
Correction Concours blanc n°2 type ESSECII

ESSEC II, 2013

I. Lien entre loi binomiale et loi de Poisson

1. (a) $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ est une somme de loi de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p_n , donc $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$.
Par suite,

$$S_n(\Omega = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}.$$

- (b) i. Pour tout $n \geq k$, $k \in S_n(\Omega)$ et, d'après 1.a, $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$.

ii. • Comme np_n a une limite finie strictement positive λ , on a $np_n \sim \lambda$ et, par suite, $p_n \sim \frac{\lambda}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par suite,

$$(1 - p_n)^n = \exp\left(\overbrace{n \ln(1 - p_n)}^{\sim -np_n \rightarrow -\lambda}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\rightarrow 0} e^{-\lambda}.$$

iii. Comme $n \rightarrow +\infty$, on peut supposer que $n \geq k$, et donc

$$\begin{aligned} P(S_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p_n^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \\ &= n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{1}{k!} p_n^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \\ &= \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{k!} (np_n)^k (1 - p_n)^n \frac{1}{(1 - p_n)^k} \\ &= \underbrace{\frac{n}{n}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\rightarrow 1} \dots \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\rightarrow 1 \text{ car } k \text{ constant}} \frac{1}{k!} \underbrace{(np_n)^k}_{\rightarrow \lambda} \underbrace{(1 - p_n)^n}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \underbrace{\frac{1}{(1 - p_n)^k}}_{\rightarrow 1 \text{ car } p_n \rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

- (c) i. Comme $X_1(\Omega) = \dots = X_n(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$, $N_n(\Omega) = \max(X_1, \dots, X_n)(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P(N_n = 0) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) = 0) = P(X_1 = 0 \cap \dots \cap X_n = 0) \\ &= P(X_1 = 0) \dots P(X_n = 0) \quad (\text{indépendance}) \\ &= (1 - p_n) \dots (1 - p_n) = (1 - p_n)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} \end{aligned}$$

iii. Par suite, comme $N_n(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$,

(N_n) converge en loi vers une loi de Bernoulli de paramètre $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(N_n = 1) = 1 - e^{-\lambda}$.

2. (a) Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto e^{-x} - 1 + x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) = -e^{-x} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leq 1 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Par suite, on a :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$

On a donc $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et donc $1 - x \leq e^{-x}$ pour tout $x \geq 0$.

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(U=k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| &= \left| P(U=0) - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \left| P(U=1) - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \left| \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \\
&= \left| 1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \left| \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \\
&= e^{-\frac{\lambda}{n}} - 1 + \frac{\lambda}{n} + \left| \frac{\lambda}{n} (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}) \right| + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \\
&= e^{-\frac{\lambda}{n}} - 1 + \frac{\lambda}{n} + \frac{\lambda}{n} (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \\
&= -1 + \frac{\lambda}{n} (2 - 2e^{-\frac{\lambda}{n}}) + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}}}_{=1(\text{somme des probabilités d'une loi } \mathcal{P}(\lambda/n))} \\
&= \frac{2\lambda}{n} (1 - e^{-\frac{\lambda}{n}})
\end{aligned}$$

(c) Or, d'après 2.a, comme $\frac{\lambda}{n} \geq 0$, on a $1 - e^{-\frac{\lambda}{n}} \leq \frac{\lambda}{n}$, et, en remplaçant dans le second membre de 2.b, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

3. (a) Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |P(U=k-i) - P(V=k-i)| &= \sum_{p=-i}^{+\infty} |P(U=p) - P(V=p)| \quad (\text{en posant } p = k-i) \\
&= \sum_{p=-i}^{-1} \underbrace{|P(U=p) - P(V=p)|}_{=0} + \sum_{p=0}^{+\infty} |P(U=p) - P(V=p)| \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(U=k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right|
\end{aligned}$$

Or, cette série converge (d'après 2.b), donc la série de départ converge, cqfd.

De plus, d'après 2.c,

$$A_i = \sum_{k=0}^{+\infty} |P(U=k-i) - P(V=k-i)| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(U=k) - \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| \leq 2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2.$$

(b) • Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i P(Z=i) \geq 0$.

• Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $A_i P(Z=i) \leq \underbrace{2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2}_{\text{constante}} P(Z=i)$.

• Or, la série de terme général $2 \left(\frac{\lambda}{n}\right)^2 P(Z=i)$ converge (somme des probabilités d'une variable aléatoire), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $A_i P(Z=i)$ converge aussi.

(c) • Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|P(U=k-i) - P(V=k-i)| P(Z=i) \geq 0$.

• Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|P(U=k-i) - P(V=k-i)| P(Z=i) \leq A_i P(Z=i)$.

• Or, la série de terme général $A_i P(Z=i)$ converge (somme des probabilités d'une variable aléatoire), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|P(U=k-i) - P(V=k-i)| P(Z=i)$ converge aussi.

(d) On a établi la convergence de la série B_k

i.

$$\begin{aligned}
B_k &= \sum_{i=0}^{+\infty} |P(U = k - i) - P(V = k - i)|P(Z = i) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} \underbrace{|P(U = k - i) - P(V = k - i)|}_{=0} P(Z = i) + \underbrace{|P(U = 1) - P(V = 1)|}_{\text{pour } i = k-1} P(Z = k-1) \\
&\quad + \underbrace{|P(U = 0) - P(V = 0)|}_{\text{pour } i = k} P(Z = k) + \sum_{i=k+1}^{+\infty} \underbrace{|P(U = k - i) - P(V = k - i)|}_{=0} P(Z = i) \\
&= \left| 1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| P(Z = k) + \left| \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right| P(Z = k-1) + \sum_{i=0}^{k-2} P(V = k - i)P(Z = i)
\end{aligned}$$

ii. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z = i)_{i \in \mathbb{N}}$, on a :

$$\begin{aligned}
P(V + Z = k) &= \sum_{i=0}^{+\infty} P(V + Z = k \cap Z = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(V = k - i \cap Z = i) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} P(V = k - i)P(Z = i) \quad (\text{indépendance}) \\
&= \sum_{i=0}^{k-2} P(V = k - i)P(Z = i) + \sum_{i=k-1}^{+\infty} \underbrace{P(V = k - i)P(Z = i)}_{\geq 0} \\
&\geq \sum_{i=0}^{k-2} P(V = k - i)P(Z = i).
\end{aligned}$$

iii. Notons $u_k = \sum_{i=0}^{k-2} P(V = k - i)P(Z = i)$.

• Alors on a, pour tout $k \geq 2$, $u_k \geq 0$ et $u_k \leq P(V + Z = k)$.

Or, la série de terme général $P(V + Z = k)$ converge (somme des probabilités d'une variable aléatoire), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_k converge aussi.

• Par suite, comme, pour tout $k \geq 2$,

$$B_k = \underbrace{\left| 1 - \frac{\lambda}{n} - e^{-\frac{\lambda}{n}} \right|}_{\text{constante}} P(Z = k) + \underbrace{\left| \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}} \right|}_{\text{constante}} P(Z = k-1) + u_k,$$

la série de terme général B_k converge comme combinaison linéaire de séries convergentes.

4. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z = i)_{i \in \mathbb{N}}$, on a

$$P(Z + U = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(Z + U = k \cap Z = i) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(U = k - i \cap Z = i) \stackrel{\text{ind}}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} P(U = k - i)P(Z = i)$$

$$\text{et } P(Z + V = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(V = k - i)P(Z = i).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
|P(Z + U = k) - P(Z + V = k)| &= \left| \sum_{i=0}^{+\infty} P(U = k - i)P(Z = i) - \sum_{i=0}^{+\infty} P(V = k - i)P(Z = i) \right| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{+\infty} ((P(U = k - i) - P(V = k - i))P(Z = i)) \right| \\
&\stackrel{\text{inégalité triangulaire}}{\leq} \sum_{i=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i))P(Z = i)| \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} |P(U = k - i) - P(V = k - i)| P(Z = i) \quad (\text{série convergente d'après 3.c}) \\
&= B_k.
\end{aligned}$$

Or, la série de terme général B_k converge (d'après 3.d.iii), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général $|P(Z + U = k) - P(Z + V = k)|$ converge aussi.

- (b) En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente (les pb de convergence des séries qui apparaissent ont déjà été levés), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} |P(Z + U = k) - P(Z + V = k)| &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} B_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i)) P(Z = i)| \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |(P(U = k - i) - P(V = k - i)) P(Z = i)| \quad (\text{propriété admise au début de la question 4}) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} P(Z = i) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |P(U = k - i) - P(V = k - i)| \right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} P(Z = i) \left(2 \left(\frac{\lambda}{n} \right)^2 \right) \quad (\text{d'après 3.a}) \\
&= 2 \left(\frac{\lambda}{n} \right)^2 \underbrace{\sum_{i=0}^{+\infty} P(Z = i)}_{=1 \text{ car } Z(\Omega) \subset \mathbb{N}} = 2 \left(\frac{\lambda}{n} \right)^2.
\end{aligned}$$

5. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|P(U_1 + \dots + U_n = k) - P(V_1 + \dots + V_n = k)| \\
&= |P(U_1 + \dots + U_n = k) - P(U_1 + \dots + U_{n-1} + V_n = k) \\
&\quad + P(U_1 + \dots + U_{n-1} + V_n = k) - P(U_1 + \dots + U_{n-2} + V_{n-1} + V_n = k) \\
&\quad + \dots + P(U_1 + V_2 + \dots + V_n = k) - P(V_1 + \dots + V_n = k)| \\
&\leq |P(U_1 + \dots + U_n = k) - P(U_1 + \dots + U_{n-1} + V_n = k)| \\
&\quad + |P(U_1 + \dots + U_{n-1} + V_n = k) - P(U_1 + \dots + U_{n-2} + V_{n-1} + V_n = k)| \\
&\quad + \dots + |P(U_1 + V_2 + \dots + V_n = k) - P(V_1 + \dots + V_n = k)|
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire.

- (b) En posant $u_{i,k} = |P(U_1 + \dots + U_i + V_{i+1} + \dots + V_n = k) - P(U_1 + \dots + U_{i-1} + V_i + \dots + V_n = k)|$, on a, d'après la question précédente,

$$|P(U_1 + \dots + U_n = k) - P(V_1 + \dots + V_n = k)| = \sum_{i=1}^n u_{i,k}.$$

Or, on a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
u_{i,k} &= |P(U_1 + \dots + U_i + V_{i+1} + \dots + V_n = k) - P(U_1 + \dots + U_{i-1} + V_i + \dots + V_n = k)| \\
&= |P(U_1 + \dots + U_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n + U_i = k) - P(U_1 + \dots + U_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_n + V_i = k)| \\
&= |P(Z_i + U_i = k) - P(Z_i + V_i = k)|
\end{aligned}$$

où Z_i , U_i et V_i vérifient les conditions de la question 4, donc, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{i,k} \text{ converge et on a } \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i,k} \leq 2 \left(\frac{\lambda}{n} \right)^2 \quad (*).$$

La série de terme général $|P(U_1 + \dots + U_n = k) - P(V_1 + \dots + V_n = k)| = \sum_{i=1}^n u_{i,k}$ converge donc comme somme finie de séries convergentes et en sommant l'inégalité (*), on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |P(U_1 + \dots + U_n = k) - P(V_1 + \dots + V_n = k)| = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i,k} \leq \sum_{i=1}^n 2 \left(\frac{\lambda}{n} \right)^2 = n 2 \left(\frac{\lambda}{n} \right)^2 = \frac{2\lambda^2}{n}.$$

- (c) X , qui suit une loi binomiale de paramètre $(n, \frac{\lambda}{n})$, peut s'écrire sous la forme $X = \sum_{i=1}^n U_i$ où chaque U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et sont indépendantes entre elles.

De même, si $V \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors V peut s'écrire sous la forme $X = \sum_{i=1}^n V_i$ où chaque V_i suit une loi de Poisson de

paramètre $\frac{\lambda}{n}$ et sont indépendantes entre elles.
Par suite,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(X=k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P(X=k) - P(V=k)| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} |P(U_1 + \dots + U_n = k) - P(V_1 + \dots + V_n = k)| \\ &\leq \frac{2\lambda^2}{n}.\end{aligned}$$

II. Modélisation de la concentration en bactéries

6. (a) D'après l'énoncé, la probabilité que la bactérie se trouve dans le prélèvement est $\frac{\Delta V}{V}$, donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{\Delta V}{V}\right)$.

(b) On a $N = \sum_{i=1}^n X_i$, où les X_i sont supposées indépendantes, donc $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\Delta V}{V}\right)$.

7. On a $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & \text{où } k = [x] \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

Pour diminuer le nombre d'opérations, on peut écrire $\frac{\lambda^k}{k!} = \prod_{i=1}^k \frac{\lambda}{i}$.

```
def poisson(x,lambd)
    if x < 0 :
        return 0
    else :
        k=np.floor(x)
        prod=1
        for i in range(1,k+1) :
            return prod*np.exp(-lambd)
```

8. (a) En reprenant le résultat de la question 5.c avec $\lambda = c\Delta V = n \frac{\Delta V}{V}$ et $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\Delta V}{V}\right) = \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$, on a

$$\begin{aligned}|P(N \leq K) - P(U \leq K)| &= \left| \sum_{k=0}^K P(N=k) - \sum_{k=0}^K P(U=k) \right| = \left| \sum_{k=0}^K (P(N=k) - P(U=k)) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^K |P(N=k) - P(U=k)| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |P(N=k) - P(U=k)| \leq \frac{2\lambda^2}{n} \quad (\text{d'après 5.c}) \\ &= \frac{2n^2 \Delta V^2}{nV^2} = \frac{2n \Delta V^2}{V^2} = \frac{2c(\Delta V)^2}{V}.\end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, un majorant de l'erreur commise est

$$\frac{2c(\Delta V)^2}{V} = 2n \left(\frac{\Delta V}{V} \right)^2 = 2n(10^{-6})^2 = 2n10^{-12}.$$

(c) D'après l'énoncé, on a $c \leq 10^6$, donc l'erreur est inférieure à $\frac{2 \cdot 10^6 (\Delta V)^2}{V}$.

D'où, pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-6} , il suffit que

$$\frac{2 \cdot 10^6 (\Delta V)^2}{V} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow V \geq \frac{2 \cdot 10^6 (\Delta V)^2}{10^{-6}} \Leftrightarrow V \geq \frac{2 \cdot 10^6 (10^{-3})^2}{10^{-6}} = 2 \cdot 10^6,$$

et donc que le volume total soit supérieur à $2 \cdot 10^6$ mètres cubes.

- (d) Comme on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(X=k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \frac{2\lambda \min(\lambda, 2)}{n}$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \left| P(X=k) - e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \right| \leq \frac{4\lambda}{n}$, car $\min(\lambda, 2) \leq 2$.

Par suite, en reprenant le même raisonnement qu'en 8.a avec cette amélioration, on obtient

$$|P(N \leq K) - P(U \leq K)| \leq \frac{4\lambda}{n} = \frac{4n\Delta V}{nV} = \frac{4(\Delta V)}{V}.$$

- (e) D'où, pour que l'erreur commise soit inférieure à 10^{-6} , il suffit que

$$\frac{4(\Delta V)}{V} \leq 10^{-6} \Leftrightarrow V \geq \frac{4(\Delta V)}{10^{-6}} \Leftrightarrow V \geq \frac{4(10^{-3})}{10^{-6}} = 4.10^3,$$

et donc que le volume total soit supérieur à 4.10^3 mètres cubes.

III. Construction d'une procédure de test

9. h est de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$ par opérations sur les fonctions usuelles et, pour tout $x > -1$,

$$h'(x) = \ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x} - 1 = \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$

On a donc

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	1	$\searrow$	$+\infty$
		0	$\nearrow$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} h(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} h \ln h - (h-1) = 1 \quad (\text{par croissances comparées}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - 1) + \ln(1+x) = +\infty \end{aligned}$$

Par suite, h est positive sur $] -1, +\infty[$ et ne s'annule qu'en 0.

10. Posons $Y(\Omega) = \{y_i, i \in I\}$, où $I \subset \mathbb{N}$, et $J = \{i \in I : y_i \geq \alpha\}$.

On a alors $[Y \geq \alpha] = \bigcup_{i \in J} [Y = y_i]$ et $P(Y \geq \alpha) = \sum_{i \in J} P(Y = y_i)$.

Comme Y est positive, on a, pour tout $i \in I$, $y_i \geq 0$. On en déduit :

$$E(Y) = \sum_{i \in I} y_i P(Y = y_i) \geq \sum_{i \in J} y_i P(Y = y_i) \geq \sum_{i \in J} \alpha P(Y = y_i) = \alpha P(Y \geq \alpha).$$

On a donc bien

$$P(Y \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha} E(Y).$$

11. (a) *C'est le théorème de transfert!!!*

Sous réserve de convergence,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{uk} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{e^{uk} \lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^u \lambda)^k}{k!}.$$

Or, cette série converge (série exponentielle), donc la série de départ converge, donc converge absolument (série à termes positifs), donc, d'après le théorème de transfert, e^{-uX} admet une espérance et

$$E(e^{uX}) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^u} = e^{\lambda(e^u - 1)}.$$

- (b) Comme $e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)} = e^{-u_0(1+\varepsilon)\lambda} e^{u_0 X}$, $e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}$ admet une espérance comme multiple d'une variable admettant une espérance et

$$E(e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}) = E(e^{-u_0(1+\varepsilon)\lambda} e^{u_0 X}) = e^{-u_0(1+\varepsilon)\lambda} e^{\lambda(e^{u_0} - 1)} = e^{-\lambda(1 - e^{u_0} + u_0 + u_0 \varepsilon)}.$$

Par suite, en posant $u_0 = \ln(\varepsilon + 1)$, on a bien

$$E(e^{u_0(X-(1+\varepsilon)\lambda)}) = e^{-\lambda(1 - e^{\ln(\varepsilon+1)} + \ln(\varepsilon+1) + \ln(\varepsilon+1)\varepsilon)} = e^{-\lambda(-\varepsilon + (1+\varepsilon)\ln(1+\varepsilon))} = e^{-\lambda h(\varepsilon)}.$$

- (c) i. Pour tout $u > 0$,

$$\begin{aligned} P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \geq \varepsilon) &= P(X - \lambda \geq \lambda \varepsilon) \quad (\text{car } \lambda > 0) \\ &= P(u(X - \lambda) \geq u \lambda \varepsilon) \quad (\text{car } u > 0) = P(e^{u(X - \lambda)} \geq e^{u \lambda \varepsilon}) \quad (\text{car } \exp \text{ est croissante sur } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

ii. On a

$$P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \geq \varepsilon) = P(e^{u(X-\lambda)} \geq e^{u\lambda\varepsilon}) \quad (\text{pour tout } u > 0 \text{ d'après 1.})$$

$$\leq \frac{1}{e^{u\lambda\varepsilon}} E(e^{u(X-\lambda)}) \quad (\text{d'après 10})$$

$$= E(e^{-u\lambda\varepsilon} e^{u(X-\lambda)}) = E(e^{u(X-(1+\varepsilon)\lambda)})$$

$$= e^{-\lambda h(\varepsilon)} \quad (\text{en prenant } u = u_0 > 0 \text{ de la question 11.b})$$

(d) *Pb selon moi dans l'énoncé, il fallait lire $\varepsilon > 1$ et $0 < \varepsilon \leq 1$.*

• Si $\varepsilon > 1$, alors $h(-\varepsilon)$ n'a pas de sens. Cependant, on peut calculer :

$$P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \leq -\varepsilon) = P(X - \lambda \leq -\lambda\varepsilon) = P(X \leq \lambda - \lambda\varepsilon) = P(X \leq \underbrace{\lambda(1 - \varepsilon)}_{<0}) = 0$$

car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

• Si $\varepsilon = 1$,

$$P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \leq -1) = P(X - \lambda \leq -\lambda) = P(X \leq 0) = P(X = 0) = e^{-\lambda} = e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.$$

• Enfin, si $0 < \varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \leq -\varepsilon) &= P(X - \lambda \leq -\lambda\varepsilon) \\ &= P(u(X - \lambda) \geq -u\lambda\varepsilon) \quad (\text{pour tout } u < 0) \\ &= P(e^{u(X-\lambda)} \geq e^{-u\lambda\varepsilon}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{e^{-u\lambda\varepsilon}} E(e^{u(X-\lambda)}) \quad (\text{d'après 10 avec } -u\lambda\varepsilon > 0) \\ &= E(e^{u(X-(1-\varepsilon)\lambda)}). \end{aligned}$$

Or, comme en 11.b, on a

$$E(e^{u_0(X-(1-\varepsilon)\lambda)}) = E(e^{-u_0(1-\varepsilon)\lambda} e^{u_0 X}) = e^{-u_0(1-\varepsilon)\lambda} e^{\lambda(e^{u_0}-1)} = e^{-\lambda(1-e^{u_0}+u_0-u_0\varepsilon)},$$

et, en posant $u_0 = \ln(1 - \varepsilon)$, on a

$$E(e^{u_0(X-(1-\varepsilon)\lambda)}) = e^{-\lambda(1-e^{\ln(1-\varepsilon)}+\ln(1-\varepsilon)-\ln(1-\varepsilon)\varepsilon)} = e^{-\lambda(\varepsilon+(1-\varepsilon)\ln(1-\varepsilon))} = e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.$$

D'où, en posant $u = u_0 = \ln(1 - \varepsilon) < 0$, on a

$$P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \leq -\varepsilon) \leq E(e^{u_0(X-(1-\varepsilon)\lambda)}) = e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.$$

• D'où, $\text{Pour tout } \varepsilon \in]0, 1], P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \leq -\varepsilon) \leq e^{-\lambda h(-\varepsilon)}.$

1. (a) Pour tout $\lambda > 2000$,

$$\begin{aligned} P(X \leq \alpha) &= P(X - \lambda \leq \alpha - \lambda) = P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \leq \lambda^{-1}(\alpha - \lambda)) \\ &= P(\lambda^{-1}(X - \lambda) \leq -\varepsilon) \quad (\text{en posant } \varepsilon \lambda^{-1}(\underbrace{\lambda - \alpha}_{>0 \text{ car } \lambda > 2000 \geq \alpha})) \\ &\leq e^{-\lambda h(-\varepsilon)} \quad (\text{d'après 11.d}) = e^{-\lambda h(\lambda^{-1}(\alpha - \lambda))} = e^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1)} \end{aligned}$$

(b) Si $\lambda > 2000$, alors $\lambda^{-1}\alpha - 1 < \frac{\alpha}{2000} - 1$ ($\in [-1, 0]$), donc, comme h est décroissante sur $[-1, 0]$, on a $h(\lambda^{-1}\alpha - 1) > h\left(\frac{\alpha}{2000} - 1\right)$ (≥ 0).

Comme on a de plus $\lambda > 2000$ (≥ 0), on a, en multipliant ces inégalités entre nombres positifs,

$$\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1) \geq 2000 h\left(\frac{\alpha}{2000} - 1\right),$$

et donc

$$-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1) \leq -2000 h\left(\frac{\alpha}{2000} - 1\right),$$

et finalement, en composant par $\exp$, qui est croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$e^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1)} \leq e^{-2000 h\left(\frac{\alpha}{2000} - 1\right)}.$$

On a donc bien

$$P(X \leq \alpha) \leq e^{-\lambda h(\lambda^{-1}\alpha - 1)} \leq e^{-2000 h\left(\frac{\alpha}{2000} - 1\right)}.$$

- (c) $2000h\left(\frac{\alpha}{2000} - 1\right) = \ln(100) \Leftrightarrow h(z) = \frac{\ln(100)}{2000}$ en posant $z = \frac{x}{2000} - 1$. De plus, comme $x \in [0, 2000]$, on a $z = \frac{x}{2000} - 1 \in [-1, 0]$.
 h est continue et strictement décroissante sur $[-1, 0]$, donc elle réalise une bijection de $[-1, 0]$ sur $[0, 1]$.
Or, $\frac{\ln(100)}{2000} \in [0, 1]$, donc l'équation $h(z) = \frac{\ln(100)}{2000}$ admet une unique solution sur $[-1, 0]$, notée z_0 . Enfin, $\frac{x}{2000} - 1 = z_0 \Leftrightarrow x = 2000(z_0 + 1) = \alpha_0$.
Pour moi, la question est mal posée, car on a l'impression qu'il faut montrer qu'il y a une unique solution sur $\mathbb{R}$, puis montrer qu'elle est dans $[0, 2000]$...
Il y a une autre solution dans $\mathbb{R}$, que l'on trouve en résolvant l'équation $h(z) = \frac{\ln(100)}{2000}$ sur $\mathbb{R}_+$.

- (d) En admettant que $\alpha_0 > 1865$, on a

$$P(X < 1865) \leq P(X \leq \alpha_0) \leq e^{-2000h\left(\frac{\alpha_0}{2000} - 1\right)} = e^{-\ln(100)} = \frac{1}{100}.$$

- (e) Si $\lambda > 2000$, alors $P(X < 1865) \leq \frac{1}{100}$.

Or, ici, l'événement $X < 1865$ est réalisé, donc on a moins d'une chance sur 100 d'avoir une concentration en bactéries supérieure à $2000/l$.