

S6.1 - Propagation d'un signal

Table des matières

1	La notion de signal	2
2	Signal périodique	3
3	Phénomène de battements	4
3.1	Cas des amplitudes égales.	4
3.2	Cas des amplitudes différentes.	6
3.3	Interprétation physique.	7
4	Onde progressive	8
4.1	Expression de l'onde progressive en fonction de t en une position donnée	8
4.1.1	Onde se propageant dans le sens des x croissants	8
4.1.2	Onde se propageant dans le sens des x décroissants	10
4.2	Expression de l'onde en fonction de la position x à un instant donné	12
4.2.1	Onde se propageant dans le sens des x croissants	12
4.2.2	Onde se propageant dans le sens des x décroissants	14
5	Onde progressive sinusoïdale	15
5.1	Définition	15
5.2	Double périodicité spatio-temporelle	16
5.3	Déphase de l'onde entre deux points	18
6	Milieux dispersifs et non dispersifs	18
6.1	Caractérisation des milieux dispersifs et non dispersifs	18
6.2	Exemples de milieux non dispersifs	20
6.2.1	Ondes acoustiques dans un fluide (non dispersif)	20
6.2.2	Ondes longitudinales dans un solide (non dispersif)	21
6.2.3	Ondes électromagnétiques dans le vide (non dispersif)	21
6.3	Exemples de milieux dispersifs	21
6.3.1	Ondes de gravité en eau profonde (dispersif)	21
6.3.2	Ondes électromagnétiques dans un milieu matériel (dispersif)	21

Les signaux étudiés dans ce chapitre sont des ondes. Ces signaux ne sont pas sinusoïdaux dans la majorité des cas, mais ils se décomposent en une superposition de signaux sinusoïdaux et peuvent être représentés par un spectre. Une onde est modélisée par une fonction du temps et d'une variable spatiale. La propagation de l'onde se traduit par une forme mathématique particulière de cette fonction. On étudiera le cas des ondes sinusoïdales qui sont périodiques dans le temps et dans l'espace.

1 La notion de signal

Définition d'un signal

Un signal est une grandeur physique dont la caractéristique permet d'accéder à une information désirée. On appelle **onde un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace au cours du temps**. Toute **grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est le signal physique transporté par l'onde**.

Citons quelques exemples d'ondes :

Les ondes générés à la surface de l'eau par une excitation locale comme l'impact d'un projectile : le signal physique est le déplacement vertical de la surface de l'eau. Les **particules d'eau ont un mouvement vertical sans déplacement longitudinal** et elles retrouvent leur position initiale après le passage de l'onde de sorte que le phénomène n'entraîne aucun déplacement global de l'eau. Le mot onde vient du latin *unda* qui signifie eau.

Il existe des **ondes élastiques se propageant dans les milieux solides**. Le signal transporté par ces ondes est une **déformation locale et réversible de la matière**.

Définition d'une onde transverse ou bien longitudinale

L'onde est dite **transversale** lorsque le mouvement local de la matière est **perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde** et **longitudinale** lorsque le mouvement local de la matière est **parallèle à la direction de propagation de l'onde**.

On peut propager des **ondes transversales dans une corde**. Pour les ondes sismiques, il y a des ondes longitudinales (ondes P qui, lors d'un tremblement de terre, arrivent en premier) et des ondes transversales (ondes S qui arrivent en second).

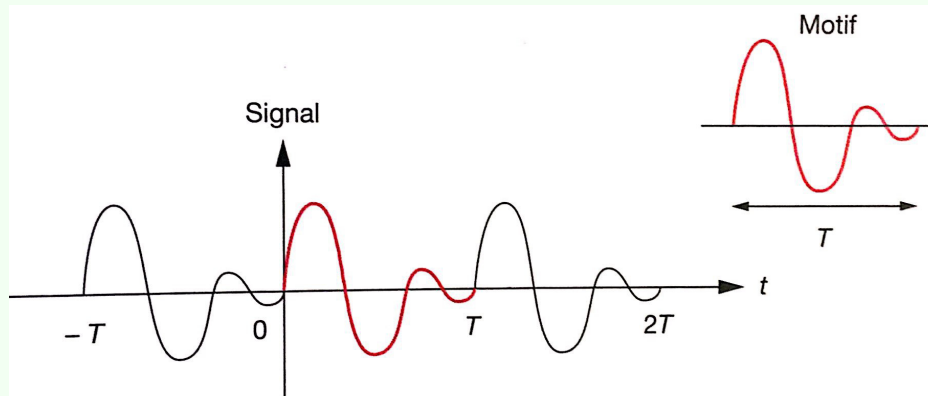
Les **ondes acoustiques se propagent dans tous les milieux matériels, solides ou fluides**. Dans un solide il s'agit d'ondes élastiques longitudinales. Dans un fluide, la perturbation est une modification très faible de la pression due à un mouvement longitudinal imperceptible des couches de fluide. Les signaux transportés par l'onde acoustique sont la variation de pression par rapport à l'état de repos, appelée surpression acoustique, et la vitesse de vibration des molécules. Les microphones sont sensibles à l'un ou l'autre de ces signaux.

À la différence des exemples précédents, **les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager**. Les deux grandeurs physiques associées à ces ondes sont un champ électrique et un champ magnétique. La lumière est une onde électromagnétique.

2 Signal périodique

Définition de la période d'un signal (rappel)

La période d'un signal est la plus petite durée T de répétition d'un motif :



Le nombre de période par seconde est appelé fréquence f du signal périodique :

$$f = \frac{1}{T}$$

La fréquence des signaux manipulés en physique varie dans de très grandes proportions. Évoquons quelques exemples, empruntés à la vie courante ou au domaine des travaux pratiques de laboratoire.

La **fréquence des signaux acoustiques audibles court de quelques dizaines de hertz à une quinzaine de kilohertz**, cette dernière valeur étant très variable selon l'âge de l'auditeur et l'usage plus ou moins raisonnable qu'il fait de son audition ! Mais d'une application à l'autre, l'intervalle varie beaucoup selon la qualité musicale requise : **la norme HiFi** (pour high fidelity) retient par exemple la plage **[20 Hz, 20 kHz]**, elle vise une très bonne restitution de la qualité sonore ; en téléphonie en revanche, le souhait de limiter la plage allouée à chaque communication, en vue d'en transmettre un grand nombre sur les mêmes équipements, conduit à restreindre très fortement cette plage.

Dans le domaine électromagnétique, les ordres de grandeur rencontrés s'étalent dans une très grande plage :

La fréquence des signaux assurant le transport de l'**énergie électrique** sur les lignes à haute tension n'est que des quelques dizaines de hertz (**50 Hz en Europe**).

Le transport des signaux radiophoniques utilise des **ondes radio**, dont la fréquence porteuse est de l'ordre de la **centaine de mégahertz (bande FM)**.

La **téléphonie portable** utilise des ondes de fréquences beaucoup plus élevées, autour du gigahertz : de **900 MHz, 1 800 MHz, 2 100 MHz**.

la technique **wifi** exploite des fréquences de **2,4 GHz et 5 GHz**. Les choix de fréquence sont d'une part historiques, puisqu'un nouveau système ne doit pas perturber un dispositif déjà existant, mais résultent également de critères techniques. On précisera ultérieurement la notion de longueur d'onde, qui joue un rôle essentiel dans les propriétés des systèmes utilisant des antennes. La définition d'une bande de fréquence allouée à une application est du ressort de la loi, car il s'agit d'un partage du domaine public.

Les ondes **optiques visibles**, qui sont des ondes électromagnétiques, ont des fréquences variant dans un **intervalle relativement étroit autour de** $5 \cdot 10^{14}$ Hz, que l'on note **500 THz**. Les domaines adjacents, infrarouge et ultraviolet, sont également exploités par de nombreuses applications, mettant également en jeu la notion de signal telle qu'elle est définie ici.

Tous ces domaines font l'objet d'applications et de manipulations au laboratoire. Chacune requiert une technique particulière : créer et détecter un signal optique n'utilise pas les mêmes instruments que manipuler une onde sonore. Ajoutons l'intervalle spectral des manipulations électriques utilisant un **générateur de signaux** et un oscilloscope. On travaille commodément avec des signaux dont la fréquence va de **la dizaine de hertz à la dizaine de megahertz** (10 Hz à 10^7 Hz).

3 Phénomène de battements

On considère la superposition de deux signaux sinusoïdaux de pulsations $\omega_1 = 2\pi f_1$ et $\omega_2 = 2\pi f_2$, avec $f_2 > f_1$ et f_2 proche de f_1 :

$$s(t) = \underbrace{A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)}_{s_1(t)} + \underbrace{A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)}_{s_2(t)}$$

3.1 Cas des amplitudes égales.

On commence par le cas $A_1 = A_2 = A$. Pour alléger l'écriture, on pose $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, on pourrait garder les phases, le résultat final est le même à une constante de phase près. On a réalisé une simulation représentée sur la figure 1 en prenant un $A_1 = A_2 = A = 1$.

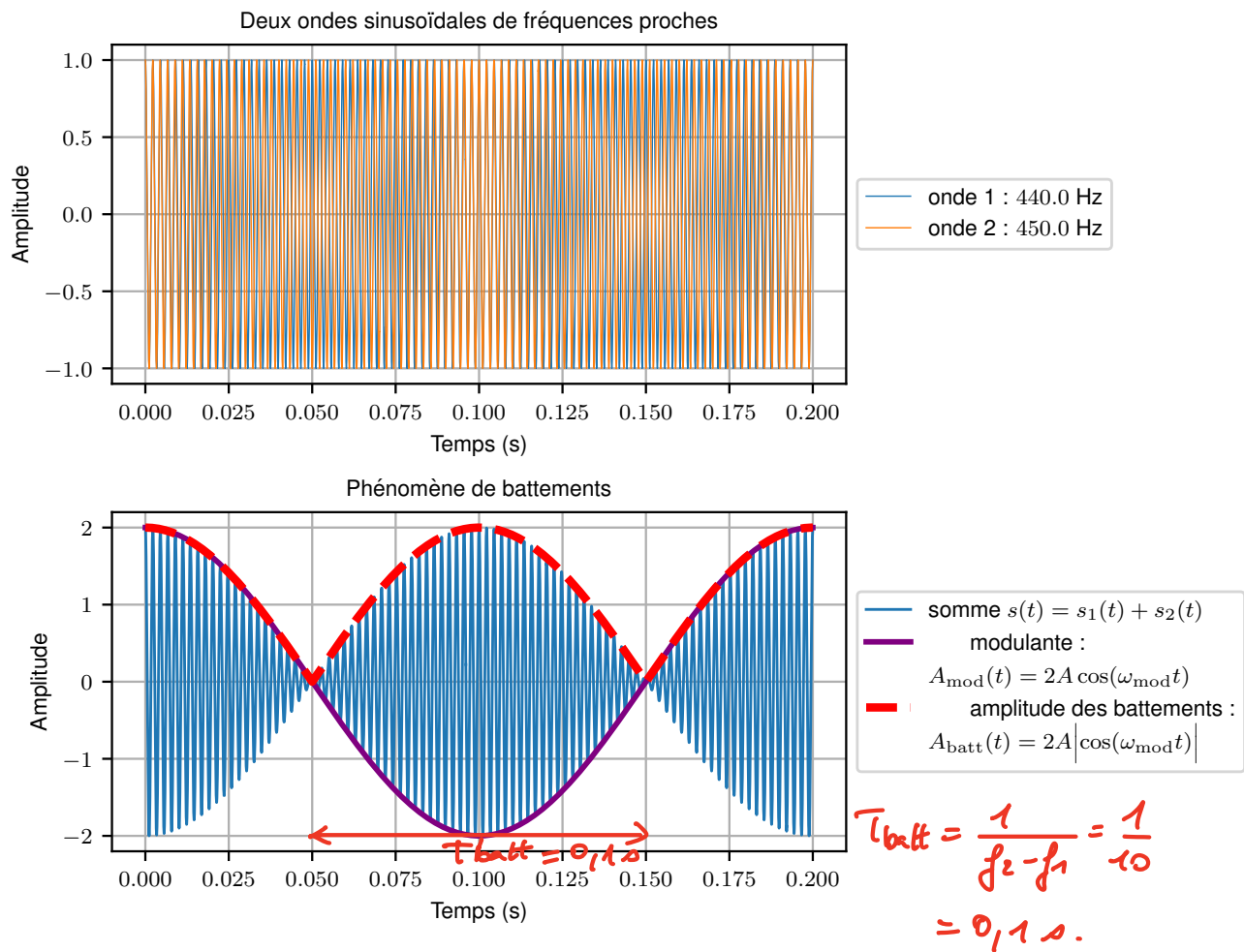


Figure 1 – Phénomène de battement pour deux ondes de même amplitude

On a alors

$$s(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

En utilisant l'identité trigonométrique

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

on obtient

$$s(t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right)$$

On définit alors :

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (\text{pulsation moyenne}), \quad \omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \quad (\text{pulsation de modulation}).$$

Le signal peut donc s'écrire sous la forme $A_{\text{mod}}(t)$

$$s(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_m t)$$

Il s'agit d'un signal sinusoïdal de pulsation ω_m , multiplié par une fonction modulante

$$A_{\text{mod}}(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t)$$

qui varie lentement au cours du temps si $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_m$, c'est le cas lorsque les deux fréquences f_1 et f_2 sont proches.

Par définition, l'amplitude d'un signal doit être positive ; on introduit donc l'amplitude des battements

$$A_{\text{batt}}(t) = 2A |\cos(\omega_{\text{mod}} t)|$$

La fonction $\cos(\omega_{\text{mod}} t)$ est périodique de période

$$T_{\text{mod}} \triangleq \frac{2\pi}{\omega_{\text{mod}}} \implies f_{\text{mod}} \triangleq \frac{1}{T_{\text{mod}}} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{2\pi}$$

La valeur absolue $|\cos(\omega_{\text{mod}} t)|$ possède la période de $\cos(\omega_{\text{mod}} t)$ divisée par deux, donc la période des battements vaut

$$T_{\text{batt}} = \frac{T_{\text{mod}}}{2} = \frac{\pi}{\omega_{\text{mod}}} \implies f_{\text{batt}} \triangleq \frac{1}{T_{\text{batt}}} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{\pi} = 2f_{\text{mod}}$$

Or, par définition,

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} \implies f_{\text{mod}} = \frac{f_2 - f_1}{2}$$

d'où, finalement,

$$f_{\text{batt}} = 2f_{\text{mod}} = f_2 - f_1$$

Le signal résultant présente donc une oscillation rapide à la pulsation ω_m dont l'amplitude croît et décroît périodiquement à la fréquence

$$f_{\text{batt}} = f_2 - f_1$$

3.2 Cas des amplitudes différentes.

Si $A_1 \neq A_2$, on retrouve une structure similaire mais l'amplitude de $s(t)$ ne s'annule plus complètement. On a réalisé une simulation représentée sur la figure 2 en prenant un $A_1 = 1,5$ et $A_2 = 0,5$.

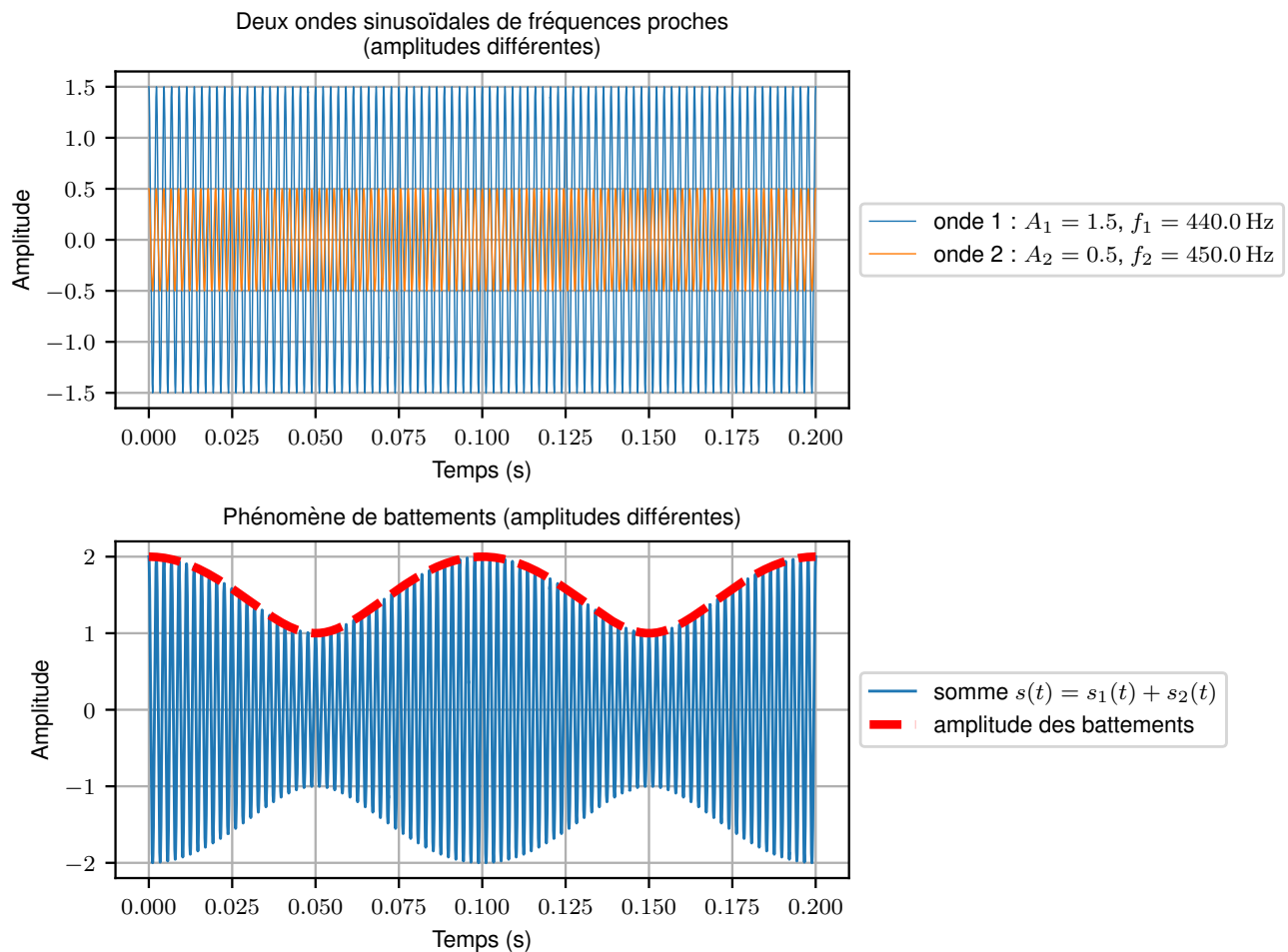


Figure 2 – Phénomène de battement pour deux ondes d'amplitudes différentes

En reprenant le calcul avec

$$s(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t)$$

L'amplitude instantanée du signal varie entre une valeur minimale, obtenue lorsque les deux signaux sont en opposition de phase :

$$A_{\min} = |A_1 - A_2|$$

et une valeur maximale, obtenue lorsque les deux signaux sont en phase :

$$A_{\max} = A_1 + A_2$$

et ceci avec la *même* fréquence de battement :

$$f_{\text{batt}} = f_2 - f_1$$

3.3 Interprétation physique.

Dans le cas d'ondes sonores, ce phénomène est directement perceptible à l'oreille. Par exemple, la superposition de deux sons de fréquences $f_1 = 440$ Hz et $f_2 = 441$ Hz produit un son de hauteur voisine de 440 Hz, dont l'intensité sonore est modulée à la fréquence

$$f_{\text{batt}} = f_2 - f_1 = 1 \text{ Hz}$$

on dit que le son « bat » un fois par seconde, d'où le nom de *battements*.

4 Onde progressive

Pour modéliser le phénomène de propagation, on introduit dans ce paragraphe l'onde progressive à une dimension, qui se propage sans atténuation ni déformation à la vitesse constante c dans la direction d'un axe (Ox) dans un sens ou dans l'autre. Cette onde est représentée mathématiquement par une fonction $s(x, t)$ de deux variables : la coordonnée x selon l'axe (Ox) et le temps t .

$s(x, t)$ est la valeur du signal, mesurée à l'abscisse x , à l'instant t . On notera indifféremment $s(M, t)$ ou $s(x, t)$ la valeur du signal qui se propage (ou onde) en $M(x)$ à l'instant t . Soit la fonction

$$f : u \mapsto -Au \exp\left(-\left(\frac{u}{B}\right)^2\right) \quad \text{avec} \quad A = 2 \text{ cm.s}^{-1} \text{ et } B = 1 \text{ s}$$

qui caractérise la forme du signal, bien entendu cette fonction dépend de la forme du signal et peut revêtir des expressions diverses et variées. Nous avons choisi la fonction f pour obtenir un signal qui ressemble à une impulsion se propageant sur une corde.

On suppose que l'on connaît l'expression du signal en O en fonction du temps, par exemple parce-que c'est en ce point que nous avons généré ce signal mais pas nécessairement car il peut avoir été généré à un autre endroit :

$$s(O, t) = s(0, t) = f(t) = -At \exp\left(-\left(\frac{t}{B}\right)^2\right) = -2t \exp(-t^2)$$

où $s(0, t)$ est exprimé en cm quand t est exprimé en s. On considérera le cas où l'onde progresse dans le sens positif de (Ox) et le cas où elle progresse dans le sens négatif de (Ox) .

4.1 Expression de l'onde progressive en fonction de t en une position donnée

4.1.1 Onde se propageant dans le sens des x croissants

On considère une onde progressive, se propageant avec la célérité c dans la direction de l'axe (Ox) et dans le sens positif de cet axe, c'est-à-dire vers les x croissants. La figure 3 représente le signal mesuré à une abscisse $x_0 = 0$ en fonction du temps, ainsi que le signal mesuré à une abscisse $x > x_0 = 0$ en fonction du temps.

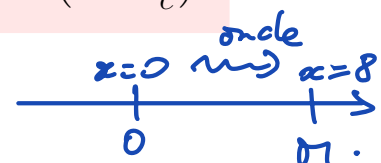
Le signal se propageant sans déformation à la vitesse c dans le sens des x croissants, le retard temporel dû à la propagation du signal de $O(x_0 = 0)$ à $M(x > 0)$ vaut $\tau = \frac{OM}{c}$. La valeur du signal en $M(x)$ à l'instant t est donc égale à la valeur du signal qui était en $O(x_0 = 0)$ à l'instant antérieur $t' = t - \frac{OM}{c} = t - \frac{x}{c}$ car $OM = x > 0$:

$$s_{\oplus}(M, t) = s_{\oplus}\left(O, t - \frac{OM}{c}\right) \Leftrightarrow s_{\oplus}(x, t) = s_{\oplus}\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

avec $t' = t - \tau \Leftrightarrow t = t' + \tau$, on peut aussi écrire :

$$s_{\oplus}(x, t' + \tau) = s_{\oplus}(0, t')$$

$\downarrow$
 $x=0$



autrement dit, la valeur du signal en $O(x_0 = 0)$ à l'instant t' se retrouve en $M(x > 0)$ à l'instant $t' + \tau = t' + \frac{OM}{c}$.

Ainsi, les valeurs du signal observées en $x_0 = 0$ au cours du temps sont observées aussi en $x > 0$, mais avec un retard τ qui s'écrit :

$$\tau = \frac{x - x_0}{c} = \frac{x}{c}$$

temps mis pour aller de O à M .

On en déduit :

$$s_{\oplus}(x, t) = s_{\oplus}(M, t) = s_{\oplus}(O, t - \tau) = s_{\oplus}(O, t') = f(t') = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$t' = t - \tau$

Propriété

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox) , dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante

$$s_{\oplus}(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

où f est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

Signal $s_{\oplus}(x, t)$ en fonction de t en différentes positions

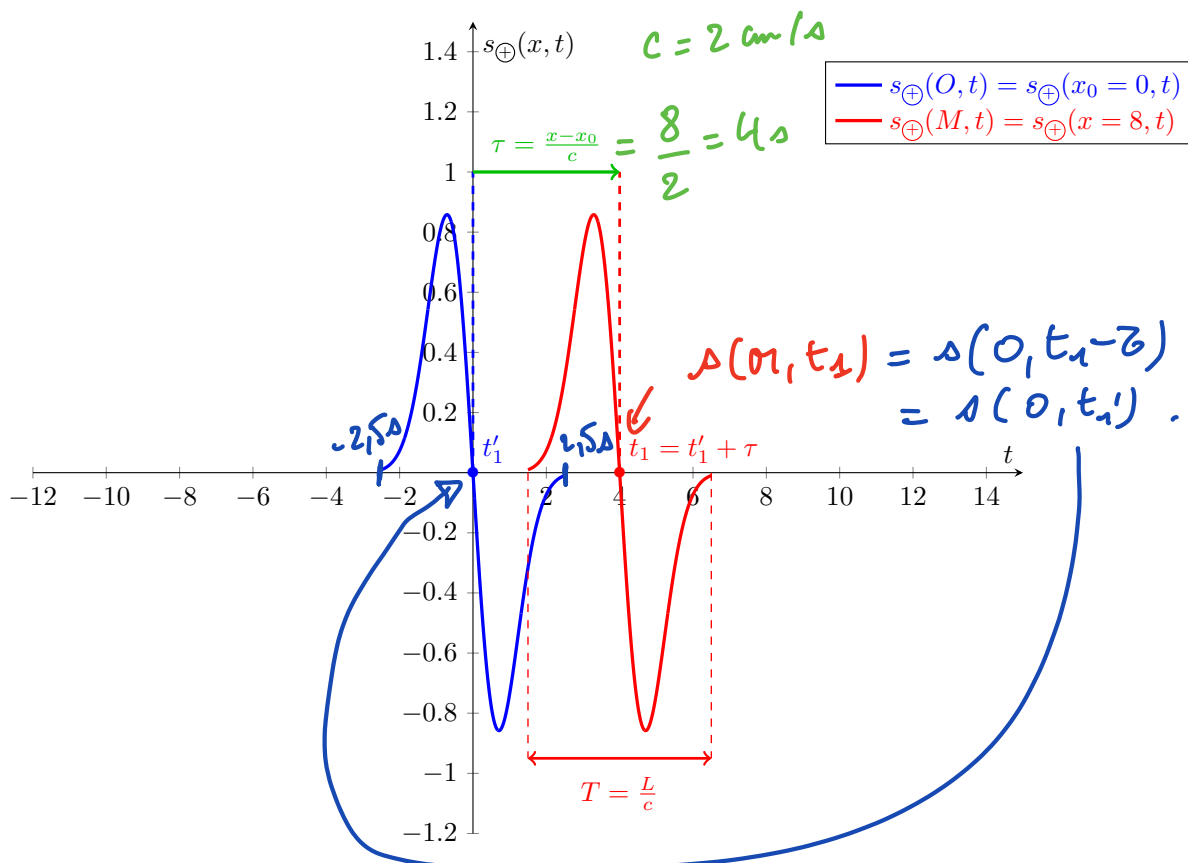


Figure 3 – Signal se propageant dans le sens des x croissants en fonction du temps t

Pour illustrer ce propos, nous avons tracé le signal précédent sur la figure 3, pour lequel on a choisi une vitesse de propagation $c = 2 \text{ m.s}^{-1}$. Le signal est représenté en deux positions

distinctes $O(x_0 = 0)$ et $M(x = 8)$ en fonction du temps t .

Si on prend par exemple l'instant $t = t_1 = 4\text{ s}$ (qui correspond à la date du passage du milieu de l'impulsion en $M(x = 8)$), on peut vérifier graphiquement que :

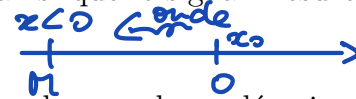
$$s_{\oplus}(M, t_1) = s_{\oplus}(x, t_1) = s_{\oplus}(0, t_1 - \tau) = s_{\oplus}(0, t'_1)$$

avec $t'_1 = t_1 - \tau \Leftrightarrow t_1 = t'_1 + \tau$, on peut aussi écrire :

$$s_{\oplus}(x, t'_1 + \tau) = s_{\oplus}(0, t'_1)$$

4.1.2 Onde se propageant dans le sens des x décroissants

On considère une onde progressive, se propageant avec la célérité c dans la direction de l'axe (Ox) et dans le sens négatif de cet axe, c'est-à-dire vers les x décroissants. La figure 4 représente le signal mesuré à une abscisse $x_0 = 0$ en fonction du temps, ainsi que le signal mesuré à une abscisse $x < x_0 = 0$ en fonction du temps.

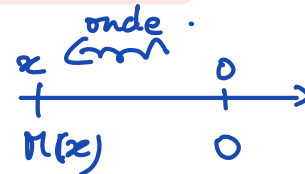


Le signal se propageant sans déformation à la vitesse c dans le sens des x décroissants, le retard temporel dû à la propagation du signal de $O(x_0 = 0)$ à $M(x < 0)$ vaut $\tau = \frac{OM}{c}$. La valeur du signal en $M(x)$ à l'instant t est donc égale à la valeur du signal qui était en $O(x_0 = 0)$ à l'instant antérieur $t' = t - \frac{OM}{c} = t + \frac{x}{c}$ car $OM = -x > 0$:

$$s_{\ominus}(M, t) = s_{\ominus}\left(O, t - \frac{OM}{c}\right) \Leftrightarrow s_{\ominus}(x, t) = s_{\ominus}\left(0, t + \frac{x}{c}\right)$$

avec $t' = t - \tau \Leftrightarrow t = t' + \tau$, on peut aussi écrire :

$$s_{\ominus}(x, t' + \tau) = s_{\ominus}(0, t')$$



autrement dit, la valeur du signal en $O(x_0 = 0)$ à l'instant t' se retrouve en $M(x < 0)$ à l'instant $t' + \tau = t + \frac{OM}{c}$.

Ainsi, les valeurs du signal observées en $x_0 = 0$ au cours du temps sont observées aussi en $x < 0$, mais avec un retard τ qui s'écrit :

$$\tau = \frac{x_0 - x}{c} = -\frac{x}{c}$$

On en déduit :

$$s_{\ominus}(x, t) = s_{\ominus}(M, t) = s_{\ominus}(O, t - \tau) \stackrel{\text{car } \tau = -\frac{x}{c}}{\downarrow} = s_{\ominus}(0, t') = f(t') = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

Propriété

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox) , dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante :

$$s_{\ominus}(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où g est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

Signal $s_{\ominus}(x, t)$ en fonction de t en différentes positions

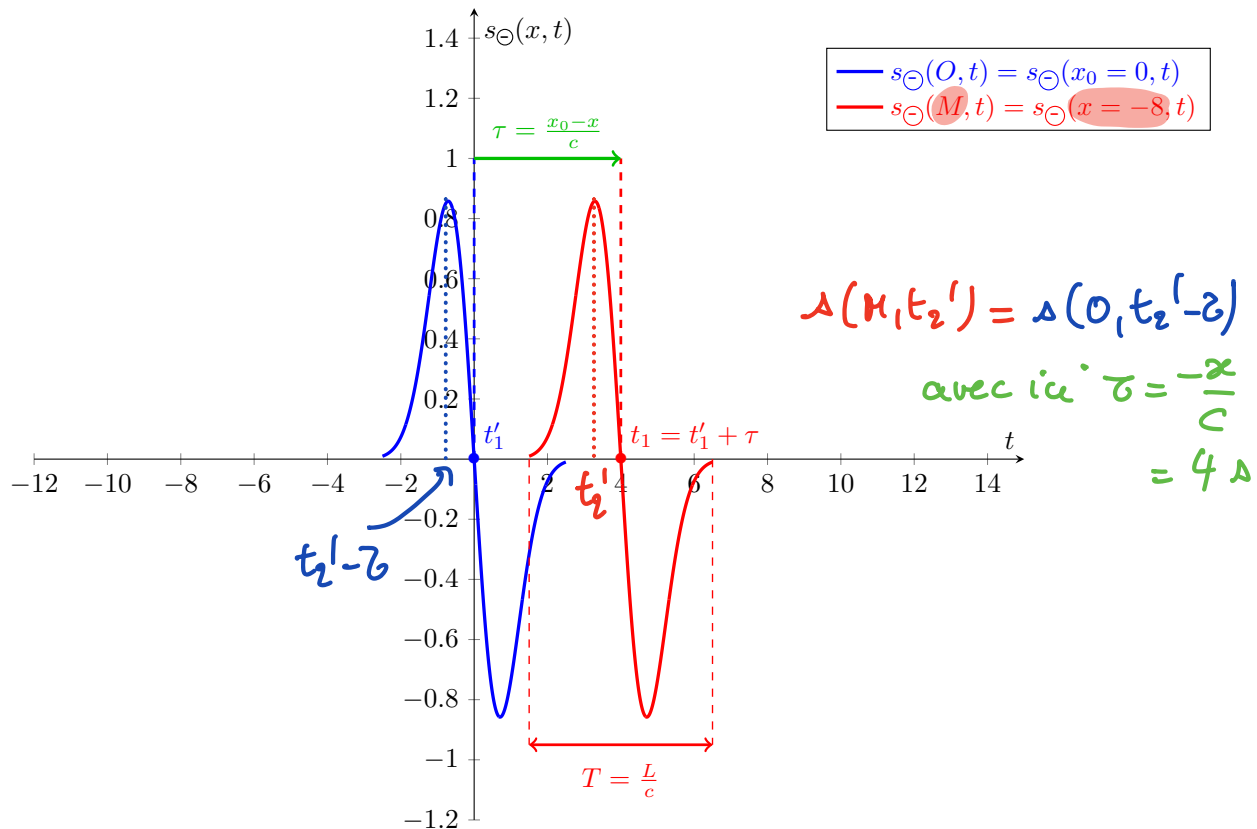


Figure 4 – Signal se propageant dans le sens des x décroissants en fonction du temps t

Pour illustrer ce propos, nous avons tracé le signal précédent sur la figure 4, pour lequel on a choisi une vitesse de propagation $c = 2 \text{ m.s}^{-1}$. Le signal est représenté en deux positions distinctes $O(x_0 = 0)$ et $M(x = -8)$ en fonction du temps t .

Si on prend par exemple l'instant $t = t_1 = 4 \text{ s}$ (qui correspond à la date du passage du milieu de l'impulsion en $M(x = -8)$), on peut vérifier graphiquement que :

$$s_{\ominus}(M, t_1) = s_{\ominus}(x, t_1) = s_{\ominus}(0, t_1 - \tau) = s_{\ominus}(0, t'_1)$$

avec $t'_1 = t_1 - \tau \Leftrightarrow t_1 = t'_1 + \tau$, on peut aussi écrire :

$$s_{\ominus}(x, t'_1 + \tau) = s_{\ominus}(0, t'_1)$$

4.2 Expression de l'onde en fonction de la position x à un instant donné

4.2.1 Onde se propageant dans le sens des x croissants

Signal $s_{\oplus}(x, t)$ en fonction de x à différents instants

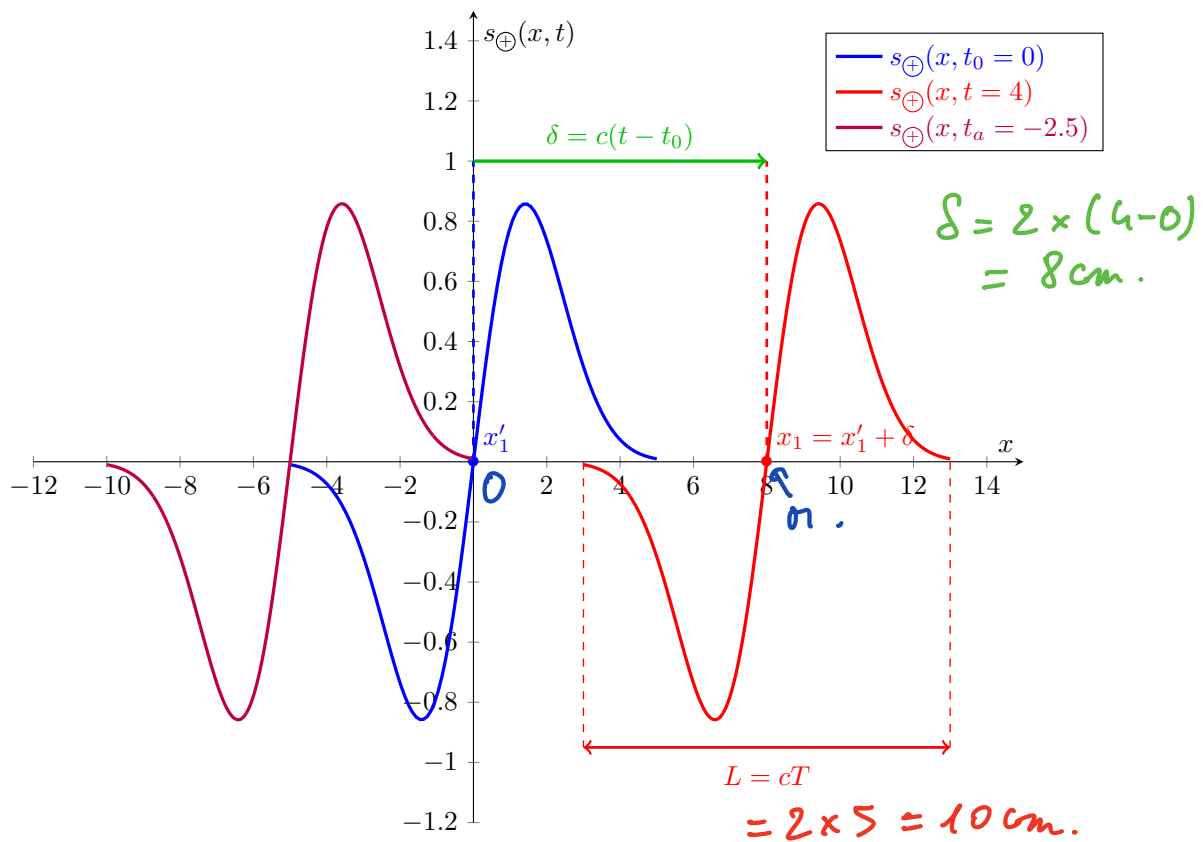


Figure 5 – Signal se propageant dans le sens des x croissants en fonction de la position x

La figure 5 représente les valeurs du signal à deux instants différents t_0 et $t > t_0$ pour la même onde que dans la section 4.1.1.

Entre les instants t_0 et t , l'onde qui progresse dans le sens positif de l'axe (Ox) se déplace d'une distance δ dans le sens des x croissants. L'onde se propage à la vitesse c donc on a :

$$\delta = c(t - t_0)$$

On remarque que :

$$s_{\oplus}(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = f\left(t_0 - \frac{x - c(t - t_0)}{c}\right)$$

Handwritten notes: $= s_{\oplus}(0, t - \frac{x}{c})$ and S above the fraction.

$$s_{\oplus}(x, t) = f\left(t_0 - \frac{x'}{c}\right) = s(x', t_0) \quad \text{avec } x' = x - c(t - t_0) = x - \delta$$

Ainsi la valeur observée à l'instant t en x fut observée à l'instant $t_0 < t$ en $x' = x - \delta$:

$$s_{\oplus}(x, t) = s_{\oplus}(x - \delta, t_0)$$

Si on l'écrit en posant $t_0 = 0$, on obtient alors :

$$s_{\oplus}(x, t) = s_{\oplus}(x - ct, 0)$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable $x - ct$. Pour simplifier l'écriture on le note $F(x - ct)$. En conclusion :

Propriété de l'onde se propageant dans le sens des x croissants

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox) , dans le sens positif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante :

$$s_{\oplus}(x, t) = F(x - ct)$$

où F est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

Dans les cas de notre exemple d'onde :

$$s_{\oplus}(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = -A \left(t - \frac{x}{c}\right) \exp\left(-\frac{1}{B^2} \left(t - \frac{x}{c}\right)^2\right)$$

$$\text{ou } t - \frac{x}{c} = -\frac{1}{c} (x - ct)$$

$$\Leftrightarrow s_{\oplus}(x, t) = \frac{A}{c} (x - ct) \exp\left(-\frac{1}{B^2 c^2} (x - ct)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow s_{\oplus}(x, t) = F(x - ct) \quad \text{avec} \quad F : u \mapsto \frac{Au}{c} \exp\left(-\frac{u^2}{B^2 c^2}\right)$$

4.2.2 Onde se propageant dans le sens des x décroissants

Signal $s_{\ominus}(x, t)$ en fonction de x à différents instants

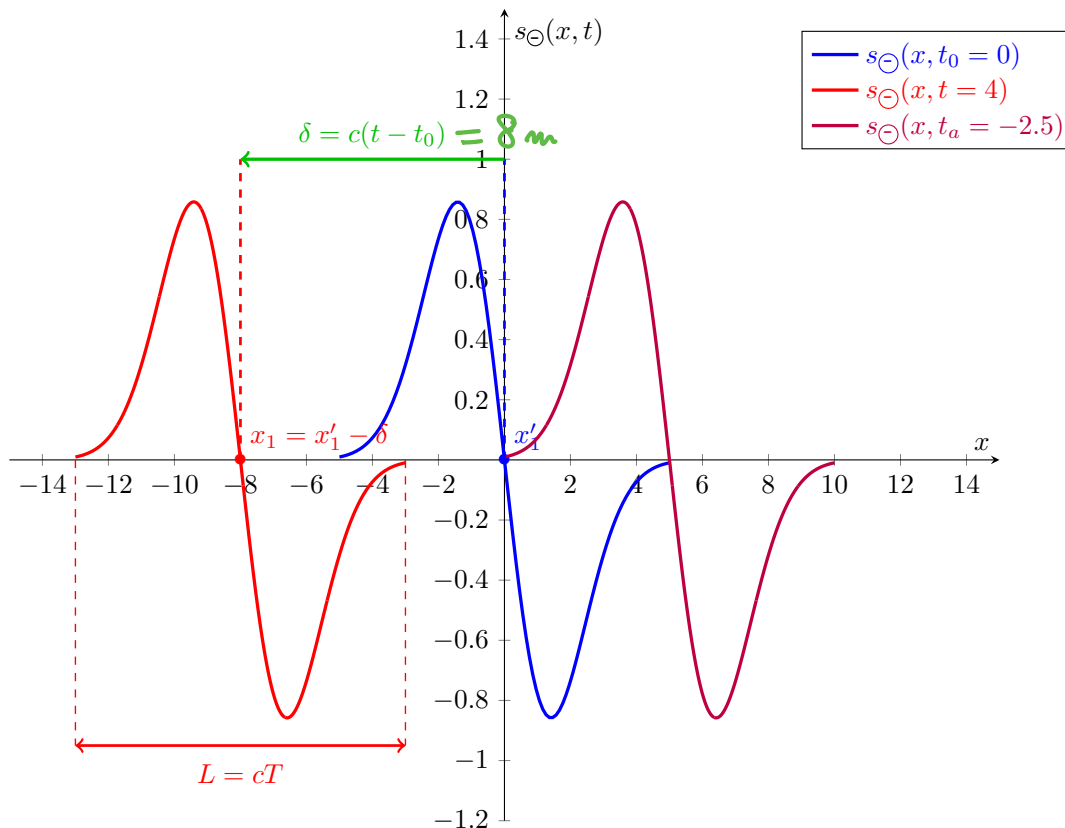


Figure 6 – Signal se propageant dans le sens des x décroissants en fonction de la position x

La figure 6 représente les valeurs du signal à deux instants différents t_0 et $t > t_0$ pour la même onde que dans la section 4.1.2.

Entre les instants t_0 et t , l'onde qui progresse dans le sens négatif de l'axe (Ox) se déplace d'une distance δ dans le sens des x décroissants. L'onde se propage à la vitesse c donc on a :

$$\delta = c(t - t_0)$$

On remarque que :

$$s_{\ominus}(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) = f\left(t_0 + \frac{x + c(t - t_0)}{c}\right)$$

$$s_{\ominus}(x, t) = f\left(t_0 + \frac{x'}{c}\right) = s_{\ominus}(x', t_0) \quad \text{avec} \quad x' = x + c(t - t_0) = x + \delta$$

Ainsi la valeur observée à l'instant t en x fut observée à l'instant $t_0 < t$ en $x' = x + \delta$:

$$s_{\ominus}(x, t) = s_{\ominus}(x + \delta, t_0) \quad \text{ou encore} \quad s_{\ominus}(x' - \delta, t) = s_{\ominus}(x', t_0)$$

Si on l'écrit en posant $t_0 = 0$, on obtient alors :

$$s_{\ominus}(x, t) = s_{\ominus}(x + ct, 0)$$

Le membre de droite de cette équation est simplement une fonction d'une seule variable $x + ct$. Pour simplifier l'écriture on le note $G(x + ct)$. En conclusion :

Propriété de l'onde se propageant dans le sens des x croissants

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox) , dans le sens négatif de cet axe, sans atténuation ni déformation, est de la forme mathématique suivante :

$$s_{\ominus}(x, t) = G(x + ct)$$

où G est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

Dans les cas de notre exemple d'onde :

$$s_{\ominus}(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) = -A\left(t + \frac{x}{c}\right) \exp\left(-\frac{1}{B^2}\left(t + \frac{x}{c}\right)^2\right)$$

$ou \quad t + \frac{x}{c} = \frac{1}{c}(x + ct)$

$$\Leftrightarrow s_{\ominus}(x, t) = -\frac{A}{c}(x + ct) \exp\left(-\frac{1}{B^2 c^2}(x + ct)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow s_{\ominus}(x, t) = G(x + ct) \quad \text{avec} \quad G : u \mapsto -\frac{Au}{c} \exp\left(-\frac{u^2}{B^2 c^2}\right)$$

5 Onde progressive sinusoïdale

Dans ce paragraphe on considère une onde progressive se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) , sans déformation ni atténuation. Cette onde aura une forme particulière : elle sera sinusoïdale.

5.1 Définition

On parle d'onde sinusoïdale, ou encore d'onde harmonique, lorsque le signal mesuré en tout point est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω , indépendante du point. Une telle onde a la forme mathématique suivante :

$$s(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi(x))$$

où $A(x)$ est l'amplitude de l'onde au point d'abscisse x , si l'onde se propage sans atténuation alors cette amplitude ne dépend pas de x et elle est la même en x et à l'origine, on la notera simplement $A(x) = A(0) = A_0$.

$\varphi(x)$ est la phase initiale de l'onde en ce même point. On notera $\varphi(0) = \varphi_0$ la phase initiale à l'origine O de l'axe (Ox) .

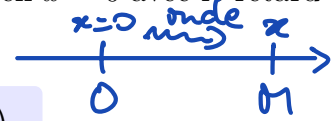
On suppose pour la suite que l'on connaît l'expression de l'onde en $O(x = 0)$ en fonction du temps t :

$$s_{\oplus}(0, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

5.2 Double périodicité spatio-temporelle

L'onde se propageant sans atténuation ni déformation dans le sens positif de (Ox) , la vibration observée à toute abscisse $x > 0$ reproduit la vibration observée en $x = 0$ avec le retard de propagation $\tau = \frac{x}{c}$. on a donc :

$$s_{\oplus}(x, t) = s_{\oplus}(0, t - \tau) = A_0 \cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right)$$



On retiendra ce résultat sous la forme suivante :

$$\text{avec } \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = \omega t - \frac{\omega}{c} x.$$

Propriété

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation ω se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) avec la vitesse c a pour expression :

$$s_{\oplus}(x, t) = A_0 \cos (\omega t - kx + \varphi_0) \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}$$

- A_0 est l'amplitude de l'onde
- φ_0 est sa phase initiale à l'origine
- ω est appelée pulsation de l'onde
- la période temporelle de l'onde est $T = \frac{2\pi}{\omega}$
- $\vec{k} = k\vec{e}_x$ est le vecteur d'onde et k est le module de ce vecteur d'onde, que le note souvent abusivement vecteur d'onde
- la période spatiale de l'onde est $\lambda = \frac{2\pi}{k} \Leftrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Ainsi l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale à la fois :

- du temps (pour x fixé), avec une pulsation temporelle ω
- de la variable spatiale x (pour t fixé), avec une pulsation spatiale k

On parle de la double périodicité spatio-temporelle de l'onde.

De même que la période temporelle est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La période spatiale est la **longueur d'onde** : $k = \omega/c$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} = cT$$

La fréquence spatiale est le **nombre d'onde** :

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

On peut noter l'onde de la façon suivante pour faire apparaître clairement les périodes spatiale et temporelle :

$$s_{\oplus}(x, t) = A_0 \cos \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right)$$

Pour illustrer ce propos, nous allons tracer l'onde sinusoïdale précédente avec $A_0 = 0,8$, $\varphi_0 = 0$, $T = 4\text{ s}$, $c = 2\text{ m.s}^{-1}$. On en déduit que $\lambda = cT = 8\text{ m}$.

◇ Dans un premier temps, on peut tracer l'onde en fonction de t en différentes positions comme sur la figure 7 :

Signal $s_{\oplus}(x, t)$ en fonction de t en différentes positions

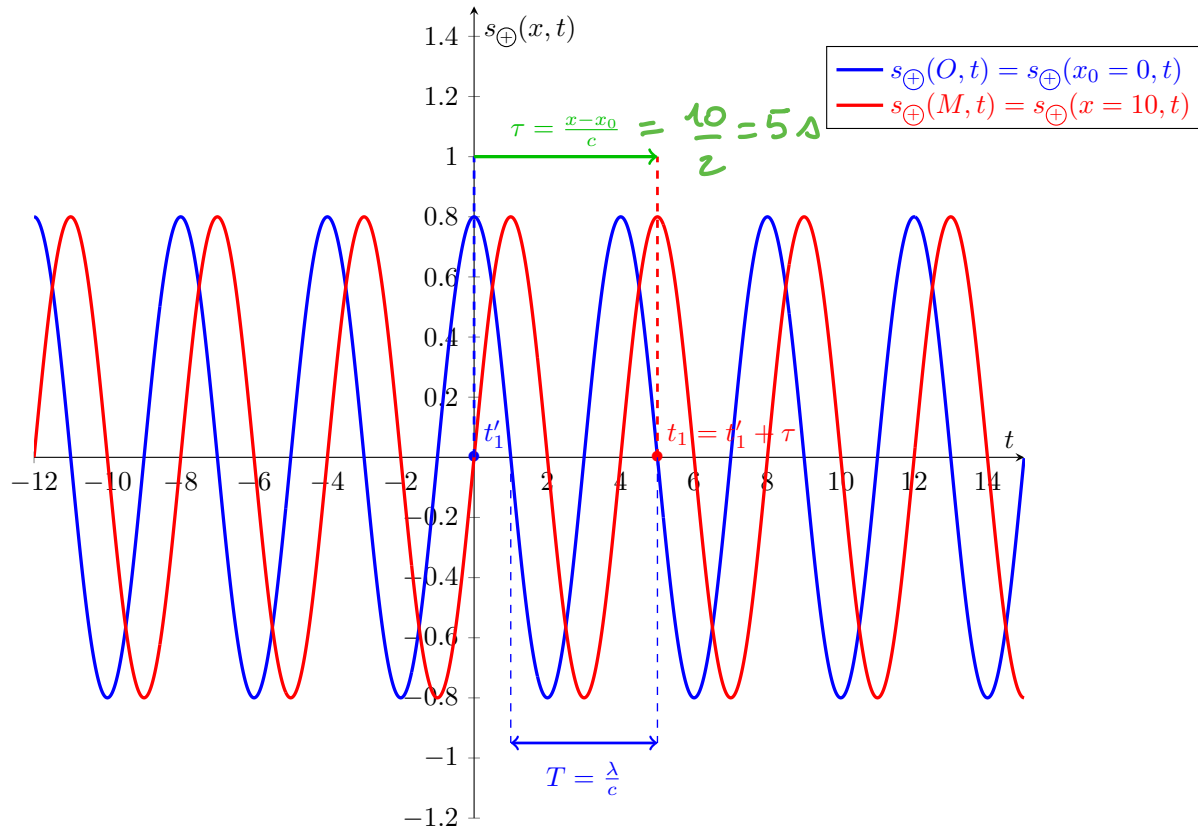
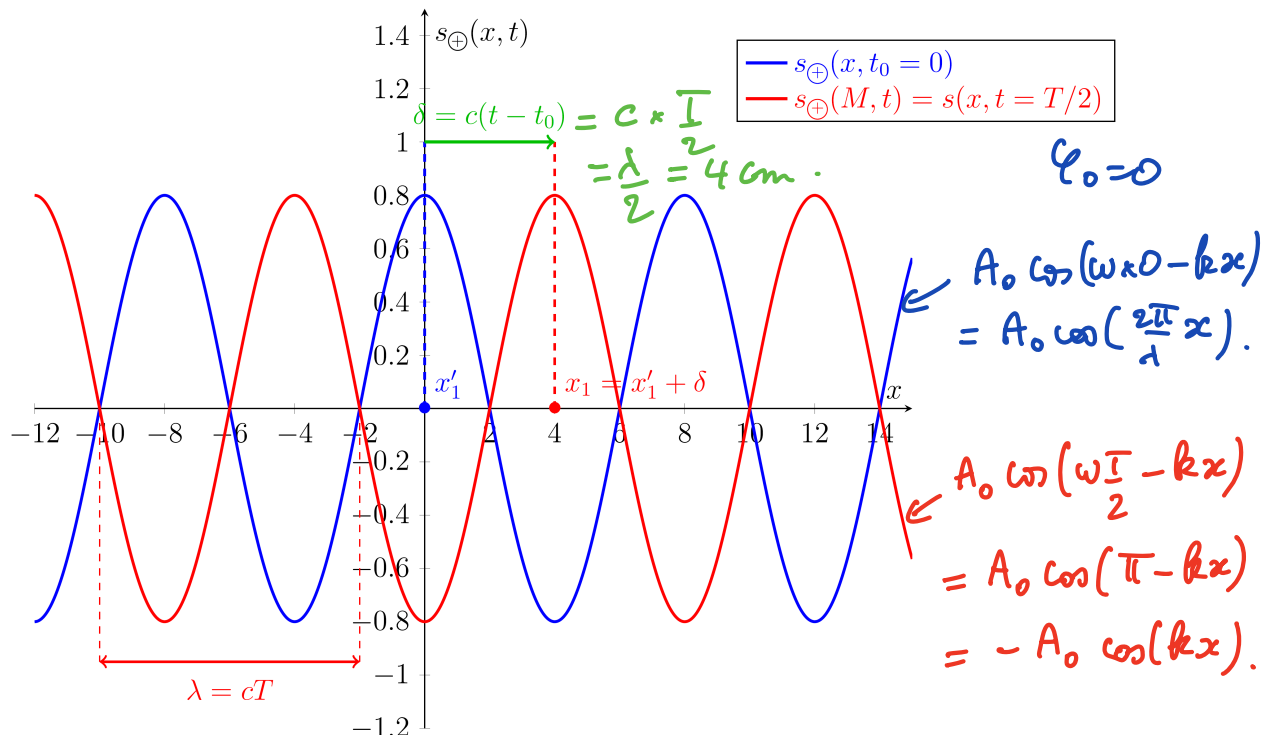


Figure 7 – Signal sinusoïdal se propageant dans le sens des x croissants en fonction du temps

◇ Dans un second temps, on peut tracer l'onde en fonction de x en différents instants :

Signal $s_{\oplus}(x, t)$ en fonction de x en différentes instants



5.3 Déphasage de l'onde entre deux points

La phase initiale de l'onde à l'abscisse x est :

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

avec $s(x, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi(x))$

Le déphasage, noté $\Delta\varphi$, de l'onde en x_2 par rapport à l'onde en x_1 s'écrit donc :

$$\Delta\varphi = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)$$

- ◇ Si $x_2 - x_1 = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $\Delta\varphi = -2n\pi$ et l'onde en x_2 est en phase avec l'onde en x_1 .
- ◇ Si $x_2 - x_1 = n\lambda + \frac{\lambda}{2} = (n + \frac{1}{2})\lambda$ avec $n \in \mathbb{N}$ alors $\Delta\varphi = -(2n + 1)\pi$ et l'onde en x_2 est en opposition de phase avec l'onde en x_1 .

6 Milieux dispersifs et non dispersifs

6.1 Caractérisation des milieux dispersifs et non dispersifs

On distingue deux grandes catégories de milieux pour la propagation d'une onde progressive sinusoïdale : les *milieux non dispersifs* et les *milieux dispersifs*.

Définition d'un milieu dispersif ou non dispersif

Un milieu est dit **non dispersif** lorsque la vitesse de phase $v_{\varphi} = \omega/k$ d'une onde sinusoïdale est *indépendante* de sa pulsation ω . $\Rightarrow v_{\varphi} = c \quad \forall \omega$.
 Dans le cas contraire, lorsque v_{φ} dépend de ω ou de k , le milieu est dit **dispersif**.

◇ Dans un **milieu non dispersif**, une onde progressive sinusoïdale s'écrit

$$s(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad (\Rightarrow) \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c.$$

et l'on observe que la pulsation spatiale k est strictement proportionnelle à la pulsation temporelle ω .

◇ Dans un **milieu dispersif**, la relation devient

$$k = \frac{\omega}{v_\varphi(\omega)}$$

et k n'est plus linéaire en ω . La vitesse de phase v_φ varie alors avec la fréquence, ce qui conduit à un étalement de toute onde non strictement sinusoïdale.

Considérons une onde imposée en $x = 0$, notée $s(0, t) = f(t)$. Par décomposition de Fourier,

$$f(t) = \sum_i A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) = \Delta(0, t).$$

chaque composante se propageant avec sa propre vitesse de phase. On obtient en un point quelconque x :

$$s(x, t) = \sum_i A_i \cos\left(\omega_i t - \frac{\omega_i}{v_\varphi(\omega_i)} x + \varphi_i\right)$$

◇ Si le milieu est **non dispersif** : $v_\varphi(\omega_i) = c$ pour tout i , alors

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \sum_i A_i \cos\left(\omega_i t - \frac{\omega_i}{c} x + \varphi_i\right)$$

c'est une onde conservant *exactement* sa forme au cours de la propagation, comme sur la figure 8.

$$\Delta(x, t) = \sum_i A_i \cos\left(\omega_i \left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_i\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

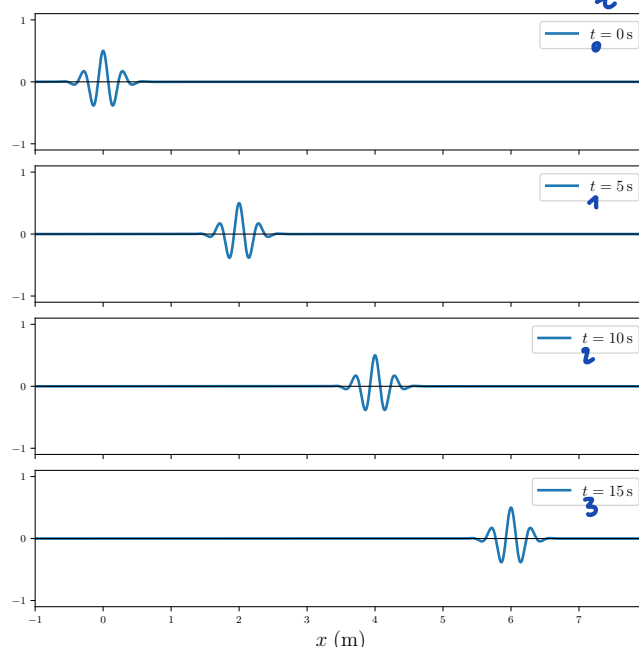


Figure 8 – Propagation d'un paquet d'onde dans une corde fixée à ses deux extrémités

◇ **Si le milieu est dispersif**, chaque harmonique avance avec une vitesse différente : l'onde se déforme (étalement ou modulation), phénomène caractéristique observable sur les trains d'ondes, comme sur la figure 9.

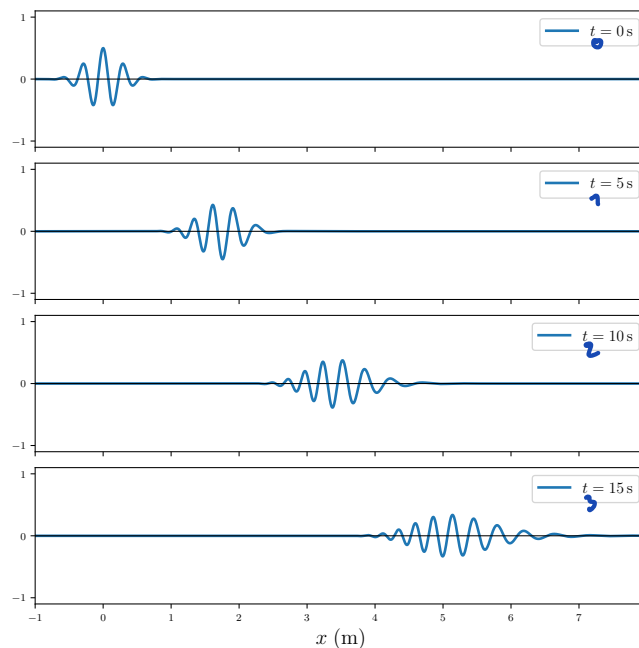


Figure 9 – Propagation d'un paquet d'onde à la surface de l'eau

6.2 Exemples de milieux non dispersifs

6.2.1 Ondes acoustiques dans un fluide (non dispersif)

La célérité est donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$$

où ρ_0 : masse volumique du fluide (kg m^{-3}), χ_0 : compressibilité isotherme (Pa^{-1}).

◇ **Dans l'air** assimilé à un gaz parfait :

$$\chi_0 = \frac{1}{\gamma P_0}, \quad \gamma \simeq 1,4, \quad P_0 = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad \rho_0 \simeq 1,2 \text{ kg m}^{-3}$$

Ainsi :

$$c_{\text{air}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1,4 \times 10^5}{1,2}} \simeq 344 \text{ m s}^{-1} \quad \text{à } T_0 = 20^\circ\text{C}$$

◇ **Dans l'eau** :

$$\rho_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}, \quad \chi_0 = 5,0 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

d'où

$$c_{\text{eau}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}} \simeq 1,4 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

6.2.2 Ondes longitudinales dans un solide (non dispersif)

La célérité vaut :

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$$

où E : module de Young (Pa), ρ_0 : masse volumique (kg m^{-3}).

Dans l'acier :

$$E = 2,1 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad \rho_0 = 8,0 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3},$$

d'où

$$c_{\text{acier}} = \sqrt{\frac{2,1 \times 10^{11}}{8,0 \times 10^3}} \simeq 5,0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

6.2.3 Ondes électromagnétiques dans le vide (non dispersif)

Dans le vide, toutes les composantes harmoniques d'une onde se propagent à la même vitesse c :

$$c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

6.3 Exemples de milieux dispersifs

6.3.1 Ondes de gravité en eau profonde (dispersif)

La relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk, \quad g = 9,81 \text{ m s}^{-2} \Rightarrow \omega = \sqrt{g} \sqrt{k}$$

Vitesse de phase :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{gk}}{k} \Rightarrow$$

$$v_{\varphi}(k) \triangleq \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Comme $k = 2\pi/\lambda$, on obtient :

$$v_{\varphi}(\lambda) = \sqrt{\frac{g}{2\pi}} \sqrt{\lambda}$$

Ce qui permet d'expliquer que la queue du paquet d'onde présente une plus faible longueur d'onde (propagation plus lente) que le front du paquet d'onde (propagation plus rapide) sur la figure 9.

6.3.2 Ondes électromagnétiques dans un milieu matériel (dispersif)

La vitesse de phase dépend de la longueur d'onde via l'indice optique :

$$v_{\varphi}(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)} < c$$

La variation de $n(\lambda)$ explique la décomposition spectrale d'un faisceau de lumière blanche dans un prisme.

Résumé

En résumé, la dispersion correspond à une propagation différente des composantes fréquentielles d'une onde, ce qui entraîne une déformation progressive de sa forme. Les relations de dispersion $\omega = f(k)$ sont l'outil central pour caractériser cette propriété d'un milieu.