

EXERCICE 1: [Indications] [Correction] - Calculer - Cours -

Étudier la convergence et déterminer, si possible, la somme totale des séries ci-dessous

- | | |
|--|--|
| 1. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\ln n - \ln(n+1))$ | 6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} n e^{-\lambda n}$ pour tout $\lambda > 0$ |
| 2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + \dots + n}$ | 7. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 e^{-n}$ |
| 3. $\sum_{n \geq 2} \ln \frac{(\ln(n+1))^2}{(\ln n) \ln(n+2)}$ | 8. $\sum_{n \geq 2} \frac{1 + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ ☆ |
| 4. $\sum_{n \geq 2} \frac{4}{e^n}$ | 9. $\sum_{n \geq 2} \frac{2n^2 - n + 1}{n!}$ ☆ |
| 5. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ | 10. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1; 1[$ ☆☆ |

EXERCICE 2: [Indications] [Correction] - Chercher -

Étudier la nature des séries ci-dessous

- | | |
|---|--|
| 1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(\operatorname{sh} n)$
(où $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$) | 6. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin^4(2^{n-1} \frac{\pi}{5})}{2^{n-1}}$ |
| 2. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n}$ | 7. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$
(où $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$) |
| 3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ | 8. $\sum_{n \geq 1} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$ |
| 4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (n-1)!}{n!}$ | 9. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ |
| 5. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2^n)}{n!}$ | 10. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ☆☆ |

EXERCICE 3: [Indications] [Correction] - Raisonner -

- Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que, pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$, $\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$.
- En déduire que $\sum_{k=0}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$. ☆

- Écrire un algorithme Python vous permettant d'observer l'équivalence sur un graphique.

EXERCICE 4: [Indications] [Correction] - Raisonner - Chercher - ☆

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

- Étudier le signe puis le sens de variation de la suite (u_n) .
- En déduire la convergence éventuelle et la limite, si elle existe.
- Justifier que le passage au $\ln$ de l'équation (1) est possible. En déduire ensuite la nature de la série de terme général u_n . ☆

EXERCICE 5: [Indications] [Correction] - Chercher - Raisonner - (ENS) ☆☆

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]0; 1[\quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Étudier la convergence de la suite (u_n) ☆☆
- Étudier la convergence de la série de terme général u_n^2 .

EXERCICE 6: [Indications] [Correction] - Calculer -

Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$$

Comparer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) \right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n u_k(x) \right)$

EXERCICE 7: [Indications] [Correction] - Chercher - Calculer - Modéliser - ☆

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$I_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k} dx, \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^k} dx, \quad u_n^{(k)} = \frac{(-1)^n}{kn+1}$$

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. ☆
- Exprimer $J - I_n$ sous la forme d'une somme. ☆
- Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge et déterminer sa limite en fonction de J .
- Déterminer $\sum_{j=0}^{+\infty} u_j$ pour $k = 1, 2$.

5. a) Déterminer a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2}$$

- b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ lorsque $k = 3$.

6. Écrire une fonction Python permettant de déterminer une valeur approchée de J pour n'importe quel $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire une valeur approchée de J pour $k = 5$. (On ne se préoccupera pas de connaître la précision exacte de la valeur approchée mais on donnera seulement une valeur qui semble raisonnable en expliquant pourquoi.)

EXERCICE 8: [Indications] [Correction] – Chercher – Raisonner – (ENS)

☆☆☆

Soit (a_n) une suite réelle. On souhaite étudier les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

(Ce type de séries est appelé "séries entières".)

1. On pose $R = \sup\{|z| \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge}\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

- a) Vérifier que R existe.
b) Vérifier que pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge.
c) Montrer que pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. ☆

On dit que R est le *rayon de convergence* de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

2. Quel est le rayon de convergence des séries entières

- a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$
b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n z^n$
c) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$

3. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe (et est finie). On la note ℓ .

- a) Montrer que le rayon de convergence de la série est $\frac{1}{\ell}$. (où on s'autorise à noter $\frac{1}{\ell} = +\infty$ si $\ell = 0$). ☆☆☆

- b) En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 1}{2n} z^n$

EXERCICE 9: [Indications] [Correction] – Chercher – Calculer – (ENS) ☆☆☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = P_n(\cotan^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. a) Donner les racines de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.

3. a) Montrer que $\forall u \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cotan^2 u \leq \frac{1}{u^2} \leq 1 + \cotan^2 u$.

- b) En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indications

Exercice 1 [Correction]

2. Transformer le terme général en une fraction du type $\frac{1}{\text{un produit}}$ et se ramener à un cas de technique connue.

4. $u_n = 4(e^{-1})^n$

5. $u_n = \frac{1^n}{n!}$

8. Télésopage et suites géométriques.

10. Penser à intégrer la somme partielle d'une série géométrique puis penser à utiliser (et justifier proprement) que $\int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^N dt$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 [Correction]

2. Pour la limite, une fois démontré que la suite converge, on pourra penser à passer à la limite dans la relation de récurrence (1).

Exercice 5 [Correction]

1. Déterminer le sens de variation éventuel de (u_n) , puis sa limite éventuelle. Finir le raisonnement.
2. Penser à isoler u_n^2 dans la définition. Cette question peut se faire sans avoir réussi à faire la question 1, mais utilise quand même le résultat de 1.

Exercice 9 [Correction]

1. Développer $\sin(2n+1)x$.

2. b) Il faut pour cela se souvenir que si $x_1, \dots, x_n$ sont toutes les racines d'un polynôme $P_n(t)$ de degré n , alors $x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ où a_i est le coefficient du monôme t^i .

Exercice 1

1. télescopage. $S_N = \sum_{n=1}^N (\ln n - \ln(n+1)) = -\ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} -\infty$.

La série diverge.

2. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\dots+k} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)} \rightarrow 2$: pour $\frac{1}{k(k+1)}$: télescopage.

3. $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln \frac{(\ln(n+1))^2}{(\ln n) \ln(n+2)} = \ln \frac{\ln 3}{\ln 2}$

encore du télescopage : $u_n = 2 \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) - \ln(\ln(n+2))$

4. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{e^n} = \frac{4}{e^2 - e}$

En effet, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} (e^{-1})^n = \frac{1}{1-e^{-1}} - (1+e^{-1}) = \frac{1-(1-e^{-2})}{1-e^{-1}}$

5. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$

6. $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-\lambda n} = \frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$

C'est une série de type géométrique $\sum n q^n$, avec $q = e^{-\lambda} \in]-1; 1[$.

7. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 e^{-n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1+e}{(e-1)^3}$: se ramener à des séries de type géométrique.

8. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{4}$

$$u_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{2^n}$$

$$\text{Or, } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^3} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{1}{8} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Le reste, c'est encore du télescopage.

9. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n^2 - n + 1}{n!} = 4e - \frac{5}{2}$

$$u_n = \frac{2n}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} = \frac{2(n-1)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

$$\text{d'où } \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 2e + (e-1) + (e-1-\frac{1}{2})$$

10. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ mais seulement si $|x| < 1$ (sinon, divergence.)

Pour $|x| \geq 1$, il y a divergence grossière.

Étudions ce qui se passe pour $|x| < 1$.

On pose $f_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{x^k}{k}$. En dérivant, on obtient $f'_N(x) = \sum_{k=1}^N x^{k-1} = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$

L'intégration donne $f(x) = \underbrace{cstte}_0 - \ln(1-x) + \underbrace{\int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt}_{\rightarrow 0}$.

Attention, encore faut-il démontrer que $\int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Pour ce faire, on peut par exemple considérer que $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle d'intégration car $x < 1$. On pourra donc majorer par une intégrale facile à calculer dont la limite est simple également. Le détail est laissé au lecteur...

Exercice 2

1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(\text{ch } n)$ diverge grossièrement :

$$\ln(\text{ch } n) = \ln \frac{e^n + e^{-n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

2. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n}$ diverge grossièrement

3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge par comparaison avec $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$

4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (n-1)!}{n!} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ c'est donc la somme d'une série exponentielle convergente et d'une série de Riemann $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge. Ainsi

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (n-1)!}{n!}$ diverge.

5. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2^n)}{n!}$ converge absolument.

Elle est majorée par une série exponentielle.

6. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin^4(2^{n-1} \frac{\pi}{5})}{2^{n-1}}$ converge absolument.

$|(-1)^n \frac{\sin^4(2^{n-1} \frac{\pi}{5})}{2^{n-1}}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Or, $\frac{1}{2^{n-1}}$ est le terme général d'une série convergente.

7. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$ converge :

$$\frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)} = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}} \sim \frac{e^n}{e^{2n}} = e^{-n} = (e^{-1})^n > 0$$

terme général d'une série géométrique convergente de raison $e^{-1} \in]-1, 1[$. Par équivalence de termes généraux de séries positives, la série initiale converge.

8. $\sum_{n \geq 1} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$ converge.

$$\frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}} \sim \frac{1}{n^2} > 0$$

Or, $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente.

9. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$ divergente.

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}} > 0$$

Or, $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ est le terme général d'une série divergente (cf q3).

10. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ converge

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!}{(2n)(2n-1)\dots(n+1)} = \underbrace{\frac{n}{2n}}_{\leq \frac{1}{2}} \underbrace{\frac{n-1}{2n-1}}_{\leq \frac{1}{2}} \dots \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq \frac{1}{2}}$$

d'où

$$0 \leq \frac{(n!)^2}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

Exercice 3

1. on a

$$\frac{k!}{n!} \leq \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

2. On note $u_n = \sum_{k=0}^n k!$, alors

$$\frac{u_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1$$

or, pour tout $k \leq n-2$, on a

$$\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = (n-2+1) \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

d'où

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{k!}{n!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} + \frac{1}{n} + 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

d'où

$$\sum_{k=0}^n k! \sim_{n \rightarrow +\infty} n!$$

3. L'équivalence ne s'observe pas par une simple limite identique. Il faut s'inquiéter de savoir si le comportement asymptotique est identique. Le plus simple est de voir si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=0}^n k!}{n!} = 1$.
Un programme du type suivant permettra de faire un dessin jusqu'à l'indice N :

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2
3 def Equivalent(N):
4     u=1
5     fact=1
6     n=1
7     X=[1]
8     Y=[1]
9     for n in range(1,N+1):
10         fact=fact*n
11         u=u+fact
12         X+= [n]
13         Y+= [u/fact]
14     plt.clf()
15     plt.plot(X,Y,marker='o',linestyle='None')
16     plt.show()

```

Une execution avec `Equivalent(40)` permet d'observer une limite de 1.

Exercice 4

1. (u_n) est clairement positive et $u_n \neq 0$ de proche en proche. On peut donc évaluer

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-u_n} \in]0; 1[.$$

Ainsi, (u_n) est décroissante.

2. On sait que (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente. On note ℓ sa limite.

Par passage à la limite dans la formule de récurrence, on trouve

$$\ell = \ell e^\ell$$

D'où la seule possibilité

$$\ell = 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

3. $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\ln u_n$ est donc bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \iff \ln u_{n+1} = \ln u_n - u_n \iff u_n = \ln u_n - \ln u_{n+1}$$

Autrement dit, on trouve la nature de la série de terme général u_n par télescoping :

$$\sum_{k=0}^n u_k = \ln u_0 - \ln u_{n+1}$$

Ce qui signifie que la série est divergente vers $+\infty$.

Exercice 5

1. La recherche de limite peut se faire par raisonnement habituel sur les suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$ ou par le raisonnement ci-dessous :

- L'étude de $u_{n+1} - u_n$ donne trivialement que (u_n) est décroissante. Pour établir la convergence, il suffirait que (u_n) soit minorée. Si c'est le cas, elle sera minorée par exemple par sa limite.

- Cherchons la limite éventuelle :

On applique la technique habituelle de recherche de limite :

supposons que (u_n) admet une limite ℓ . Par passage à la limite dans la formule de récurrence, on obtient

$$\ell = \ell - \ell^2$$

i.e.

$$\ell = 0$$

- Montrons que (u_n) est minorée par 0 :

La formule s'écrit aussi $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$. On établit donc que pour obtenir la positivité de u_{n+1} , il faut également que $u_n \leq 1$. On démontre donc par récurrence que $u_n \in [0; 1]$, ce qui se fait sans difficulté.

- Conclusion :

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc convergente. La seule limite possible est 0, d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2. Par télescoping, on trouve

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 = u_0$$

Si on n'a pas réussi à faire la question 1, on ne trouve pas la limite exacte, mais on peut quand même établir la convergence.

Exercice 6

On a

$$\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)} = \frac{1}{(n-1)x+1} - \frac{1}{nx+1}$$

Par télescopage, on trouve

$$\sum_{k=1}^n u_k(x) = 1 - \frac{1}{nx+1}$$

On trouve donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) \right) = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n u_k(x) \right) = 0$$

Exercice 7

$$1. \quad |I_n| \leq \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k} dx \leq \int_0^1 x^{k(n+1)} dx = \frac{1}{k(n+1)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

2. On va montrer que $J - I_n = \sum_{j=0}^n u_j$:

$$\begin{aligned} J - I_n &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} x^{k(n+1)}}{1+x^k} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-x^k)^{n+1}}{1+x^k} dx \end{aligned}$$

Or, on rappelle que $1 - u^{n+1} = (1-u)(1+u+\dots+u^n)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} J - I_n &= \int_0^1 \frac{(1+x^k)(1+x^k+\dots+(x^k)^n)}{1+x^k} dx \\ &= \int_0^1 1 + (-x^k) + \dots + (-x^k)^n dx \\ &= \sum_{j=0}^n u_j \end{aligned}$$

3. Comme $\sum_{j=0}^n u_j = J - I_n$ et que $J - I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J$, on a

$$\boxed{\sum_{j=0}^n u_j \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} J}$$

4. Pour $k=1$, on a $\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} u_j = \ln 2}$ et pour $k=2$, on a $\boxed{\sum_{j=0}^{+\infty} u_j = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}}$

5. a) On trouve

$$\boxed{a = \frac{1}{3} \quad ; \quad b = -\frac{1}{3} \quad ; \quad c = \frac{2}{3}}$$

b) Après de multiples calculs, pour $k=3$, on trouve

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_n^{(k)} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \tan \frac{1}{\sqrt{3}}$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_n^{(k)} = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}}$$

6. Voici une possibilité simple :

```
1 def val_approchee(N,k):
2     S=0
3     for n in range(N+1):
4         S+=(-1)**n/(k*n+1)
5     return(S)
```

une execution avec `val_approchee(500,5)` donne environ 0,89 (On peut tenter plusieurs N grands afin de voir que la valeur à 10^{-2} près ne change pas. Cette valeur est donc raisonnable.

Exercice 8

1. a) Si on prend $z=0$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est nulle donc convergente. L'ensemble $\{|z| \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge}\}$ est donc non vide et minoré par 0.
- b) La série diverge par définition.
- c) Comme $|z| < R$, il existe $z' \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < |z'| \leq R$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z'^n$ converge.

2. a) C'est une série géométrique. Elle converge pour $|z| < 1$ et diverge sinon. Le rayon de convergence est donc $R = 1$.
- b) C'est une série géométrique : $\sum (2z)^n$. De la même manière que la question précédente, elle converge ssi $|2z| < 1$. Son rayon de convergence est donc $R = \frac{1}{2}$.
- c) C'est une série exponentielle. Elle converge pour tout $z \in \mathbb{R}$. Son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.
3. a) On note R le rayon de convergence de la série. La démonstration ci-dessous vaut pour $\ell \neq 0$. On adaptera pour $\ell = 0$.

- Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge si $|z| < \frac{1}{\ell}$:

Supposons que $|z| < \frac{1}{\ell}$. Il existe alors z' tel que

$$|z| < z' < \frac{1}{\ell}.$$

La deuxième inégalité équivaut à

$$\ell < \frac{1}{z'}.$$

Comme $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ converge vers ℓ , on sait que la suite restera dans un voisinage de ℓ à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe N tel que, pour $n \geq N$, on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \frac{1}{z'}.$$

Ceci implique que, pour tout $n \geq N + 1$,

$$|a_n z^n| \leq \frac{1}{z'} |a_{n-1}| z^n \leq \dots \leq \frac{1}{(z')^{n-N}} a_N z^n = \underbrace{\frac{a_N}{(z')^N}}_{\text{constante}} \left(\frac{z}{z'}\right)^n$$

Or,

$$\left|\frac{z}{z'}\right| < 1,$$

$\left(\frac{z}{z'}\right)^n$ est donc le terme général d'une série géométrique convergente. Par théorème de comparaison des séries positives, $\sum a_n z^n$ est donc une série absolument convergente.

- Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge si $|z| > \frac{1}{\ell}$:

Même principe, mais dans "l'autre sens" :

Supposons que $|z| > \frac{1}{\ell}$. Il existe alors z' tel que

$$|z| > z' > \frac{1}{\ell}.$$

La deuxième inégalité équivaut à

$$\ell > \frac{1}{z'}.$$

Comme $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$ converge vers ℓ , on sait que la suite restera dans un voisinage de ℓ à partir d'un certain rang. Autrement dit, il existe N tel que, pour $n \geq N$, on a

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq \frac{1}{z'}.$$

Ceci implique que, pour tout $n \geq N + 1$,

$$|a_n z^n| \geq \frac{1}{z'} |a_{n-1}| z^n \geq \dots \geq \frac{1}{(z')^{n-N}} a_N z^n = \underbrace{\frac{a_N}{(z')^N}}_{\text{constante}} \left(\frac{z}{z'}\right)^n$$

Or,

$$\left|\frac{z}{z'}\right| > 1,$$

$\left(\frac{z}{z'}\right)^n$ est donc le terme général d'une série géométrique divergente. Par théorème de comparaison des séries positives, $\sum |a_n z^n|$ est donc une série divergente.

En conclusion, le rayon de convergence est bien $R = \frac{1}{\ell}$.

- b) On note $a_n = \frac{n^2+1}{2n} \sim \frac{n}{2}$.
On a alors

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \sim \frac{n+1}{2} \frac{2}{n} \sim 1$$

Ainsi, le rayon de convergence de la série est $\boxed{1}$.

Exercice 9

1. Pour simplifier l'écriture, on va noter $\alpha = \cos x$ et $\beta = \sin x$. D'où

$$\begin{aligned}\sin(2n+1)x &= \operatorname{Im} \left((e^{ix})^{2n+1} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left((\alpha + i\beta)^{2n+1} \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \alpha^{2n+1-k} i^k \beta^k \right) \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \alpha^{2n+1-k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \beta^k\end{aligned}$$

en changeant d'indice par $p = \frac{k-1}{2} \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\sin(2n+1)x = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} \alpha^{2n+1-(2p+1)} (-1)^p \beta^{2p+1}$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1}x} &= \frac{1}{\beta^{2n+1}} \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} \alpha^{2n+1-(2p+1)} (-1)^p \beta^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} \frac{\alpha^{2n+1-(2p+1)}}{\beta^{2n+1-(2p+1)}} (-1)^p \frac{\beta^{2p+1}}{\beta^{2p+1}} \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{2(n-p)} (-1)^p \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} \right)^{n-p} (-1)^p\end{aligned}$$

En posant $P_n(t) = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} t^{n-p} (-1)^p$, on répond à la question.

2. a) Comme $\deg P_n = n$, il suffit de trouver n racines distinctes pour être certain de les avoir toutes.

Or,

$$\sin(2n+1)x = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{k\pi}{2n+1} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

D'où, si $y \in \left\{ \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$, on a $P_n(y) = 0$.

De plus, les valeurs $\cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$ sont deux à deux distinctes pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a donc bien toutes les racines de P_n .

b) On rappelle que si $x_1, \dots, x_n$ sont toutes les racines d'un polynôme $P_n(t)$ de degré n , alors $x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ où a_i est le coefficient du monôme t^i .

Or, ici a_n correspond à $p = 0$ et a_{n-1} à $p = 1$, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} &= -\frac{\binom{2n+1}{2 \times 1 + 1} (-1)^1}{\binom{2n+1}{2 \times 0 + 1} (-1)^0} \\ &= -\frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} \\ &= -\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{(2n+1) \times 3 \times 2} \\ &= -\frac{n(2n-1)}{3}\end{aligned}$$

3. a) On peut faire une étude de fonctions, mais :

★ pour l'inégalité de gauche : $\tan u > u$, d'où $\cotan u < \frac{1}{u}$.

★ l'inégalité de droite est équivalente à $u^2 \geq \sin^2 u$.

b) On applique l'inégalité précédente à $u = \frac{k\pi}{2n+1}$.

$$\begin{aligned}\cotan^2 u &\leq \frac{1}{u^2} \leq 1 + \cotan^2 u \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} &\leq \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} \leq n + \sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} \\ \Rightarrow \frac{n(2n-1)}{3} &\leq \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3} \\ \Rightarrow \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} &\leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}\end{aligned}$$