

Mathématiques – CCINP/E3A – DS₃

*Les résultats doivent être justifiés et encadrés (ou soulignés).
Numérotez chaque page de votre devoir.
La calculatrice est interdite.*

Exercice 1 : Les polynômes de Hermite (CCINP 2025 PC)

Présentation générale

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H'_n.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

Partie I - Préliminaires

Les deux sous-parties suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

I. 1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q2. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2} dt$$

Q3. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$$

Q4. Justifier que u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Q5. Justifier que v est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Q6. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis que sa valeur est $\frac{\pi}{4}$.

Q7. En déduire que la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est $\sqrt{\pi}$.

Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie dans la présentation générale de l'exercice.

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.

Q8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n .

Q9. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$. On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie I.1.

Q10. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leq q$. Montrer pour tout entier $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$ que :

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t) dt$$

Q11. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(H_0, \dots, H_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q12. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p .

★
★ ★

Exercice 2 : Calcul de distance dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (CCINP 2003 MP)

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n .

Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^\top$ est sa matrice transposée et $\text{tr}(A)$ sa trace.

On note :

- ▶ I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- ▶ $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- ▶ $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On $(A|B) = \text{tr}(A^\top \times B)$.

Q13. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Montrer que $(A|B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j}$.

Q14. Montrer que $(\cdot | \cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q15. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = \sqrt{(A|A)}$.

Si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel

$$d(A, \Pi) = \inf_{M \in \Pi} \|A - M\|.$$

Q17. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \left\| \frac{1}{2}(A - A^\top) \right\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Q18. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$.

★
★ ★

Exercice 3 : Intégrale de Dirichlet (CCINP 2013 PC)

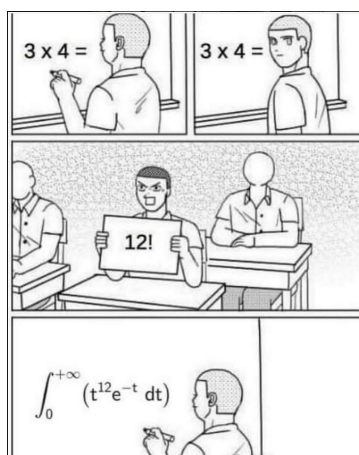
Calcul de l'intégrale de Dirichlet

- Q19.** Justifier l'existence de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$.
- Q20.** Justifier que l'application $L : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-tx} dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Q21.** Montrer que, pour tout réel $a > 0$, l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Établir ensuite que l'application L est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- Q22.** Montrer que les fonctions $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$ et $t \mapsto \frac{1 - \cos(t)}{t}$ sont bornées sur $]0, +\infty[$.
- Q23.** Établir alors que les fonctions $x \mapsto |xL'(x)|$ et $x \mapsto |xL(x)|$ sont majorées sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Q24.** En déduire que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} L'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$.
- Q25.** Pour tout réel $x > 0$, exprimer $L''(x)$ sans utiliser d'intégrale.
On pourra remarquer que $\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it})$.
- Q26.** En déduire $L'(x)$ pour $x > 0$, puis $L(x)$ pour $x \geq 0$. Conclure que $K = \frac{\pi}{2}$.
- Q27.** En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Calcul d'une autre intégrale

- Q28.** Justifier que la fonction $u \mapsto \frac{\ln(u)}{u-1}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
- Q29.** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence et calculer $\int_0^1 u^k \ln(u) du$.
- Q30.** Grâce à un développement en série de $\frac{1}{1-u}$ pour $u \in]0, 1[$ et en précisant le théorème utilisé, justifier que :
- $$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{u-1} du = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2}.$$
- Par ailleurs, on donne sans avoir à le justifier : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

★
★ ★



Exercice 4 : Calcul d'une somme de série (E4A 2022 PC)

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt.$$

Étude de la convergence de la série de terme général u_n

Q31. Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

Q32. Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

Q33. Prouver que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Calcul de la somme de cette série

Q34. Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

Q35. En déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos(t)} dt$.

Intégration terme à terme ?

Q36. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

Q37. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.

Q38. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

Utilisation du théorème de convergence dominée

On pose, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \sum_{k=0}^n v_k(t)$.

Q39. En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

– Fin du sujet –