) de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction somme $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times z^n$ continue sur $D_o(0, R)$.

Démonstration

Admis

 Exemple 17.7

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

Donc, la fonction $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{C}$.

II.2. Dérivation de la somme d'une série entière **Théorème 17.9**

Soit $\sum a_n \times x^n$ une série entière (de la variable réelle) de rayon de convergence $R > 0$. On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$ sa fonction somme.

La fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times a_n \times x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times a_{n+1} \times x^n.$$

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $x \mapsto a_n \times x^n$.

On sait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $] -R, R[$, donc celle-ci converge simplement sur $] -R, R[$.

De plus, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$ (car polynomiale)

Or, la série entière $\sum_{n \geq 1} n \times a_n \times x^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum a_n \times x^n$, donc elles ont le même rayon de convergence.

Donc, la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $] -R, R[$.

Ainsi, par le théorème de dérivation terme à terme, la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $x \in] -R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times a_n \times x^{n-1}.$$

□

 Exercice 17.3

Soit $x \in] -1, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n \times x^n$.

Résolution

Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est 1 et, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

D'où, en dérivant terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence de la série entière, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \times x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En multipliant par x ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \times x^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

D'où,

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} n \times x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n \times x^n}_{\text{le terme pour } n=0 \text{ vaut } 0} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Théorème 17.10

Soit $\sum a_n \times x^n$ une série entière (de la variable réelle) de rayon de convergence $R > 0$. On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$ sa fonction somme.

La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $x \in] -R, R[$,

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} (n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times a_n \times x^{n-p}).$$

Démonstration

Par récurrence en appliquant le résultat précédent. □

Exercice 17.4

Soit $x \in] -1, 1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \times x^n$.

Résolution

Le rayon de convergence de la série entière $\sum x^n$ est 1 et, pour tout $x \in] -1, 1[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

D'où, en dérivant terme à terme deux fois sur l'intervalle ouvert de convergence de la série entière, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \times x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n \times (n-1) \times x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

En multipliant par x^2 ,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n \times (n-1) \times x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

D'où,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \times (n-1) \times x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} n \times (n-1) \times x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \times x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n \times (n-1) + n) \times x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x \times (x+1)}{(1-x)^3}$$

Théorème 17.11 – Coefficients d'une série entière

Soit $\sum a_n \times x^n$ une série entière (de la variable réelle) de rayon de convergence $R > 0$. On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$ sa fonction somme.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Démonstration

Par le théorème précédent, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $S^{(p)}(0) = \sum_{n=p}^{+\infty} (n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) \times a_n \times 0^{n-p})$. Pour $n = p$, on a $0^{n-p} = 0^0 = 1$

et, pour $n > p$, $0^{n-p} = 0$.

Donc, $S^{(p)}(0) = p \times (p-1) \times \cdots \times (p-p+1) \times a_p = p! \times a_p$. □

II.3. Primitivation de la somme d'une série entière

Théorème 17.12

Soit $\sum a_n \times x^n$ une série entière (de la variable réelle) de rayon de convergence $R > 0$. On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$ sa fonction somme.

L'unique primitive sur $] -R, R[$ qui s'annule en 0 de la fonction S est la fonction somme de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} \times x^{n+1}$ dont le rayon de convergence est R .

Démonstration

La série entière $\sum a_n \times x^n$ est la série dérivée de $\sum \frac{a_n}{n+1} \times x^{n+1}$, donc elles ont le même rayon de convergence R .

De plus, on sait que S est continue sur $] -R, R[$. D'où, l'unique primitive de S qui s'annule en 0 est la fonction

$$\begin{array}{ccc}] -R, R[& \rightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \int_0^x S(t) dt. \end{array}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{ccc} & & \\ x & \mapsto & a_n \times x^n \end{array}$$

Soit $x \in] -R, R[$. Or, la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur le segment d'extrémités 0 et x et les fonctions f_n sont continues sur le segment d'extrémités 0 et x .

Donc, par le théorème d'intégration terme à terme, on a :

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n \times t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} \times x^{n+1}.$$

□

Remarque 17.7

On montre de la même manière que, pour tout $[a, b] \subset] -R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n \times t^n dt.$$

III. Développements en série entière

III.1. Généralités



Définition 17.5 – Développement en série entière

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

On dit que la fonction f est **développable en série entière** lorsqu'il existe $r > 0$ et $\sum a_n \times x^n$ une série entière tels que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n.$$



Proposition 17.1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction développable en série entière.

Alors,

- les coefficients a_n (voir définition précédente) sont uniques et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- il existe $r > 0$ tel que $] -r, r[\subset I$ et, pour tout $x \in] -r, r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times x^n$.
- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$.

Démonstration

- Montrons l'unicité des coefficients a_n . Supposons qu'il existe $r' > 0$ et (b_n) tel que, pour tout $x \in] -r', r'[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \times x^n$.

Les séries entières $\sum a_n \times x^n$ et $\sum b_n \times x^n$ ont des rayons de convergence strictement positifs (car respectivement supérieurs à r et r'). En notant S_a la fonction somme de la série entière $\sum a_n \times x^n$, S_b la fonction somme de la série entière $\sum b_n \times x^n$ et $r'' = \min(r, r')$, on a, pour tout $x \in] -r'', r''[$, $f(x) = S_a(x) = S_b(x)$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in] -r'', r''[$, $f^{(n)}(x) = S_a^{(n)}(x) = S_b^{(n)}(x)$.

Puis, en utilisant le théorème 17.11, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{S_b^{(n)}(0)}{n!} = b_n$.

- Ce point est une conséquence du premier point et de la définition de fonction développable en série entière.
- On a $f = S_a$ sur $] -r, r[$ et la fonction S_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -r, r[$ (son rayon de convergence est supérieur à r). □



Exercice 17.5

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction développable en série entière : il existe $r > 0$ et $\sum a_n \times x^n$ une série entière tels que :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n.$$

1. On suppose f paire. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k+1} = 0$.
Les coefficients d'indice impair dans le développement en série entière d'une fonction paire sont nuls.
2. On suppose f impaire. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{2k} = 0$.
Les coefficients d'indice pair dans le développement en série entière d'une fonction impaire sont nuls.

Résolution

1. Pour tout $x \in]-r, r[$,

$$f(-x) = f(x) \iff \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n \iff \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times a_n \times x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n.$$

Donc, par unicité des coefficients d'une série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^n \times a_n = a_n$.

Donc, pour tout $n = 2k + 1$ (n impair), on a $a_{2k+1} = 0$.

2. Pour tout $x \in]-r, r[$,

$$-f(-x) = f(x) \iff -\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n \iff \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \times a_n \times x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n.$$

Donc, par unicité des coefficients d'une série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{n+1} \times a_n = a_n$.

Donc, pour tout $n = 2k$ (n impair), on a $a_{2k} = 0$.



Définition 17.6 – Série de Taylor

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \times x^n$ est appelée **série de Taylor** de f (en 0).



Exemple 17.8

Dans le chapitre SÉRIES DE FONCTIONS, on a montré que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Même si la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur $] -1, +\infty[$, l'égalité trouvée n'est pas vraie pour $x > 1$.

III.2. Développements en séries entières de référence

Théorème 17.13 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$.

Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \times (x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note la propriété $\mathcal{H}_n$: « Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $(x, a) \in I^2$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt. »$$

Initialisation. $n = 0$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $(x, a) \in I^2$, on a :

$$\sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} \times f^{(0+1)}(t) dt = f(a) + \int_a^x 1 \times f'(t) dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x).$$

Donc $\mathcal{H}_0$.

Hérédité. soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ et on montre $\mathcal{H}_{n+1}$.

Soient $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$ et $(x, a) \in I^2$. En particulier $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et, par hypothèse de récurrence, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt. \quad (1)$$

Pour tout $t \in I$, on note $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$. La fonction $u = f^{(n+1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I car f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I et la fonction v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I car polynomiale.

De plus, pour tout $t \in I$,

$$u'(t) = f^{(n+2)}(t) \quad \text{et} \quad v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Donc, par intégrations par parties,

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(t) \right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant dans (1), on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \times (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+2)}(t) dt. \end{aligned}$$

Ce qui achève la récurrence. □

Fonction exponentielle

Théorème 17.14 – Développement en série entière de la fonction exponentielle

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Rayon de convergence $R = +\infty$.

Démonstration

(Astuce utile!) Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 $t \mapsto e^{z \times t}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$. Donc, par la formule de Taylor avec reste intégral, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^z = f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times f^{(n+1)}(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1} \times e^{z \times t} dt.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1} \times e^{z \times t} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|1-t|^n}{n!} \times |z|^{n+1} \times |e^{z \times t}| dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} \times |z|^{n+1} \times e^{t \times \operatorname{Re}(z)} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{n!} \times |z|^{n+1} \times e^{|\operatorname{Re}(z)|} dt \leq |z|^{n+1} \times e^{|\operatorname{Re}(z)|} \times \frac{1}{n!}.$$

Or, $z^{n+1} = o(n!)$, donc $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1} \times e^{z \times t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'où, par théorème de comparaison,

$$\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^z.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge, donc $R \geq |z|$. Donc, $R = +\infty$.

Remarque 17.8

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $e^{-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{z^n}{n!}$.

Fonctions cosinus et sinus, fonctions hyperboliques

Théorème 17.15 – Fonctions cosinus et sinus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Rayons de convergence $R = +\infty$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ et $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$.

Or, $e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$.

De plus, on sait qu'une série à termes complexes converge si, et seulement si, les séries des parties réelles et imaginaires convergent. Donc,

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{(ix)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(i^n) \times \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{(ix)^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(i^n) \times \frac{x^n}{n!}.$$

Or, $i = e^{i \frac{\pi}{2}}$. Donc,

$$\operatorname{Re}(i^n) = \operatorname{Re} \left(e^{i \frac{n \times \pi}{2}} \right) = \cos \left(\frac{n \times \pi}{2} \right) = \begin{cases} \cos(k \times \pi) = (-1)^k & \text{si } n = 2k \text{ (n pair),} \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} + k \times \pi \right) = 0 & \text{si } n = 2k+1 \text{ (n impair).} \end{cases}$$

et

$$\operatorname{Im}(i^n) = \operatorname{Im}\left(e^{i \frac{n \times \pi}{2}}\right) = \sin\left(\frac{n \times \pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin(k \times \pi) = 0 & \text{si } n = 2k \text{ (n pair),} \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + k \times \pi\right) = (-1)^k & \text{si } n = 2k + 1 \text{ (n impair).} \end{cases}$$

Donc,

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \times \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \times \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Les calculs précédents montrent que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les séries numériques $\sum (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent.

Donc, le rayon de convergence des séries entières $\sum (-1)^n \times \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est $+\infty$. $\square$

Remarque 17.9

On peut aussi trouver ces développements en série entière en utilisant les formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

La méthode est ensuite similaire à celle de la démonstration du théorème suivant.

Théorème 17.16 – Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Rayons de convergence $R = +\infty$.

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Or, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et $e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$.

$$\text{Donc, } \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \times \underbrace{\left(1 + (-1)^n \right)}_{\substack{=0 \text{ si } n \text{ impair} \\ =2 \text{ si } n \text{ pair}}} \times \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

$$\text{De même, } \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \times \underbrace{\left(1 - (-1)^n \right)}_{\substack{=0 \text{ si } n \text{ pair} \\ =2 \text{ si } n \text{ impair}}} \times \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les séries numériques $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent.

Donc, le rayon de convergence des séries entières $\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est $+\infty$. $\square$

À partir du développement en série entière de $z \mapsto \frac{1}{1-z}$

 Théorème 17.17 – $z \mapsto \frac{1}{1-z}$

$$\forall z \in \mathbb{C}, \left[|z| < 1 \implies \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right].$$

En particulier,

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times x^n.$$

Rayons de convergence $R = 1$.

Démonstration

On sait déjà que le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est $R = 1$ et que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

En particulier, pour tout $x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, puis en remplaçant x par $-x \in]-1, 1[$, il vient : $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times x^n$. $\square$

 Théorème 17.18 – $x \mapsto \ln(1-x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \times \frac{x^n}{n}.$$

Rayon de convergence $R = 1$.

Démonstration

La série entière $\sum x^n$ est la série dérivée de la série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc ces séries ont le même rayon de convergence.

De plus, en notant pour tout $x \in]-1, 1[, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, on sait que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

$$\text{Donc, pour tout } x \in]-1, 1[, S(x) = \int_0^x S'(t) dt + S(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt + 0 = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x).$$

En remplaçant x par $-x$ on obtient de second développement en séries entières. $\square$

 Théorème 17.19 – Arc tangente

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Rayon de convergence $R = 1$.

Démonstration

► En appliquant le critère de d'Alembert, on montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ est 1.

► Soit $x \in]-1, 1[$, on a : $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$. Or, $-x^2 \in]-1, 1[$, donc $\text{Arctan}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times x^{2n}$.

Par théorème d'intégration terme à terme des séries entières,

$$\int_0^x \text{Arctan}'(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \times t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\text{Or, } \int_0^x \text{Arctan}'(t) dt = \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(x).$$

$$\text{Donc, } \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \times \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

□

Fonction puissance $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ **Théorème 17.20 – $x \mapsto (1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!} \times x^n.$$

Rayon de convergence $R = 1$ (sauf si $\alpha \in \mathbb{N}$).

Démonstration

► Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$, il suffit d'appliquer la formule du binôme de Newton.

► Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Considérons la fonction $f_\alpha : x \mapsto (1+x)^\alpha = e^{\alpha \times \ln(1+x)}$.

La fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour tout $x > -1$, $f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1+x} \times f_\alpha(x)$.

On en déduit que f_α est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - \frac{\alpha}{1+x} \times y = 0 \text{ sur }]-1, +\infty[\\ y(0) = 1. \end{cases}$$

De plus, l'équation différentielle est à coefficients continues sur $] -1, +\infty[$, donc par théorème ce problème de Cauchy possède une unique solution.

On considère une série entière $\sum a_n \times x^n$ de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. On note, pour tout $x \in]-R, R[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n$.

On sait que S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et on peut dériver terme à terme la série.

D'où, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} (1+x) \times S'(x) - \alpha \times S(x) &= (1+x) \times \sum_{n=1}^{+\infty} n \times a_n \times x^{n-1} - \alpha \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n \times a_n \times x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n \times a_n \times x^n - \alpha \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times a_{n+1} \times x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n \times a_n \times x^n - \alpha \times \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) \times a_{n+1} + (n-\alpha) \times a_n) \times x^n. \end{aligned}$$

On en déduit que S est solution de l'équation différentielle $y' - \frac{\alpha}{1+x} \times y = 0$ si, et seulement si, pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) \times a_{n+1} + (n-\alpha) \times a_n) \times x^n = 0.$$

D'où, par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1) \times a_{n+1} + (n-\alpha) \times a_n = 0$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \frac{\alpha - (n-1)}{n} \times a_{n-1} = \frac{\alpha - (n-1)}{n} \times \frac{\alpha - (n-2)}{n-1} \times \cdots \times \frac{\alpha - 0}{1} \times a_0 = \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!} \times a_0.$$

De plus, on a $S(0) = 1$ si, et seulement si, $a_0 = 1$.

Ainsi, par unicité de la solution d'un problème de Cauchy, pour tout $x \in]-R, R[\cap]-1, +\infty[$,

$$f_\alpha(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \times (\alpha-1) \times \cdots \times (\alpha-n+1)}{n!} \times x^n.$$

Il reste à déterminer R !

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{|a_{n+1} \times x^{n+1}|}{|a_n \times x^n|} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \times |x| = \left| \frac{n-\alpha}{n+1} \right| \times |x| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|.$$

Par le critère de d'Alembert :

- Si $|x| < 1$, alors la série $\sum a_n \times x^n$ converge absolument.
- Si $|x| > 1$, alors $|a_n \times x^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc, $R = 1$.

**Exercice 17.6**

1. Déterminer le développement en série entière de Arcsin .
2. Montrer que $\operatorname{Arccos} + \operatorname{Arcsin}$ est constante.
3. En déduire le développement en série entière de Arccos .

Résolution

Indication : quelle est la dérivée de Arcsin ?