

Suites et séries numériques

Suites numériques

Exercice 1 (*)

- Trouver une suite strictement positive de limite nulle qui n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.
- Soit (u_n) une suite strictement positive de limite nulle. Montrer qu'elle admet une sous-suite décroissante.

Exercice 2 (**)

Soit (u_n) une suite réelle telle que $\lim u_n^2 = 1$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| < 1$. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 3 (*)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 0$. Montrer que $\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

Exercice 4 (**)

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ , et (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k u_k$. Montrer que la suite (v_n) converge et déterminer sa limite (s'inspirer de la preuve du théorème de Cesàro).

Exercice 5 (***)

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite ℓ , et $v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$. Montrer que (v_n) converge vers ℓ .

Exercice 6 (*)

Soit (u_n) une suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et de la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

- Étudier l'éventuelle convergence de la suite (u_n) .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $v_n = e^{u_n}$. Montrer que $\lim(v_{n+1} - v_n) = 1$.
- En déduire à l'aide du lemme de l'escalier un équivalent de u_n .

Exercice 7 (*)

Donner la limite puis un équivalent de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Indication : trouver une valeur de α permettant d'appliquer le lemme de l'escalier à la suite $v_n = u_n^\alpha$.

Exercice 8 (**)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$.

- Montrer que pour tout $n \geq 2$ il existe un unique réel x_n dans $]0, 1[$ tel que $P'_n(x_n) = 0$.

Indication : étudier la fonction $x \mapsto \frac{P'_n(x)}{P_n(x)}$.

- Déterminer la limite puis un équivalent de la suite (x_n) .

Exercice 9 (***)

Soit (x_n) une suite réelle, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $y_n = \alpha x_n + \beta x_{n+1}$.

- Montrer que si (y_n) converge vers 0, il en est de même de la suite (x_n) .
- En déduire que si (y_n) converge il en est de même de la suite (x_n) .

Exercice 10 (**)

Soit (z_n) une suite complexe vérifiant la relation $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0 .

Séries à terme général positif

Exercice 11 (*)

Étudier la convergence des séries des termes généraux suivants :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \quad \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} \quad 1 - \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \quad (\operatorname{ch} n)^\alpha - (\operatorname{sh} n)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exercice 12 (**)

Étudier la convergence des séries des termes généraux suivants :

$$e^{-(\ln n)^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \arccos\left(\frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}\right) \quad \arccos\left(\frac{2}{\pi} \arctan(n - 2)\right)$$

Exercice 13 (*)

Pour quelles valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ la série de terme général $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$ est-elle convergente ? Calculer dans ce cas la somme de cette série.

Exercice 14 (*)

Étudier à l'aide du critère de d'Alembert la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^{\ln n}}{n!}$.

Exercice 15 (*)

Discuter en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série $\sum \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!}$.

Exercice 16 (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$. Donner un équivalent simple de $u_{n+1} - u_n$, et en déduire l'existence d'une constante γ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 17 (*)

Soit $\sum u_n$ une série à terme général positif, et $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 18 (*)

Soit (u_n) une suite réelle à valeurs positives. On dit que le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge lorsque la suite des produits partiels $\prod_{k=0}^n (1 + u_k)$ possède une limite finie.

Montrer que le produit infini $\prod (1 + u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 19 (**)

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs; on suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Utiliser une comparaison logarithmique avec une série de Riemann pour prouver la convergence de $\sum u_n$.

Exercice 20 (*)

Une *série de Bertrand* est de la forme $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ avec $\alpha \geq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

- Lorsque $\alpha > 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée converge.
- Lorsque $\alpha < 1$, montrer en utilisant le théorème de comparaison que la série de Bertrand associée diverge.
- Lorsque $\alpha = 1$, montrer en utilisant la technique de comparaison à une intégrale que la série de Bertrand converge si et seulement si $\beta > 1$.

Exercice 21 (***)

Soit (u_n) une suite de réels positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Comparaison à une intégrale

Exercice 22 (*)

En exploitant une comparaison série/intégrale, déterminer la limite : $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 23 (*)

Déterminer un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Exercice 24 (*)

Pour $x > 1$ on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. En comparant $\zeta(x)$ à une intégrale calculer $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x)$.

Séries alternées

Exercice 25 (*)

Pour tout $n \geq 1$ on pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature bien que u_n soit équivalent à v_n .

Exercice 26 (*)

Étudier la convergence des séries de terme général :

$$u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} \text{ avec } \alpha > 0 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \cos(n)} \quad u_n = \frac{(-1)^n}{n - (\ln n)^\alpha}$$

Exercice 27 (**)

Déterminer la nature des séries $\sum \frac{(-1)^n n^{1/n}}{\ln n}$ et $\sum \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$.

Exercice 28 (**)

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sqrt{k}$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Indication : regrouper les termes deux par deux.

Transformation d'Abel

Exercice 29 (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que la série $\sum \frac{H_n}{n(n+1)}$ converge, et en calculer la somme.

Exercice 30 (**)

Soit une suite (u_n) telle que la série $\sum nu_n$ converge. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

Indication. Poser $S_n = \sum_{k=0}^n ku_k$ et exprimer u_n à l'aide des termes de la suite (S_n) .

Exercice 31 (**)

Soit (u_n) une suite réelle positive décroissante, telle que $\sum u_n$ converge.

- Montrer que $nu_{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$, et en déduire que $\lim nu_{2n} = 0$, puis que $\lim nu_n = 0$.
- Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_n - u_{n+1})$ converge et a même somme que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.
- Application.* Calculer pour $0 \leq r < 1$ la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} nr^n$.

Produit de Cauchy

Exercice 32 (**)

Soit $a \in [0, 1[$. Écrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries, et en déduire la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} na^n$. Calculer par la même méthode $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a^n$.