

Produit vectoriel

Table des matières

1 Généralités	1
1.1 Définition géométrique	1
1.2 Conséquences	2
2 Produit vectoriel dans une base orthonormée directe	3
2.1 Base orthonormée directe	3
2.2 Expression analytique	4
2.3 Double produit vectoriel	4

1 Généralités

1.1 Définition géométrique

Définition du produit vectoriel de deux vecteurs

Le produit vectoriel est un opérateur noté $\wedge$, qui à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ associe un troisième vecteur $\vec{w}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Le vecteur $\vec{w}$ est défini géométriquement de la manière suivante :

- la norme $\|\vec{w}\|$ est égale à l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (figure 1),
- la direction de $\vec{w}$ est orthogonale au plan défini par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,
- le vecteur $\vec{w}$ est orienté dans le sens de déplacement d'un tire-bouchon dont on fait tourner la poignée pour amener $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ (règle dite « du tire-bouchon »).

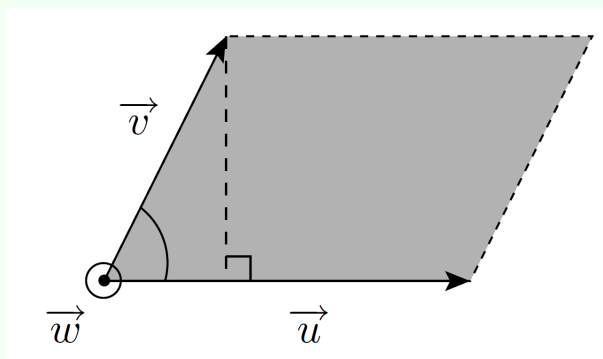


Figure 1 – Aire correspondant à $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

Il existe des variantes pour définir l'orientation du vecteur $\vec{w}$. On peut citer

- la règle « de la main droite » : le pouce étant suivant $\vec{u}$, l'index suivant $\vec{v}$, le majeur donne l'orientation de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (attention à bien utiliser la main droite!),
- la règle « du bonhomme d'Ampère » : le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orienté des pieds vers la tête d'un bonhomme dont le corps est orthogonal au plan formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et dont le bras droit est suivant $\vec{u}$, le bras gauche suivant $\vec{v}$.

1.2 Conséquences

Propriétés issues de la définition géométrique

Les propriétés suivantes découlent de la définition géométrique du produit vectoriel :

- Norme (aire du parallélogramme) :

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$$

- Condition de colinéarité (annulation).

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

- Antisymétrie :

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

- Homogénéité (linéarité par rapport à un scalaire) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

- Distributivité (linéarité par rapport à l'addition) :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \wedge \vec{v}_1 + \vec{u} \wedge \vec{v}_2$$

2 Produit vectoriel dans une base orthonormée directe

2.1 Base orthonormée directe

Définition d'une base orthonormée directe

Une base orthonormée directe (figure 2) est un triplet de vecteurs $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tel que

- les trois vecteurs sont de norme égale à 1 : $\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$
- les vecteurs sont orthogonaux deux à deux : $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ avec $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$
- le vecteur $\vec{e}_3$ est orienté par rapport au couple $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ suivant la règle d'orientation du tire-bouchon (ou suivant celle de la main droite ou encore du bonhomme d'Ampère).

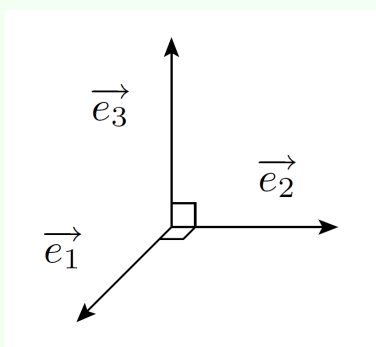


Figure 2 – Base orthonormée directe

Il en résulte qu'une base orthonormée directe est telle que

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

Il existe un moyen mnémotechnique (figure 3) simple pour s'en souvenir, qui consiste à placer à la suite sur un cercle orienté dans le sens trigonométrique les trois vecteurs de la base. Le produit de deux d'entre eux est égal au troisième, et le signe dépend du sens dans lequel on tourne.

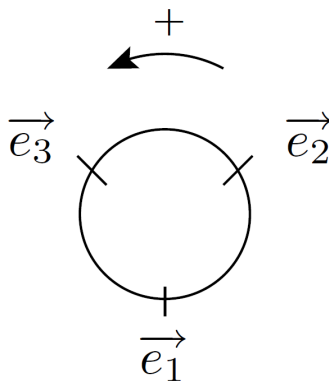


Figure 3 – Produit vectoriel de deux vecteurs de la base

Par exemple,

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$$

2.2 Expression analytique

Expression de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ en fonction des coordonnées des deux vecteurs

À condition de se placer dans une base orthonormée directe, le produit vectoriel $\vec{u} \wedge \vec{v}$ peut se calculer en utilisant les composantes respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans cette base des deux vecteurs. On a alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

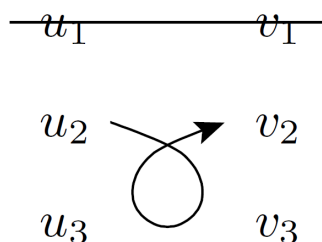


Figure 4 – Règle du gamma

Une méthode pratique de calcul consiste à barrer la première ligne des composantes et à effectuer le calcul du déterminant des deux autres lignes grâce à la « règle du gamma » rappelée figure 4 ; on obtient ainsi la première composante du produit vectoriel.

La deuxième composante du produit vectoriel s'obtient de même en barrant la deuxième ligne des composantes et en calculant le déterminant des autres lignes, *mais en changeant le signe du résultat final*.

La troisième composante s'obtient en barrant la troisième ligne, puis en calculant le déterminant des deux premières lignes.

2.3 Double produit vectoriel

Expression du double produit vectoriel

On montre que

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \times (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \times (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Qui se lit « BAC (le truc qu'on donne en fin de terminale) - CAB (le taxi anglais) ».

Il est logique que dans le résultat du produit vectoriel de $\vec{A}$ par un autre vecteur (ici $\vec{B} \wedge \vec{C}$), il n'y ait pas de composante suivant le vecteur $\vec{A}$, puisque par définition, ce produit vectoriel est orthogonal à $\vec{A}$.