Suites – Arithmétiques et Géométriques

#1èreSpéMaths

u_n est	Arithmétique	Géométrique
Forme récurrente	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times q$
	raison $\in \mathbb{R}$	
Forme explicite « u_n en fonction de n »	Relation générale : $u_n = u_p + (n-p)r$ Cas avec u_0 : $u_n = u_0 + nr$	 $u_n = u_p \times q^{n-p}$ $u_n = u_0 \times q^n$
Comment démontrer que la suite u_n est ari./géo. ?	$u_{n+1} - u_n = \ldots$ $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = \ldots$ $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$	$u_{n+1} = \ldots$ $\Leftrightarrow u_{n+1} = \ldots$ $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n \times q$

u_n est	Arithmétique	Géométrique
Somme de termes d'une suite	Somme des 1ers entiers : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$	Somme des 1eres puissances de q : $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
	Somme des 1ers termes de u_n : $S = \text{Nb de termes} \times \dfrac{(\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$	exposant $S = \text{1er terme} \times \dfrac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ raison
Variations	• $r > 0$: $u_n \nearrow$ • $r < 0$: $u_n \searrow$ • $r = 0$: $u_n \rightarrow$	• $q > 1$: ○ $u_0 > 0$: $u_n \nearrow$ ○ $u_0 < 0$: $u_n \searrow$ • $0 < q < 1$: ○ $u_0 > 0$: $u_n \searrow$ ○ $u_0 < 0$: $u_n \nearrow$ • $q < 0$: u_n n'est pas monotone • $q = 0$ ou 1 : u_n est constante

Exercice n°1 : Suites arithmétiques (2 points)

Pour chacune des suites, calculer u_{20}.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.
2. La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = u_n + 7$ pour n entier naturel.

Exercice n°2 : Somme de termes d'une suite arithmétique (3 points)

Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule du cours :

1. $S = 10 + 13 + 16 + \cdots + 163$.
2. La somme W des 100 premiers nombres pairs.

Exercice n°3 : Suites géométriques (2 points)

Dans chaque cas, on considère deux termes d'une suite géométrique (v_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels. En déterminer la raison et le premier terme puis exprimer v_n en fonction de n.

a) $v_3 = 6$ et $v_8 = 1\,458$.

b) $v_{21} = 65\,536$ et $v_{23} = 262\,144$.

Exercice n°4 : Somme de termes d'une suite géométrique (3 points)

Calculer les sommes suivantes en utilisant la formule du cours :

1. $S = 2 + 6 + 18 + 54 + \cdots + 13\,122$
2. $T = 3 - 6 + 12 - 24 + \cdots + 192$

Exercice n°5 : Synthèse (7 points)

Le gazon d'un champ de $5\,000$ m^2 est envahi par des pissenlits qui détruisent 20 % de la surface en un an. Chaque automne, Catherine arrache 250 m^2 de pissenlits afin de semer de la pelouse.

On modélise la situation par une suite (p_n) définie, pour tout entier naturel n, où $p_0 = 5\,000$ est la surface initiale en m^2 de pelouse et p_n la surface de pelouse à la fin de n années.

1. a. Calculer p_1 et p_2.
   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, p_{n+1} en fonction de p_n.
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = p_n - 1\,250$.

a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique en précisant sa raison et son premier terme.
b. Donner l'expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.
c. En déduire l'expression du terme général de la suite (p_n) en fonction de n.
d. Que peut-on en déduire pour la surface de la pelouse au bout d'un nombre important d'années ?

Exercice n°1 : (4 points)

Un groupe de communes littorales a vu le stock de cabillaud diminuer aux abords de ses côtes. En 2019, le stock était estimé à $5\,000$ tonnes. Les autorités ont décidé de réglementer la pêche pour préserver la ressource. Elles ont fixé un quota de pêche de 500 tonnes à ne pas dépasser en 2018. Elles ont décidé que ce quota diminuerait de 30 tonnes chaque année.

Pour tout entier n, on note u_n le quota de pêche au cabillaud autorisé l'année $2019 + n$.

1) Calculer le quota de l'année 2021.
2) En déduire la nature de la suite (u_n) et ses éléments caractéristiques.
3) Exprimer u_n en fonction de n.
4) Calculer u_{10}. Que représente ce nombre ?
5) En quelle année les pêcheurs auront-ils un quota inférieur à 200 tonnes si les règles sont inchangées ?

Exercice n°2 : (3 points)

Un lac artificiel est alimenté en eau par un ruisseau dont le débit augmente de 3 % par jour en raison de la fonte des neiges. Le 1er mars son débit journalier est de $300\,\text{m}^3$.

Pour tout entier n, non nul, on note d_n le débit journalier du ruisseau le $n^{\text{ième}}$ jour de mars. Ainsi $d_1 = 300$.

1) Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. Quelle est la nature de la suite (d_n) ?
2) Calculer le volume total d'eau apporté par le ruisseau au cours du mois de mars.

Exercice n°3 : (4,5 points)

Les questions suivantes sont indépendantes :

1) La suite (u_n) est arithmétique est on sait que $u_4 = 12$ et $u_{10} = -10$. Calculer la raison et déterminer u_{13}.
2) La suite (v_n) est géométrique de raison négative et on a : $v_3 = 6$ et $v_5 = 1,5$. Calculer la raison et déterminer u_0.
3) On a la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = n + 2^n + 1$. Calculer $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$.

Exercice n°4 : (6 points)

Perrine place $8\,000$ sur son compte à un taux d'intérêt de $3,8\,\%$. Chaque année, 76 de frais de gestion sont prélevés. Pour tout entier n, on note C_n le capital de l'année n.

a) Établir une relation de récurrence entre C_{n+1} et C_n.

b) Soit la suite (D_n) définie pour tout entier n par : $D_n = C_n - 2000$. Montrer que (D_n) est géométrique de raison $1,038$.

c) Déterminer D_n en fonction de n.

d) En déduire C_n en fonction de n.

e) Combien d'argent possède-t-elle au bout de 10 ans ?

f) Combien d'années sont nécessaires pour que son capital augmente de 50 % ?

Exercice n°5 : (3,5 points)

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 2$. Pour tout entier naturel n non-nul, on note : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Déterminer la valeur de l'entier n pour que : $S_n = 10\,605$.

Exercice 1 / 5 points

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_1 = 0,5$.
   a. Donner la forme récurrente de la suite (u_n).
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. Calculer u_{13}.
   d. Donner les variations de la suite (u_n). Justifier.
   e. Calculer la somme des 11 premiers termes de la suite $\left(\sum_{k=1}^{11} u_k\right)$.
2. Soit (v_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -1$.
   a. Donner la forme récurrente de la suite (v_n).
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
   c. Calculer v_{20}.
   d. Donner les variations de la suite (v_n). Justifier.
   e. Calculer la somme des 11 premiers termes de la suite $\left(\sum_{k=0}^{10} v_k\right)$.

Exercice 2 / 8 points

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que, dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20 % en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant.

Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.

1. Montrer que l'on peut modéliser l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n) définie de la façon suivante, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 1,2u_n - 100$$

   u_n représentant la production le $n^{\text{ième}}$ jour. On précisera le premier terme u_0.
2. On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n,

$$v_n = u_n - 500.$$

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
c. Au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg ?
d. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 / 8 points

Un globetrotter a parié qu'il pouvait parcourir $5\,000$ km à pied. Il peut, frais et dispo, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour, la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le $n^{\text{ième}}$ jour.

1. a. Calculer les distances d_1, d_2, d_3.
   b. Donner l'expression de d_{n+1} en fonction de d_n.
   c. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.
2. Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours.
3. Justifier que $L_n < 5000$ pour tout n. Que dire du pari du globe trotter ?
4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4999 km.