

Applications linéaires : introduction

Exercice 1 (★). Soit $a \in \mathbb{R}$. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2) & \mapsto & (3x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) \end{matrix}$
2. $g : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & (x_3, x_1, a) \end{matrix}$
3. $h : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) + P'(0) \end{matrix}$
4. $u : \begin{matrix} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & 1 + P' \end{matrix}$
5. $v : \begin{matrix} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^2 \end{matrix}$
6. $w : \begin{matrix} \mathbb{C}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & (3^n u_{n+2})_{n \in \mathbb{N}} \end{matrix}$

Résultat attendu :

1. Oui
2. Seulement si $a = 0$
3. Oui
4. Non
5. Non
6. Oui

Exercice 2 (★). Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer (éventuellement en fonction des valeurs de a) celles qui sont linéaires :

1. $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, a) \end{matrix}$
2. $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (ax, ay) \end{matrix}$
3. $\begin{matrix} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + a, y + a) \end{matrix}$

Résultat attendu :

1. Oui ssi $a = 0$
2. Oui pour tout a
3. Oui ssi $a = 0$

Exercice 3 (★★). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $(u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$ et $x \in E$. Traduire les phrases suivantes.

1. $x \in \text{Ker}(u)$.
2. $x \in \text{Im}(v)$.
3. $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$.
4. $x \in \text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u)$.
5. $x \in \text{Ker}(u) + \text{Ker}(v)$.
6. $x \in \text{Ker}(v) + \text{Im}(u)$.
7. $x \in \text{Ker}(u + \text{id}_E) + \text{Im}(v)$.
8. $x \in \text{Ker}(u^2) \cap \text{Im}(u + v)$.

Résultat attendu :

1. $u(x) = 0$
2. $\exists z \in E \text{ tq } x = v(z)$
3. $u(x) = 0 \text{ et } v(x) = 0$
4. $u(x) = 0 \text{ et } \exists z \in E, x = u(z)$
5. $\exists (a, b) \in E^2 \text{ tq } x = a + b, u(a) = 0 \text{ et } v(b) = 0$
6. $\exists (a, z) \in E^2 \text{ tq } x = a + u(z) \text{ et } v(a) = 0$
7. $\exists (a, z) \in E^2 \text{ tq } x = a + v(z) \text{ avec } u(a) + a = 0$
8. $u^2(x) = 0 \text{ et } \exists z \in E \text{ tq } x = (u + v)(z)$

Exercice 4 (★). Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer une base de leurs noyaux.

1. $\varphi : \begin{matrix} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, y + z) \end{matrix}$
2. $\psi : \begin{matrix} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto & (P(0), P'(-1)) \end{matrix}$

Résultat attendu :

1. $((1, 1, -1))$ est une base de $\text{Ker}(\varphi)$
2. $(X^2 + 2X)$ est une base de $\text{Ker}(\psi)$

Exercice 5 (★). Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α, β réels par

$$f((\alpha, \beta)) = (\alpha + 2\beta, \alpha, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer $\text{Ker}(f)$, $\text{Im}(f)$ et préciser leur dimensions.
3. f est-elle surjective ? injective ?

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ est de dimension 0. $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 1, 1, 3, -1), (2, 0, 1, 5, 2))$ est de dimension 2.
3. f est injective, mais pas surjective.

Exercice 6 (★). Soit f définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ par $f(P(X)) = P'(X) + P(1)$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base du noyau de f .
3. Montrer que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_1[X]$.

Résultat attendu :

1. On revient à la définition.
2. Une base de $\text{Ker}(f)$ est $(X - 2)$.
3. On montre que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 7 (★★). Déterminer une application linéaire u de sorte que l'ensemble F soit le noyau de u :

1. $E = C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{t \mapsto C \mid C \in \mathbb{R}\}$ (ensemble des fonctions constantes)
2. $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x, y) \in E \mid x = 2y\}$
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in E \mid P'(1) = 0 \text{ et } P(2) = P''(0)\}$
4. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, F est l'ensemble des suites géométriques de raison 3

Résultat attendu : Les fonctions proposées sont des exemples, d'autres peuvent également convenir.

- | | |
|--|--|
| 1. $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
$f \mapsto f'$ | 2. $E \rightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \mapsto x - 2y$ |
| 3. $E \rightarrow \mathbb{R}^2$
$P \mapsto (P'(1), P(2) - P''(0))$ | 4. $E \rightarrow E$
$(u_n) \mapsto (u_{n+1} - 3u_n)$ |

Exercice 8 (★★). Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p))$ est une famille libre alors $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est une famille libre.

Résultat attendu : On revient à la définition d'une famille libre et on compose par f pour conclure.

Exercice 9 (★★). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2) \iff \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}.$$

Résultat attendu : On montre successivement les deux implications, en utilisant des doubles inclusions pour les égalités d'ensembles.

Exercice 10 (★★). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2) \iff \text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = E.$$

Résultat attendu : On montre successivement les deux implications, en utilisant des doubles inclusions pour les égalités d'ensembles.

Exercice 11 (★). On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x - y, 0, z).$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.
2. Montrer que f est un projecteur, dont on précisera les caractéristiques.

Résultat attendu :

1. $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$, $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$, et ces familles génératrices sont des bases.
2. f est le projecteur sur $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ parallèlement à $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, 1, 0))$.

Exercice 12 (★). Soit $\varphi_A : \begin{matrix} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ AX \end{matrix}$ avec $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$.

Montrer que φ_A est une symétrie, et en déterminer les éléments caractéristiques.

Résultat attendu : $\text{Ker}(\varphi_A - \text{id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $\text{Ker}(\varphi_A + \text{id}) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, et φ_A est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(\varphi_A - \text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(\varphi_A + \text{id})$.

Exercice 13 (★). On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b + c = 0\} \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}((1, 1, 1)).$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Calculer le projeté d'un vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G .

Résultat attendu :

1. Le plus simple au vu de la suite est de raisonner par analyse-synthèse.
2. Le projeté de (a, b, c) sur F parallèlement à G est $(b - c, -a + 2b - c, -a + b)$.

Exercice 14 (★★). On fixe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. On considère l'application f qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ égal au reste dans la division euclidienne de P par Q .

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$.
2. Montrer qu'il s'agit d'un projecteur et expliciter ses noyau et image.

Résultat attendu :

1. On utilise le théorème de division euclidienne, en faisant bien attention au degré du reste.
2. Les conditions sur le degré donnent $f \circ f = f$. $\text{Ker}(f) = \{S(X)Q(X) \mid S(X) \in \mathbb{R}[X]\}$, et si $n = \deg(Q)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (un antécédent d'un polynôme P étant alors lui-même).

Exercice 15 (Type DS). Soit $u = (2, 1, -1)$, $v = (1, -1, 3)$, $w = (3, 3, -5)$ et $F = \text{Vect}(u, v, w)$.

1. Déterminer une base de F .
2. Montrer que $f : (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (3\alpha + \gamma, \alpha - \beta + \gamma, -3\alpha - 3\beta + \gamma)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$.
4. Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
5. A-t-on $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$?
6. Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de $\text{Im}(f)$?
7. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \text{Im}(f)$.

Résultat attendu :

1. On remarque que $u = \frac{v+w}{2}$, donc $F = \text{Vect}(v, w)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $av + bw = 0$. Donc $a(1, -1, 3) + b(3, 3, -5) = (0, 0, 0)$, ce qui donne $(a + 3b, -a + 3b, 3a - 5b) = (0, 0, 0)$. En identifiant les coefficients, on trouve $a + 3b = 0$, $-a + 3b = 0$ et $3a - 5b = 0$. Sommer les deux premières donne $6b = 0$ et $a = 3b$, donc $a = b = 0$. Donc (v, w) est une famille libre, donc (v, w) est une base de F .

Rmq : il était possible de retirer un autre vecteur que u , on obtenait alors une base différente.

2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda(x, y, z) + (a, b, c)) = f((\lambda x + a, \lambda y + b, \lambda z + c))$$

$$= (3\lambda x + 3a + \lambda z + c, \lambda x + a - \lambda y - b + \lambda z + c, -3\lambda x - 3a - 3\lambda y - 3b + \lambda z + c)$$

$$= \lambda f((x, y, z)) + f((a, b, c)).$$

Donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $A = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$A \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -3x - 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + z = 0 \\ -2x - y = 0 \\ -6x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3x \\ y = -2x \end{cases} \Leftrightarrow A = x(1, -2, -3) \Leftrightarrow A \in \text{Vect}((1, -2, -3)),$$

où on a effectué $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis constaté que L_3 était multiple de L_2 .

Donc $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -2, -3))$. Comme $(1, -2, -3) \neq (0, 0, 0)$, c'est une famille génératrice et libre de $\text{Ker}(f)$, donc une base de $\text{Ker}(f)$.

4. On a $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f((1, 0, 0)), f((0, 1, 0)), f((0, 0, 1))) = \text{Vect}((3, 1, -3), (0, -1, -3), (1, 1, 1))$ (puisque $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$). Or $(3, 1, -3) = 2(0, -1, -3) + 3(1, 1, 1)$.

Donc $\text{Im}(f) = \text{Vect}((0, -1, -3), (1, 1, 1))$ et la famille $((0, -1, -3), (1, 1, 1))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ (on pouvait aussi faire le choix d'éliminer un autre vecteur).

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on suppose que $a(0, -1, -3) + b(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. Alors par identification des deux premiers coefficients, $b = 0$ et $-a + b = 0$, donc $a = b = 0$. Donc la famille est libre. Donc $((0, -1, -3), (1, 1, 1))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

Rmq : le théorème du rang (prochain chapitre) donnera $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$, ce qui permettra de conclure sans montrer la liberté, en constatant que la famille $((0, -1, -3), (1, 1, 1))$ est génératrice de $\text{Im}(f)$ et à $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ éléments, donc une base.

5. Montrons que la juxtaposition des bases obtenues aux questions précédentes est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on suppose que $a(1, -2, -3) + b(0, -1, -3) + c(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$. L'identification des coefficients donne $a + c = 0$, $-2a - b + c = 0$, $-3a - 3b + c = 0$, donc $a = -c$, $3c - b = 0$ et $4c - 3b = 0$. Donc $a = -c$, $b = 3c$ et $4c - 9c = 0$. Donc $a = b = c = 0$. Donc la famille $((1, -2, -3), (0, -1, -3), (1, 1, 1))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$. Or c'est une famille à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ éléments. Donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
6. On rappelle que $((0, -1, -3), (1, 1, 1))$ est une base de $\text{Im}(f)$ (même si on pouvait aussi raisonner par recherche d'antécédents, ce qui donnerait des calculs similaires).
 — $u = (2, 1, -1) = (0, -1, -3) + 2(1, 1, 1)$, donc $u \in \text{Im}(f)$.
 — Supposons que $v \in \text{Im}(f)$. Donc $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $v = a(0, -1, -3) + b(1, 1, 1)$. Par identification des coefficients, $b = 1$, $b - a = -1$ et $b - 3a = 3$. Donc $b = 1$, $a = 2$ et $a = \frac{-2}{3}$: absurde. Donc $v \notin \text{Im}(f)$.
 — Supposons que $w \in \text{Im}(f)$. Donc $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$ tq $w = a(0, -1, -3) + b(1, 1, 1)$. Par identification des coefficients, $b = 3$, $b - a = 3$ et $b - 3a = -5$. Donc $b = 3$, $a = 0$ et $a = \frac{8}{3}$: absurde. Donc $w \notin \text{Im}(f)$.
7. On sait que $F \cap \text{Im}(f) \subset F$. Or $v \in F$ et $v \notin F \cap \text{Im}(f)$, donc ces ensembles ne sont pas égaux. Donc $\dim(F \cap \text{Im}(f)) < \dim(F) = 2$, on en déduit $\dim(F \cap \text{Im}(f)) \leq 1$.

Par ailleurs $u \in F \cap \text{Im}(f)$ et $u \neq (0, 0, 0)$, donc $\dim(F \cap \text{Im}(f)) \geq 1$.

Donc $\dim(F \cap \text{Im}(f)) = 1$ et u est une base de $F \cap \text{Im}(f)$.

Variante calculatoire : partir de $A \in F \cap \text{Im}(f)$, le traduire en utilisant les bases obtenues aux questions précédentes, et se ramener à une résolution de système linéaire.