

# Composition de fonctions – Fiche de cours

## 1. Composition de 2 fonctions

Soit  $u(x)$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs dans  $J$  et  $v(x)$  une fonction définie sur  $J$ ; on appelle la composée de  $u(x)$  par  $v(x)$   $(v \circ u)(x) = v(u(x))$  définie sur  $I \cap J$

## 2. Dérivées de composition de fonctions

### a. Définition

Soit  $u$  une fonction définie sur  $I$  à valeurs dans  $J$  et  $v$  une fonction définie sur  $J$ ;  $(v \circ u)' = u' \cdot (v' \circ u)$

### b. Propriétés

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur  $I$ :

- $(e^u)' = u' \cdot e^u$
- $(\frac{1}{u})' = \frac{-u'}{u^2}$  avec  $u \neq 0$
- $(u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  avec  $u > 0$
- $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$
- $\cos(u)' = -u' \sin(u)$
- $\sin(u)' = u' \cos(u)$

## 3. Primitives de composition de fonctions

Fonction	Primitive	Intervalle
$f = u + v$	$F = U + V$	$D_u \cap D_v$
$f = u' \cdot u^n$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$	$D_u$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u}$	$D_u \cap u > 0$
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u}$	$D_u \cap u \neq 0$
$f = u' \cdot e^u$	$F = e^u$	$D_u$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln u $	$D_u \cap u \neq 0$
$f = u' \sin u$	$F = -\cos u$	$D_u$
$f = u' \cos u$	$F = \sin u$	$D_u$

# Composition de fonctions – Exercices - Devoirs

## Exercice 1

Calculer la dérivée de la fonction  $f$  dans chacun des cas :

1.  $f(x) = 4 \cdot (2x^3 - 5)^2$

2.  $f(x) = \frac{5}{(2-3x)^6}$

3.  $f(x) = \frac{\sqrt{18+3x}}{2}$

4.  $f(x) = 8 \cdot \ln(3x-5)$

5.  $f(x) = 5 \cdot e^{10-3x}$

6.  $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

## Exercice 2

Calculer la dérivée de la fonction  $f$  dans chacun des cas :

a)  $f(x) = \cos\left(-3x + \frac{\pi}{3}\right)$     b)  $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

c)  $f(x) = \sin(2x)$

d)  $f(x) = \cos(3x^2 + 2x)$

## Exercice 3

Déterminer une primitive pour chaque fonction suivante :

1.  $f(x) = (x-3)^4$

2.  $f(x) = e^{2x+1}$

3.  $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2-5x}}$

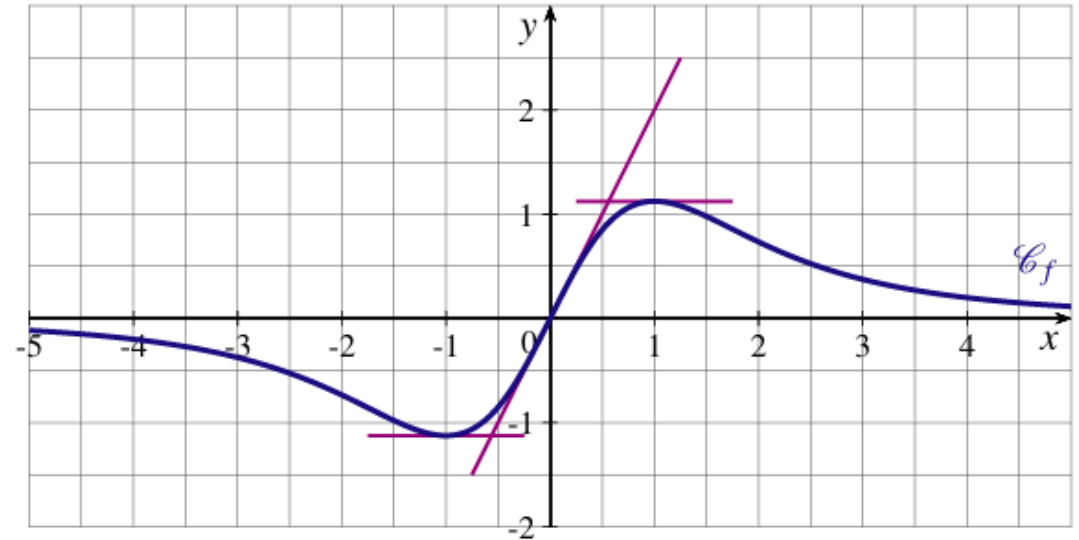
4.  $f(x) = 2 \cos\left(100\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$

5.  $f(x) = \frac{5x}{x^2+1}$

6.  $f(x) = \frac{18}{(x+3)^4}$

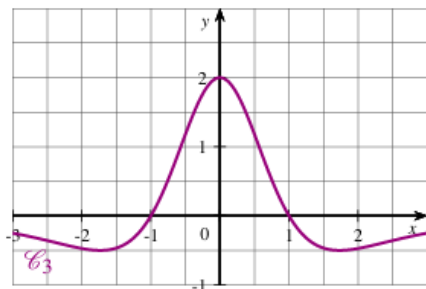
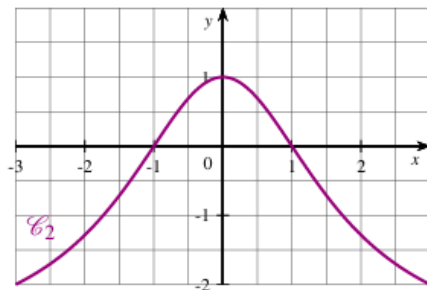
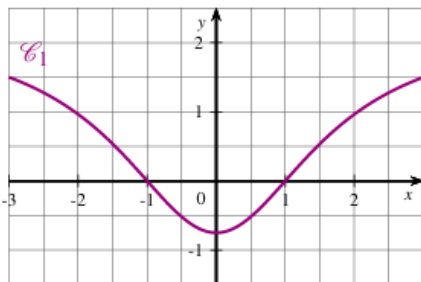
## Exercice 4

On trace ci-dessous, la courbe  $C_f$  représentative d'une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .



1. On note  $f'$  la dérivée de la fonction  $f$ .  
Par lecture graphique, déterminer  $f'(-1)$  et  $f'(0)$ .

2. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  et une autre d'une primitive  $F$  de la fonction  $f$ .  
Déterminer la courbe associée à la fonction  $f'$  et celle qui est associée à la fonction  $F$ .  
Justifier la réponse.



La fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = \frac{18x}{(x^2+3)^2}$

3. Soit  $F$  la primitive de la fonction  $f$  telle que  $F(1) = 0$

a) Montrer que la fonction  $G$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $G(x) = -\frac{9}{x^2+3}$

b) En déduire une expression de  $F(x)$

### Exercice 5

Déterminer une primitive pour chaque fonction suivante :

1.  $f: x \mapsto -xe^{x^2-1}; I = \mathbb{R}$       2.  $f: x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2}; I = \mathbb{R}$

### Exercice 6

Déterminer la primitive pour chaque fonction suivante :

1.  $f(x) = \frac{3}{x-4}$        $F(0) = 5$        $I = ]4; +\infty[$

2.  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$        $F(1) = 2$        $I = ]0; +\infty[$

3.  $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}$        $F(\pi) = 1$        $I = ]-\pi; \pi[$

4.  $f(x) = \tan x$        $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$        $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

5.  $f(x) = \frac{16x+4}{4x^2+2x+1}$        $F(0) = -3$        $I = \mathbb{R}$

### Exercice 7

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 4[$  par :  $f(x) = 10x + \ln(4-x) - \ln 4$ .

On note  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère.

1. Calculer  $f(0)$ .

2. a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ .

b) En déduire que la courbe  $\mathcal{C}_f$  admet une asymptote dont on précisera une équation.

3. a) On appelle  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur l'intervalle  $[0; 4[$ .

Montrer que, pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 4[$ , on a :  $f'(x) = \frac{39-10x}{4-x}$ .

b) Étudier le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[0; 4[$ .

c) Justifier que la fonction  $f$  atteint un maximum en 3,9.

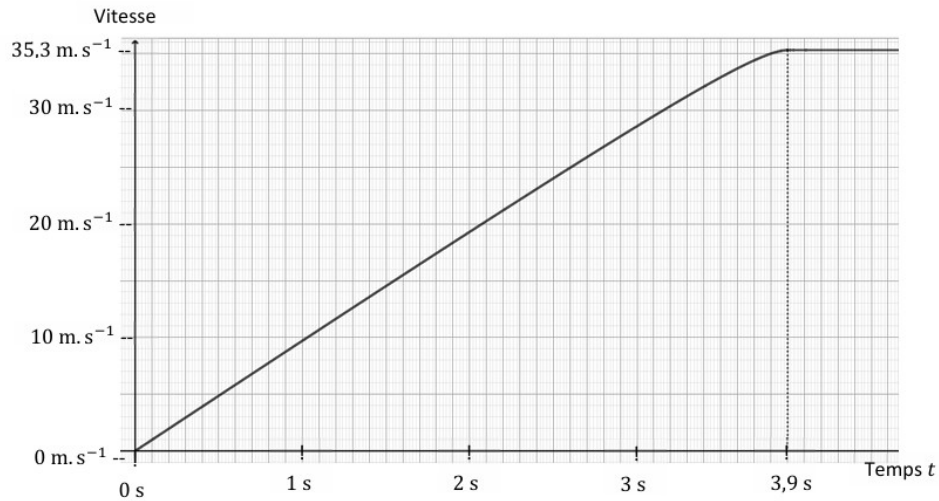
Donner une valeur approchée au dixième de ce maximum.

## Partie B

Un constructeur de voitures électriques affirme que ses modèles peuvent atteindre la vitesse de  $100 \text{ km.h}^{-1}$  en moins de 3 secondes. Pour vérifier cette affirmation, des journalistes ont testé une de ces voitures en réalisant l'essai suivant :

- dans un premier temps, augmentation de la vitesse de  $0$  à  $35,3 \text{ m.s}^{-1}$  (soit environ  $127 \text{ km.h}^{-1}$ ) en  $3,9 \text{ s}$  ;
- dans un deuxième temps, stabilisation de la vitesse à  $35,3 \text{ m.s}^{-1}$ .

L'évolution de la vitesse en fonction du temps est représentée par le graphique ci-dessous :



Durant la phase d'accélération, la vitesse de la voiture est modélisée par la fonction  $f$  étudiée dans la partie A et définie par :

$$f(t) = 10t + \ln(4 - t) - \ln 4 \quad \text{avec } t \in [0 ; 3,9]$$

où  $t$  est exprimé en seconde et  $f(t)$  est exprimée en  $\text{m.s}^{-1}$ .

1. a) Calculer  $f(3)$ .

b) L'affirmation du constructeur est-elle vérifiée ?

2. La distance  $D$ , exprimée en mètre, parcourue durant la phase d'accélération est donnée par la formule :  $D = \int_0^{3,9} f(t) dt$ .

a) On considère la fonction  $F$  définie sur  $[0 ; 3,9]$  par :

$$F(t) = 5t^2 - t + (t - 4) [\ln(4 - t) - \ln 4] .$$

Montrer que la fonction  $F$  est une primitive de  $f$ .

b) Calculer la distance  $D$  arrondie au dixième.