

Chapitre 8 - Suites réelles

Il s'agit d'un chapitre important : il présente la notion de suites que vous connaissez déjà, puis définit rigoureusement la notion de limite, que vous manipulez intuitivement depuis le lycée.

Nos objectif :

- Revoir quelques propriétés des réelles comme les notions délicates de bornes “inf” et “sup”.
- Maîtriser les propriétés “de bases” des suites : variations, bornes, ainsi que les suites élémentaires : arithmétiques, géométriques, voire les deux.
- Définir la limite d'une suite avec des quantificateurs (définition “avec epsilon”). Revoir les règles de calculs et les théorèmes mêlant limites et monotonie.
- Etudier des suites définies par récurrence.

1 Bornes inférieures et supérieures dans $\mathbb{R}$

La définition suivante est très profonde. En quelque sorte, elle permet de contourner la question-piège « quel est le plus petit nombre strictement positifs ? » :

Définition 1 - Bornes supérieure et inférieure. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On définit les bornes supérieures et inférieures de A comme les nombres réels suivants, lorsqu'ils existent :

- La borne supérieure de A , quand elle existe, est le plus petit des majorants de A . On la note $\sup(A)$.
- La borne inférieure de A , quand elle existe, est le plus grand des minorants de A . On la note $\inf(A)$.

Voici quelques exemples simples :

Exemple 2 - Bornes supérieures et inférieures. Déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

1. $[0, 1]$ 2. $]0, 1[$ 3. $]0, +\infty[$ 4. $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ 5. $\mathbb{Q}$ 6. $\{-2\}$ 7. $\{-2, 0\}$

Remarque 3 - Borne supérieure.

- On parle bien du plus petit ou plus grand majorant, lorsqu'il existe, car il est unique. Démontrez-le.
- Les réels $\sup(A)$ et $\inf(A)$ n'appartiennent pas forcément à A .
- En lien avec la remarque précédente, un ensemble peut avoir une borne supérieure (ou inférieure) sans avoir de maximum. Illustrez avec les exemples précédents.

La caractéristion suivante fait des ravages, mais mieux vaut s'y habituer en vue des définitions sur les limites à venir :

Proposition 4 - caractérisation « epsilonlesque » des bornes sup et inf. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit α et β deux nombres réels. Alors

- La borne supérieure est caractérisée par :

$$\beta = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, & x \leq \beta \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, & \beta - \varepsilon < x \end{cases}$$

- La borne inférieure est caractérisée par :

$$\alpha = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, & \alpha \leq x \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, & x < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

Cette caractérisation est assez dure à comprendre au premier abord. Il est essentiel de comprendre, dans la formulation

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \quad \beta - \varepsilon < x$$

de la borne sup que “le x dépend de ε ” : en fait il faut comprendre cette assertion comme un mini-jeu. Vous me donnez un $\varepsilon > 0$ (le plus petit possible), je vous donne un $x \in A$ tel que $\beta - \varepsilon < x$, c’est-à-dire un $x \in A$ dont la distance à β est strictement inférieure à ε .

Exemple 5 - Bornes supérieure et inférieure. Soit $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Montrer avec cette caractérisation que $\inf(A) = 0$. Que vaut $\sup(A)$?

Théorème 6 - Existences des bornes supérieure et inférieure. Toute partie non vide et majorée (respectivement minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (respectivement inférieure).

Lorsqu’un ensemble A non vide n’a pas de majorant, et donc pas de borne supérieure, on note $\sup(A) = +\infty$ (et notion analogue pour la borne inférieure d’un ensemble non minoré).

Le théorème précédent est beaucoup plus subtil qu’il n’y paraît, et sa preuve repose sur la construction de $\mathbb{R}$, qui est hors programme. Ne me dites pas “il suffit de prendre le plus petit des majorants”, car on vient de voir qu’il n’est pas clair qu’un ensemble quelconque admette un plus petit élément.

 **En pratique**  Ce théorème n’est pas constructif, il vous permettra de savoir qu’une borne sup ou inf existe, mais il faudra la trouver avec sa définition ou avec sa caractérisation epsilonlesque.

Les définitions des intervalles (fermés, ouverts, semi-ouvert, semi-ouvert) sont supposées connues.

✗ ATTENTION ! ✗ On ne parle de borne inférieures et supérieures que pour des parties de $\mathbb{R}$, et sûrement pas pour des parties de $\mathbb{C}$ ou d’autres ensembles !

Théorème 7 - Convexité des intervalles. Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall (a, b) \in X \times X, \quad [a, b] \subset X.$$

Cette propriété est appelée “convexité”, elle a des analogues très importants dans le plan ou l’espace.

2 Suites réelles et leur comportement

Cette section est essentiellement faite de rappels du lycée. Ils sont incontournables.

2.1 Définir une suite

Définition 8 - Les suites. On appelle suite réelle toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Une suite est notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou encore $(u_n)_{n \geq 0}$ voire (u_n) .

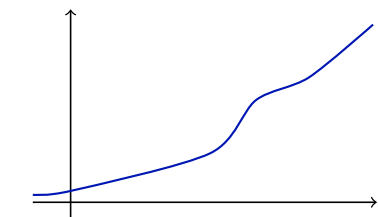
✗ ATTENTION ! ✗ Il y a deux objets à ne pas confondre. Il y a d’un côté la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où l’indice n est muet, et que l’on peut noter $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$, ou à l’aide de n’importe quelle variable muette. D’un autre côté, étant donné $n \in \mathbb{N}$, on a le terme d’indice n , noté u_n , qui est un réel. Confondre les deux, c’est comme confondre une fonction f et $f(x)$ pour un élément x de l’ensemble de définition.

Remarque 9

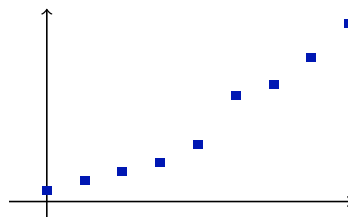
- L’ensemble des suites est parfois noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Une suite peut “démarrer” au rang 1, et on note alors $(u_n)_{n \geq 1}$. Il s’agit alors d’une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$. En fait, elle peut même démarrer à des rangs plus élevés.

Voici les trois grandes manières de définir une suite :

Suites définies explicitement. Définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ explicitement revient à exprimer à l'aide d'une fonction f , définie sur $\mathbb{R}_+$, son terme général : $u_n = f(n)$. De nombreuses propriétés de f se transmettent alors telles quelles à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui n'est finalement que la restriction de f à $\mathbb{N}$. Par exemple : la monotonie, le signe, le caractère majoré/-minoré/borné, la limite de f en $+\infty$.



f est croissante et minorée par 0...



... ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et minorée par 0.

Suites définies par une relation de récurrence « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». On peut définir une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ », où f est une fonction. Une telle définition présente a priori l'inconvénient majeur suivant : pour calculer u_{1000} , il semble nécessaire de calculer les uns après les autres $u_1, \dots, u_{999}, u_{1000}$.

Attention, ces deux manières ne s'excluent pas l'une l'autre, par exemple une suite arithmétique peut être définie par la relation $u_{n+1} = u_n + r$ et la donnée de u_0 , ou par la formule $u_n = u_0 + nr$.

Suites implicites et suites mystérieuses Il y a les suites définies « implicitement », elles sont solutions d'une équation avec un paramètre entier. Par exemple : la suite (u_n) où u_n est la solution de l'équation $x^n + x - 1 = 0$ d'inconnue $x > 0$. Ces suites sont dures car on ne peut souvent calculer aucun terme. On verra des exemples en TD.

Des manières encore plus mystérieuses existent par exemple “la suite des décimales de π ”, ou encore “la suite des nombres premiers”. Ces cas-là peuvent être très durs.

2.2 Suites arithmétiques et géométriques

Définition-Proposition 10 - Suites arithmétique et géométrique.

- Soit $r \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = u_n + r$. Une telle suite est appelée suite arithmétique de raison r , et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr.$$

- Soit $q \in \mathbb{R}$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_{n+1} = qu_n$. Une telle suite est appelée suite géométrique de raison q , et on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n$$

 **En pratique**  De telles suites sont déterminées par leur raison mais aussi par leur terme initial ! Il peut arriver que le terme initial soit donné pour $n = 1$, il faut alors adapter les formules, par exemple $u_n = u_1 + (n-1)r$ dans le cas d'une suite arithmétique. De manière générale, pour deux entiers p et n avec $p \leq n$, on a pour une suite arithmétique :

$$u_n = u_p + r(n - p)$$

tandis que pour une suite géométrique :

$$u_n = u_p q^{n-p}$$

La quantité $n - p$ s'interprète comme le nombre de “pas” à faire pour aller du terme u_p au terme u_n .

Exercice 11 - Somme des termes d'une suite arithmétique ou géométrique. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite arithmétique, ou géométrique. Dans les deux cas, pour deux entiers $p \leq n$ fixés, calculer $\sum_{k=p}^n u_k$ en fonction des données de la suite, de p et n .

Les formules de l'exercice précédent sont à savoir pour le cas géométrique.

Retenez pour $q \neq 1$, la formule suivante, essentielle :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Notez que $n + 1$ représente le nombre de termes dans la somme.

Définition 12 - Suites arithmético-géométriques. Soit $q \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^*$. Une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n + r$$

est appelée suite arithmético-géométrique.

Comme son nom l'indique, une suite arithmético-géométrique vérifie une relation de récurrence qui est une sorte de combinaison des cas arithmétique et géométrique. En particulier, avec les notations de la définition précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante lorsque $q = 0$, arithmétique lorsque $q = 1$ et géométrique lorsque $r = 0$.

En pratique Pour une suite arithmético-géométrique donnée, plutôt que d'apprendre par coeur la formule donnant u_n en fonction de n et des données, on appliquera la stratégie suivante, dès lors que $q \neq 1$ (sinon la suite est arithmétique, et l'on sait faire) :

1. Déterminer le nombre l vérifiant $l = ql + r$, appelé point fixe de la suite.
Cette étape resurgira dans l'étude des suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Soustraire cette relation à $u_{n+1} = qu_n + r$ et en déduire que $(u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q .
3. En déduire une relation entre u_n et l .

On notera que la valeur de l est celle telle que la suite est constante égale à l , dès lors que le premier terme vaut l .

Exemple 13 - Suites arithmético-géométriques. Soit la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$. Déterminez u_n en fonction de n .

2.3 Bornes et variations d'une suite

Définition 14 - Bornes d'une suite. Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite :

- Majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- Minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- Bornée si elle est majorée et minorée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$.

Proposition 15 - Suites bornées et leurs valeurs absolues. Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)_{n \geq 0}$ est majorée :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M.$$

Remarque 16

- Une suite majorée ne possède jamais un seul majorant. En effet, une suite majorée par 2 l'est aussi par 3, π , $\sqrt{17}$, ...
- Les majorants d'une suite sont par définition des constantes. Ainsi, une majoration de u_n par un réel QUI DÉPEND DE n NE montre PAS que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si et seulement si l'ensemble des valeurs de la suite $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.
- Toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée), par u_0 notamment.

Des remarques similaires valent pour les minoration.

 **En pratique**  Pour majorer et/ou minorer une suite, on pourra :

- Montrer des majorations ou des minorations sur u_n . On pourra aussi montrer que $M - u_n \geq 0$ et/ou $u_n - m \geq 0$, mais il faudra au préalable avoir choisi M et/ou m convenablement.
- Lorsque u_n est donnée explicitement par $u_n = f(n)$, avec f une fonction, chercher à majorer et/ou minorer f .
- Faire une preuve par récurrence après avoir conjecturé le résultat (pratique pour les suites définies par récurrence).
- Bourriner en majorant la valeur absolue de u_n (inégalité triangulaire, majorations classiques...).

Exemple 17 Les suites suivantes sont-elles majorées ? minorées ? bornées ?

- $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{-3+n}{n^2}$.
- $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = n$.
- $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par : $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 2$ (on évitera d'avoir recours à la forme explicite).

Définition 18 - Variations d'une suite. Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite :

- Croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- Strictement croissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
- Décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- Strictement décroissante si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.
- Monotone si elle est croissante ou décroissante.
- Strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

 **En pratique**  Le plus direct pour étudier les variations d'une suite est de comparer deux termes successifs. On pourra :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Pour une suite positive qui ne s'annule pas, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
Excellente stratégie si la suite implique un produit ou un quotient.
- Lorsque u_n est donnée explicitement par $u_n = f(n)$, avec f une fonction, étudier les variations de f .
N'hésitez pas à faire un tableau de variation pour f .
- Pour une suite définie par récurrence, des propriétés intermédiaires de la suite peuvent aider.
Utiliser des preuves par récurrence.

A vous de trouver la bonne méthode selon la forme de la suite ! Mais attention, vous devez étudier $u_{n+1} - u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour un indice $n \in \mathbb{N}$ quelconque pour obtenir de la monotonie.

✗ ATTENTION ! ✗ Pour une suite définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$, le fait que f est croissante ou décroissante n'implique pas que la suite le soit ! Le lien est plus subtil, nous en parlerons dans le paragraphe sur les suites définies par récurrence.

Exemple 19 Étudier la monotonie des suites suivantes :

- Une suite arithmétique (on discutera selon la raison).
- Une suite géométrique (on discutera selon la raison).
- $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n + \frac{1}{n}$.
- $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{2^n}{n^2}$.
- $(w_n)_{n \geq 0}$ définie par : $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} = \frac{1}{3}w_n + 2$. On commencera par montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \leq 3$.

Définition 20 - Suites stationnaires. Une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite stationnaire lorsque

$$\exists C \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = C.$$

On dit que la suite est constante à partir d'un certain rang.

On peut très bien adapter cette terminologie « à partir d'un certain rang » pour de nombreuses propriétés des suites. Par exemple, une suite est croissante à partir d'un certain rang lorsque :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

Exemple 21 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$ est positive à partir d'un certain rang.

Dans le même accabit, on sent souvent « qu'une partie » d'une suite possède des propriétés. La définition suivante va nous permettre de rendre cette sensation rigoureuse :

Définition 22 - Suites extraites. Soit une suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$. On appelle suite extraite une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante. Une telle suite est aussi appelée une sous-suite de $(u_n)_{n \geq 0}$

La fonction φ est appelée extractrice. Comme son nom l'indique, elle « extrait » des termes de la suite d'origine. L'utilité est de se concentrer sur certains termes, de sorte que la sous-suite hérite de de certains propriétés.

Exemple 23 - Une suite qui alterne. Soit la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$. Cette suite est-elle monotone ? bornée ?

Soit la fonction $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $\varphi(n) = 2n$. Montrer que la suite extraite associée est constante. Trouver une autre sous-suite de $(u_n)_{n \geq 0}$ constante, dont la valeur est différente.

Exercice 24 - Une extractrice doit avancer. Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$. A quel extractrice correspond le cas d'égalité ?

3 Limites d'une suite

Cette section va être votre entrée dans l'âge adulte (mathématique) : nous allons enfin définir rigoureusement la notion de limite. Vous allez trouver cela indigeste en première lecture. Revenez-y régulièrement car cette définition va resurgir pour les fonctions, les relations de comparaisons etc...

3.1 Définition « epsilonesque »

Attention, cela risque de piquer les yeux :

Définition 25 - Limite d'une suite. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ admet ℓ pour limite (ou encore que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ admet $+\infty$ pour limite (ou encore que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \geq A.$$

3. On dit que $(u_n)_{n \geq 0}$ admet $-\infty$ pour limite (ou encore que $(u_n)_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$) lorsque

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n \leq A.$$

Ces définitions un peu obscures au premier abord satisfont en réalité parfaitement l'intuition que nous avons des limites. Comme pour les bornes sup et inf, notez que dans cette suite de quantificateurs, le N dépend de ε dans le cadre d'une limite finie (et du A pour les limites infinies).

Il est ESSENTIEL de noter que les inégalités sur u_n se réécrivent comme suit :

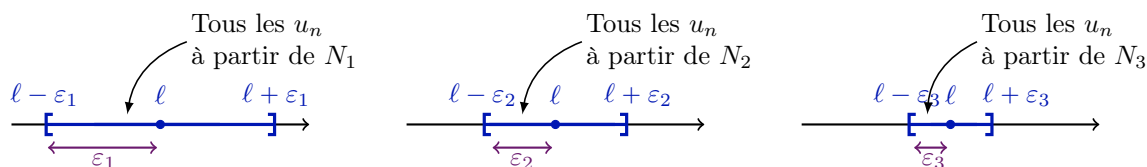
$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon \iff \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon \iff u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$$

$$u_n \geq A \iff u_n \in [A, +\infty[\quad \text{et} \quad u_n \leq A \iff u_n \in]-\infty, A].$$

La notion de limite se traduit ainsi : (u_n) tend vers ℓ si pour tout intervalle de la forme $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, les termes de la suite sont piégés dans cet intervalle à partir d'un certain rang N , qui dépend de ε . Un tel intervalle est appelé un *voisinage* de ℓ . Encore une fois, on peut imaginer un jeu : vous me donnez un $\varepsilon > 0$, et donc un intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ associé, et je vous réponds un rang à partir duquel tous les termes de la suite « rentrent » dans cet intervalle. La notion de limite prend tout son sens lorsque ε est « de plus en plus petit » (voir dessin ci-dessous), et donc l'intervalle de plus en plus *resserré* autour de ℓ .

On a les notions analogues lorsque la limite est $+\infty$ ou $-\infty$.

La figure suivante illustre le cas d'une limite $\ell \in \mathbb{R}$ finie avec trois valeurs ε de plus en plus petite, le principe étant similaire pour une limite infinie.



- Les trois intervalles (voisinages) de la figure ci-dessus ne suffisent pas à « forcer » $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à tendre vers ℓ . C'est pour cela que la définition de la limite commence par « POUR TOUT $\varepsilon > 0$ ».
- Intuitivement, les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne comptent pas lorsque l'on s'intéresse à sa limite. Pour cette raison, la définition de la limite piège u_n dans des voisinages de ℓ uniquement à PARTIR D'UN CERTAIN RANG.
- Intuitivement, plus l'intervalle (le voisinage) est resserré autour de ℓ , plus le rang N est grand.

Exemple 26

- La suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ admet 0 pour limite. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, considérons l'intervalle ouvert $] -\varepsilon, \varepsilon[$ centré en 0. Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n^2} \in] -\varepsilon, \varepsilon[\iff \frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \iff n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.
Ainsi l'intervalle ouvert $] -\varepsilon, \varepsilon[$ contient tous les termes $\frac{1}{n^2}$ à partir du rang $N_\varepsilon = \left\lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil + 1$.
- La suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet aucun réel pour limite. Pour l'instant, la preuve « manuelle » est pénible, et nous verrons bientôt un outil pour montrer que la suite n'a pas de limite. On peut retenir pour l'instant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.

Remarque 27

- Il résulte clairement de la définition qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet le réel ℓ pour limite si et seulement si la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 0 pour limite.
- De même, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 0 pour limite si et seulement si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ admet 0 pour limite.

Théorème 28 - Unicité de la limite.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une limite, alors elle est unique et notée $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

En pratique, pour tout $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la relation $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ est aussi souvent notée $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Définition 29 - Convergence/divergence. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* ou qu'elle *converge* lorsqu'elle possède une limite FINIE. On dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

✗ ATTENTION ! ✗ « Converger » n'est pas « avoir une limite » mais « avoir une limite FINIE » et « Diverger » n'est pas seulement « avoir $\pm\infty$ pour limite » mais également « ne pas avoir de limite ».

Limite finie	Limite $\pm\infty$	Pas de limite
Convergence	Divergence	

Théorème 30 - Convergence et caractère borné. Toute suite convergente est bornée.

✗ **ATTENTION !** ✗

- La réciproque est fausse. En effet, la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée (entre -1 et 1) sans être convergente.
- Une suite non bornée n'admet pas nécessairement $\pm\infty$ pour limite. En effet, la suite de terme général $(-1)^n n$ n'est pas bornée et n'a pas de limite (distinguer les termes pairs et impairs).

3.2 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ EXISTENT. Dans les tableaux ci-après, le symbole **???** indique une *indétermination*, i.e. un cas pour lequel il n'est pas possible de conclure a priori, et le symbole ∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

Somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	???

Produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$ ou ∞	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	∞	∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	$\ell \ell'$	∞ + règle des signes	???

Inverse

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	∞	0^+ ou 0^-	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	∞ + règle des signes	???

Où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$ (resp. 0^-) signifie que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ (resp. < 0) à partir d'un certain rang.

Des tableaux pour le produit et l'inverse, découle celui pour le quotient.

Quotient

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	∞	ℓ	∞	$\ell \neq 0$ ou ∞	ℓ ou ∞
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\ell' \neq 0$	∞	∞	0^+ ou 0^-	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞ + règle des signes	0	???	∞ + règle des signes	???

Ainsi, lorsqu'il n'y a pas d'indétermination, on peut retenir que :

« La limite de la somme (resp. du produit, resp du quotient) est la somme (resp. le produit, resp. le quotient) des limites. »

Les tableaux ci-dessus ont mis en avant les *formes indéterminées* « $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{1}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$ » (qu'on évitera d'écrire en toutes lettres dans une copie sans de multiples guillemets). Autrement dit, le symbole **???** signifie qu'en effectuant une opération dans l'un de ces cas, on peut tomber a priori sur N'IMPORTE QUEL RÉSULTAT.

Exemple 31 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. **RÉSULTAT À CONNAÎTRE !**

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$. Or $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \ln'(1) = 1$, ainsi, par composition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$. Le résultat s'en suit, puisque $\lim_{t \rightarrow x} e^t = e^x$.

✗ ATTENTION ! ✗ Cet exemple prouve que l'on peut avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ sans avoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 1$. Autrement dit, $1^{+\infty}$ est une nouvelle forme indéterminée. Notons au passage que 0^0 est aussi une forme indéterminée pour les limites par opérations.

Démonstration. Nous nous contentons de démontrer quelques-uns des résultats des tableaux précédents, les cas restants étant similaires.

- **Somme $\ell + \ell'$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| = |(u_n - \ell) + (v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'|$. Or, par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N et $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang N' . Alors, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.
- **Somme $\ell + (+\infty)$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < 1$, à partir d'un certain rang N , donc, en particulier, $u_n > \ell - 1$ et $v_n > A - \ell + 1$, à partir d'un certain rang N' . Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $u_n + v_n > (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A$.
- **Somme $+\infty + (+\infty)$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$, à partir d'un certain rang N , et $v_n > 0$, à partir d'un certain rang N' . Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $u_n + v_n > A + 0 = A$.
- **Produit $\ell\ell'$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, $|(u_n v_n) - (\ell\ell')| = |(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')| \leq |u_n - \ell||v_n| + |\ell||v_n - \ell'|$. À présent, par hypothèse, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente donc bornée, disons par K , et $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2K}$, à partir d'un certain rang N . En outre, $|v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)}$ à partir d'un certain rang N' . Alors, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$,

$$|u_n v_n - \ell\ell'| \leq |u_n - \ell||v_n| + |\ell||v_n - \ell'| < \frac{\varepsilon}{2K}K + |\ell| \frac{\varepsilon}{2(|\ell| + 1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

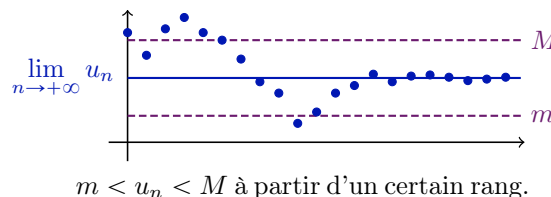
- **Produit $\ell \times (+\infty)$ avec $\ell > 0$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n - \ell| < \frac{\ell}{2}$, à partir d'un certain rang N , donc, en particulier, $u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$ et $v_n > \frac{2A}{\ell}$, à partir d'un certain rang N' . Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $u_n v_n > \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell} = A$.
- **Produit $+\infty \times (+\infty)$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$. Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n > A$, à partir d'un certain rang N , et $v_n > 1$, à partir d'un certain rang N' . Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $u_n v_n > A \times 1 = A$.
- **Inverse $\frac{1}{\ell}$ avec $\ell \neq 0$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$, notamment $u_n \neq 0$, à partir d'un certain rang N . Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq N$, $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \times |\ell|}$. Or, par hypothèse, $|u_n - \ell| < \min\left\{\frac{|\ell|}{2}, \frac{\varepsilon\ell^2}{2}\right\}$, à partir d'un certain rang N' , donc, en particulier, $|\ell| - |u_n| \leq |u_n - \ell| < \frac{|\ell|}{2}$, d'où $|u_n| > |\ell| - \frac{|\ell|}{2} = \frac{|\ell|}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n| \times |\ell|} < \frac{\frac{\varepsilon\ell^2}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon$.
- **Inverse $\frac{1}{+\infty}$.** On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $u_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, à partir d'un certain rang N . Ainsi, pour tout $n \geq N$, $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} < \varepsilon$.

- **Inverse** $\frac{1}{0^+}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$, notamment $u_n > 0$, à partir d'un certain rang N . Soit $A > 0$. Par hypothèse, $|u_n| < \frac{1}{A}$, à partir d'un certain rang N' . Ainsi, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{|u_n|} > A$. ■

3.3 Limites et inégalités

Théorème 32 - Limites et inégalités strictes. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle possédant une limite et $m, M \in \mathbb{R}$.

- (i) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.
- (ii) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.



En particulier, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \neq 0$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a le signe de ℓ à partir d'un certain rang.

Théorème 33 - Limites et inégalités larges. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles CONVERGENTES.

$$\text{Si } u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang, alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Ce résultat est utilisé le plus souvent lorsque l'une des deux suites est constante.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, en supposant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) < 0$. Le théorème précédent affirme alors que $v_n - u_n < 0$ à partir d'un certain rang – contradiction ! ■

✗ ATTENTION ! ✗ Le résultat précédent est faux avec des inégalités STRICTES ! Par exemple, $\frac{1}{n} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Autrement dit, les inégalités strictes deviennent LARGES après passage à la limite.

Exemple 34 Si une suite convergente prend à partir d'un certain rang ses valeurs dans le segment $[a, b]$, alors sa limite appartient à $[a, b]$.

En effet, il suffit d'appliquer le théorème 33 à la suite qui converge et aux suites constantes égale à a ou à b .

Exemple 35 Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers un réel ℓ , alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$.

En effet, soit $m \in \mathbb{N}$, alors, par croissance de la suite, pour tous $n \geq m$, $u_m \leq u_n$, et il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$.

4 Théorèmes d'existence de limite

L'existence d'une limite n'est jamais acquise, et doit souvent être montrée *avant* de manipuler ladite limite.

4.1 Les théorèmes d'encadrements (gendarmes)

Théorème 36 - Théorèmes de type gendarme. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

(i) **Théorème d'encadrement :**

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \ell$ et si $m_n \leq u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ EXISTE et vaut ℓ .

(ii) **Théorème de minoration :**

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = +\infty$ et si $u_n \geq m_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ EXISTE et vaut $+\infty$.

(iii) **Théorème de majoration :**

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ EXISTE et vaut $-\infty$.

Démonstration.

- (i) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $m_n \leq u_n \leq M_n$ à partir d'un certain rang N , $m_n > \ell - \varepsilon$ à partir d'un certain rang N' et $M_n < \ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang N'' . Alors, pour tout $n \geq \max\{N, N', N''\}$, $\ell - \varepsilon < m_n \leq u_n \leq M_n < \ell + \varepsilon$, soit $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- (ii) Soit $A > 0$. Par hypothèse, $u_n \geq m_n$ à partir d'un certain rang N et $m_n > A$ à partir d'un certain rang N' . Alors, pour tout $n \geq \max\{N, N'\}$, $u_n \geq m_n > A$, soit $u_n > A$.

✗ ATTENTION ! ✗ Le théorème d'encadrement ne doit pas être vu comme un simple passage à la limite dans des inégalités larges. Quand on passe à la limite dans une inégalité large, on sait déjà que chaque membre a une limite. Dans le théorème d'encadrement, au contraire, seules les limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$ sont réputées exister initialement et être égales, l'existence de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ en découle alors !

Par exemple, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -2 \leq (-1)^n \leq 2,$$

mais la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Exemple 37 Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 1. On pourra majorer (resp. minorer) cette somme par le plus grand (resp. petit) terme multiplié par le nombre de terme, n .

En effet, on majore (resp. minore) cette somme par le plus grand (resp. petit) terme multiplié par n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$, d'où la conclusion par encadrement.

Exemple 38 $\lim_{n \rightarrow +\infty} n! = +\infty$ par minoration, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

✗ ATTENTION ! ✗ Si on montre que $u_n \leq M_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty$, on ne peut rien conclure sur u_n . « Montrer qu'on est plus petit que l'infini n'avance à rien »

Corollaire 39 - Théorème d'encadrement bis. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$, à partir d'un certain rang, et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. À partir d'un certain rang, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon_n$, soit $\ell - \varepsilon_n \leq u_n \leq \ell + \varepsilon_n$, or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell - \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ell + \varepsilon_n = \ell$ et on conclut par encadrement.

Corollaire 40 - Produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $K \geq 0$ tel que $|u_n| \leq K$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui implique $0 \leq |\varepsilon_n u_n| \leq K |\varepsilon_n|$. Alors, par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varepsilon_n u_n| = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n u_n = 0$. ■

Exemple 41 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. En effet, la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Théorème 42 - Limite d'une suite géométrique. On a les limites suivantes pour une suite géométrique :

Raison q	$q > 1$	$q = 1$	$ q < 1$	$q \leq -1$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$	$+\infty$	1	0	Pas de limite

Démonstration.

- **Cas où $a > 1$.** $a^n = (1 + (a - 1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a - 1)^k = 1 + n(a - 1) + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (a - 1)^k \stackrel{a > 1}{\geq} n(a - 1)$, pour tout $n \geq 2$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a - 1) = +\infty$, puisque $a > 1$, d'où le résultat par minoration.
- **Cas où $|a| < 1$.** Le cas $a = 0$ est clair et peut donc être exclu. Alors $\frac{1}{|a|} > 1$, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = +\infty$, en vertu du cas précédent. Par passage à l'inverse, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a^n| = 0$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$.
- **Cas où $a = -1$.** On a déjà remarqué que la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite (cf. exemple 26).
- **Cas où $a < -1$.** Puisque $a^2 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{2n} = +\infty$, d'après le premier cas, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{2n+1} = -\infty$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne saurait donc avoir une limite. ■

Exemple 43 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive et $\eta \in]0, 1[$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \eta$, à partir d'un certain rang. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

En déduire que pour tout $q \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.

En effet, notons N le rang à partir duquel la majoration par η est valable. Alors, pour tout $n > N$, on a, par télescopage,

$$0 < u_n = u_N \prod_{k=N}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq u_N \prod_{k=N}^{n-1} \eta = u_N \eta^{n-N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

puisque $\eta \in]0, 1[$. D'où le résultat par encadrement.

Démonstration. Le résultat est clair pour $q = 0$. Si $q \neq 0$, posons $u_n = \frac{|q|^n}{n!} > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|q|}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|q|}{n+1} = 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang. L'exemple précédent permet alors de conclure. ■

Remarque 44 Les résultats de croissance comparée usuels concernant les fonctions restent naturellement valables pour les suites. Précisément, pour tous réels $a, b > 0$ et $q > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^b}{n^a} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0,$$

en remarquant que $q^n = e^{n \ln q}$.

4.2 Les théorèmes de monotonie

Le théorème de la limite monotone est LE théorème d'EXISTENCE par excellence.

Théorème 45 - Théorème de la limite monotone. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ EXISTE.

Précisément,

- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée (resp. décroissante minorée), alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;
- si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante NON majorée (resp. décroissante NON minorée), alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration. Quitte à considérer $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, contentons nous de traiter le cas d'une suite croissante.

- Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée. L'ensemble $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et possède donc une borne supérieure ℓ dans $\mathbb{R}$ en vertu de la propriété de la borne supérieure. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de ℓ , $\ell - \varepsilon$ ne majore pas $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. Alors, par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > \ell - \varepsilon$, or on a aussi $u_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$, soit finalement $|u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non majorée. Soit $A > 0$. Comme A ne majore pas $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Alors, par croissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq u_N > A$.

■

✗ **ATTENTION ! ✗** Une suite croissante majorée par M converge... MAIS PAS NÉCESSAIREMENT VERS M , qui n'est qu'un majorant parmi d'autres !

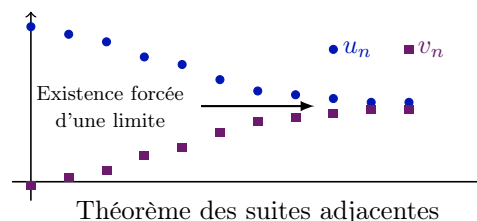
Exemple 46 La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie, pour tout $n \geq 0$, par $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!}$, est convergente. (Pour majorer, majorer chaque terme $\frac{1}{p!}$ par une suite dont vous savez calculer la somme).

En effet, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$, et majorée, puisque, pour tout $p \geq 2$, $p! = 2 \times 3 \times \dots \times p \geq 2^{p-1}$ et ainsi, pour tout $n \geq 2$,

$$u_n \leq 1 + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2^{p-1}} \leq 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3.$$

Définition 47 - Suites adjacentes. Deux suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites *adjacentes* lorsque l'une de ces suites est croissante, l'autre décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Remarque 48 Deux suites adjacentes sont deux suites qui viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant et qui finissent par s'écraser l'une contre l'autre, comme le suggère le théorème des suites adjacentes.



Théorème 49 - Théorème des suites adjacentes. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

Si elles sont adjacentes, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites convergentes de même limite ℓ .

Précisément, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante, alors, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, $u_m \leq \ell \leq v_n$.

Démonstration. Sans perte de généralité, supposons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.

- Montrons d'abord que $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$, soit $u_N - v_N > 0$. Alors, pour tout $n \geq N$, sachant que $u_N \leq u_n$ (croissance) et $v_n \leq v_N$ (décroissance), $u_n - v_n \geq u_N - v_N$. En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) \geq u_N - v_N > 0$ – contradiction !

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 , puisque $u_n \leq v_n \leq v_0$, elle converge donc vers un réel ℓ_u , d'après le théorème de la limite monotone. Similairement, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par u_0 , elle converge vers un réel ℓ_v . L'égalité $\ell_u = \ell_v$ résulte alors de $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
- Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $u_m \leq \ell_u = \ell_v \leq v_n$ exprime simplement le fait que la suite croissante $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est majorée par sa limite et la suite décroissante $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par la sienne.

■

Remarque 50 Le théorème des suites adjacentes permet d'affirmer que les deux suites convergent vers la même limite ℓ . En revanche, déterminer cette limite est souvent un problème plus difficile. À minima l'encadrement $u_n \leq \ell \leq v_n$ fournit-il des valeurs approchées de ℓ à une précision quelconque, puisque la différence $v_n - u_n$ tend vers 0.

Exemple 51 Montrer que les suite (u_n) de l'exercice 46 et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$ sont adjacentes.

4.3 Lien avec les suites extraites

Proposition 52 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ qui admet une limite (finie ou infinie). Alors toute suite extraite de $(u_n)_{n \geq 0}$ admet la même limite.

 **En pratique**  Cette proposition est souvent utilisée dans sa version contraposée : si vous trouvez des suites extraites distinctes qui admettent des limites différentes, alors la suite initiale n'a pas de limite. C'est très pratique pour les suites que l'on arrive à décrire avec des conditions sur n .

Exemple 53 Montrer que la suite définie par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

5 Suites définies par récurrence

5.1 Suites récurrentes linéaires homogènes du second ordre

Il s'agit des suites pour lesquels un terme s'exprime en fonction de deux précédents, selon une relation linéaire.

Définition-théorème 54 - Suite récurrente linéaire homogène du second ordre. Soit $b, c \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$. Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *récurrente linéaire homogène du second ordre* lorsqu'elle vérifie

$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+2} = bu_{n+1} + cu_n. \quad (1)$$

On lui associe son *polynôme caractéristique* $X^2 - bX - c$.

La forme du terme général des suites vérifiant (1) est alors dictée par le discriminant du polynôme caractéristique :

Discriminant Δ de $X^2 - bX - c$	Racine(s) de $X^2 - bX - c$	Forme des solutions
$\Delta > 0$	r et s	$(\lambda r^n + \mu s^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	r	$((\lambda n + \mu) r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta < 0$	$r e^{\pm i\theta}$	$(r^n (\lambda \sin(n\theta) + \mu \cos(n\theta)))_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Démonstration. On peut faire une preuve directe calculatoire, mais on l'admet pour l'instant. Une vision très profonde et générale sera donnée dans les chapitres d'algèbre linéaire. ■

 **En pratique**  Les valeurs de λ et μ sont obtenues en considérant les termes initiaux u_0 et u_1 .

Exemple 55 - Suite de Fibonacci. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \\ u_0 = 0 & \text{et } u_1 = 1 \end{cases}$$

Déterminer explicitement u_n en fonction de n .

Exemple 56 Il existe une unique suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. Elle vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$.

En effet, le discriminant du polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$ est $\Delta = -3$ et les deux racines complexes conjuguées sont $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$. Il existe donc deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda \cos \frac{n\pi}{3} + \mu \sin \frac{n\pi}{3}$. Or $u_0 = u_1 = 1$, donc $\lambda = \frac{\lambda + \sqrt{3}\mu}{2} = 1$ et finalement $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

5.2 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.

L'étude générale de ce genre de suite, dite suite *itérative*, est délicate, car même pour des fonctions f simples, la suite peut être très mystérieuse.

Il est sage de commencer par le cas d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, si la fonction f a un domaine de définition plus petit, la première itération peut être définie en prenant u_0 dans le domaine de définition, mais rien ne garantit que $u_1 = f(u_0)$ soit encore dans ce domaine de définition ! Je vous invite à essayer de calculer les premiers termes de la suite "définie" par $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$ et $u_0 = 2$.

Il est tout de même possible d'étudier le cas d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, avec $u_0 \in I$, mais il faudra alors imposer que I est stable par f , ce qui est défini par la condition $f(I) \subset I$:

Proposition 57 - Intervalle stable et suite définie par récurrence. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tel que I est stable par f , c'est-à-dire :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

Alors la donnée de $u_0 \in I$ et d'une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ définit bien une suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
On a de plus : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Exemple 58 Montrer qu'on peut bien définir une suite par la donnée de $u_0 \in [0, 1]$ et de relation $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$.

Proposition 59 - Monotonie et signe de $f(x) - x$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors

- Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geq x$, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
- Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \leq x$, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Ainsi, la monotonie peut être déduite d'un étude de signe de $x \mapsto f(x) - x$.

Exemple 60 - Itération du sinus. Etudier la monotonie de la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sin u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}.$$

Exercice 61 - Monotonie et croissance de f . Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Supposons f croissante. Alors la monotonie de (u_n) dépend de la position de u_0 et de u_1 :

- Si $u_0 < u_1$, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
- Si $u_1 < u_0$, alors la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

Exemple 62 - Itération par un polynôme. Soit la suite définie par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{6}(u_n^2 + 8) \\ u_0 > 0 \end{cases}.$$

Montrer que les intervalles $[0, 2]$, $[2, 4]$ et $[4, +\infty[$ sont stables par f . Illustrer graphiquement. Selon l'appartenance de u_0 un de ces intervalles, donner le signe de $u_1 - u_0$. En déduire la monotonie de (u_n) selon u_0 .

✗ ATTENTION ! ✗ On se gardera bien de dire “puisque f est croissante, la suite l’est aussi”. Comme on vient de le voir, la situation est plus subtile que cela.

On peut se demander que dire si la fonction f est décroissante. Dans ce cas-là, à chaque itération, les positions des termes consécutifs sont échangés. On peut donc “sauter” un terme sur 2 et étudier les suites auxiliaires (u_{2n}) et (u_{2n+1}) , qui sont de monotonies opposées. La situation se complique...

Exemple 63 - Itération par une fonction inverse. Soit la suite définie par

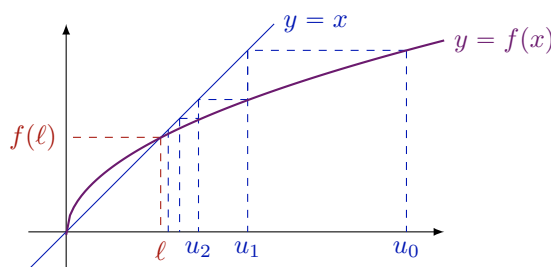
$$\begin{cases} u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}.$$

Montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f . Etudier la suite extraite d'indices paires et celle d'indice impaire, et en déduire la limite de (u_n) .

Proposition 64 - Convergence vers les points fixes. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers ℓ , on a nécessairement $\ell = f(\ell)$.

✗ ATTENTION ! ✗ Cette proposition est très pratique pour déterminer les limites possibles d’une suite... mais il faudra également montrer qu’elle converge si on veut conclure ! C’est le moment de croiser les outils, comme par exemple le théorème de la limite monotone.

Sur la figure ci-contre, la suite $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 > 1$. On construit graphiquement la suite en reportant les valeurs de la suite sur la courbe de la fonction f puis sur la première bissectrice afin de la replacer sur l’axe des abscisses. La fonction est croissante, mais la suite décroît, puisqu’elle reste dans une zone où $f(x) \leq x$. Elle converge vers une solution ℓ de l’équation $x = f(x)$, intersection de la courbe de f et de la première bissectrice. Ces propriétés seront montrés dans un exercice ci-dessous.



Exemple 65 Montrer que la suite de l'exercice 60 converge et donner sa limite.

Exemple 66 Soit la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$. Si $u_0 = 0$, alors la suite converge vers 0, et si $u_0 > 0$, alors la suite converge vers 1.

En effet,

- $\mathbb{R}_+$ est stable par f , ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par 0.
- Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. On a $g(x) \geq 0 \iff x \in [0, 1]$, d'où le tableau ci-contre.

Ainsi, 0 et 1 sont les points fixes de f et les intervalles $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$ sont stables par f .

x	0	1	$+\infty$
g	0	+	0
f	0	$\longrightarrow$	$1 \longrightarrow +\infty$

- Distinguons alors trois cas, selon la valeurs de u_0 .
 - ★ Si $u_0 = 0$. La suite est stationnaire à 0 et converge donc vers 0.
 - ★ Si $u_0 \in]0, 1]$. La suite est à valeurs dans $[0, 1]$ et donc majorée et croissante, puisque $g \geq 0$. Sa limite ℓ vérifie $\ell \in [u_0, 1]$ et, par continuité de f sur cet intervalle, ne peut-être qu'un point fixe de f et donc nécessairement 1.
 - ★ Si $u_0 \geq 1$. La suite est à valeurs dans $[1, +\infty[$ et donc minorée et décroissante, puisque $g \leq 0$. Sa limite ℓ vérifie $\ell \in [1, +\infty[$ et, par continuité de f sur cet intervalle, ne peut-être qu'un point fixe de f et donc nécessairement 1.

Exemple 67 Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ diverge vers $+\infty$.

En effet, en notant f la fonction $x \mapsto x^2 + x$:

- Comme $[1, +\infty[$ est stable par f et $u_0 \in [1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et minorée par 1.
- Comme $f(x) \geq x$, pour tout $x \in [1, +\infty[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et possède donc une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, d'après le théorème de la limite monotone.
- Supposons par l'absurde que $\ell \in \mathbb{R}$. Alors, f étant continue sur $\mathbb{R}$, $f(\ell) = \ell$, soit $\ell^2 + \ell = \ell \iff \ell = 0$. Or $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 1, donc $\ell \geq 1$ – contradiction !

Stratégie pour l'étude d'une suite définie par récurrence Par étude, on entend la recherche du comportement avec en ligne de mire la détermination d'une limite.

On s'intéresse donc à une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Les préliminaires :

- Vérifier que la suite est bien définie, en particulier si la fonction f a des valeurs interdites, chercher un domaine de définition stable (Proposition 57).
- On ne sait jamais, voir si on peut avoir une formule explicite : suite arithmétique, géométrique (ou arithmético géométrique), on peut-être légèrement plus compliqué (factorielle...). Dans ce cas-là, l'exo est quasiment fini !

2. Esquisser le dessin de la suite (voir figure ci-dessus) : on trace la courbe de f et la première bissectrice, et construit de proche en proche les termes de la suite sur l'axe des abscisses. Il peut être utile à ce stade de chercher les points fixes de f en résolvant $f(\ell) = \ell$, ce qui sera utile pour l'étude théorique.

On peut calculer ses premiers termes « pour s'échauffer ». On conjecture son comportement (toujours bien d'avoir une idée sur ce que l'on va démontrer). Si on a un outil numérique à disposition, on peut implémenter la suite à l'aide d'une boucle *for*.

3. Etude qualitative

- Monotonie. On peut étudier $u_{n+1} - u_n$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ directement, ou bien s'aider de la fonction $x \mapsto f(x) - x$, voir Proposition 59. On peut aussi chercher des intervalles stables où f est monotone, puis procéder par récurrence (voir exercice 61), en ayant en tête que la situation peut être subtile.
- Recherche de bornes. On peut intuitiver des bornes et faire des preuves par récurrences, ou rechercher des sous-ensembles stables du domaine de définition. Si on pense que la suite est non bornée, on peut essayer de le démontrer (par exemple par l'absurde, en lien avec l'étude des points fixe, voir exercice 67).
- Si les deux étapes précédentes ont réussi, on peut conclure avec un théorème de limite monotone.

4. On combine l'existence d'une limite avec la connaissance des solutions de $f(\ell) = \ell$: on utilise la proposition 64, sans oublier de citer la continuité de f . Si on a échoué à montrer l'existence d'une limite, on peut tout de même utiliser cette proposition, mais en faisant l'hypothèse que la suite converge (ce qui peut être faux...).

Exercice 68 - Méthode de Newton sur un exemple.

Etant donné $A > 0$, on cherche à approcher $\sqrt{A}$, en construisant une suite qui tend vers $\sqrt{A}$ « rapidement ». Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x \mapsto x^2 - A$. On va construire et étudier une suite qui converge vers un zéro de g :

1. (Méthode de Newton). Soit $u_0 > \sqrt{A}$, supposons $u_n \in \mathbb{R}$ construit, on construit u_{n+1} comme suit :
 - a. On considère la tangente à la courbe de g au point d'abscisse u_n . Rappeler son équation.
 - b. On note u_{n+1} l'abscisse de l'intersection de cette tangente avec l'axe (Ox) . Illustrer.
 - c. Montrer qu'on a la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right),$$

et que cette relation définit bien une suite récurrente.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante, minorée par $\sqrt{A}$, et converge vers $\sqrt{A}$.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \sqrt{A}| \leq \frac{1}{2\sqrt{A}} |u_n - \sqrt{A}|^2 \quad (\text{convergence « quadratique »}).$$

4. Supposons pour simplifier que $A \geq \frac{1}{4}$, que déduire de l'inégalité ci-dessus ?

La première étape de l'exemple ci-dessus est une méthode numérique pour approcher, sous des hypothèses assez générales, une solution de l'équation $g(x) = 0$. Supposons que cette équation possède une solution notée x^* , c'est-à-dire que $g(x^*) = 0$, et que de plus $g'(x^*) \neq 0$. On part d'une valeur u_0 assez proche d'une solution x^* , et on définit la suite

$$u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}.$$

Il est naturel de penser que (u_n) converge vers x^* (et plus dur de voir que (u_n) converge « vite » vers x^* , voir S2). Cet algorithme, appelé « méthode de Newton », est assez facile à implémenter sur ordinateur :

En entrée du code ci-dessous : une fonction g , sa dérivée gp (et oui, python ne calcule pas de dérivée facilement), un point de départ a , et une margeur d'erreur err .

```

1 #Méthode de Newton pour résoudre g(x)=0
2 def newton(g, gp, a, err):
3     delta = 1
4     while delta > err
5         x = a - g(a)/gp(a)
6         delta = abs(x - a)
7         a = x
8     return a

```

6 Suites à valeurs complexes

Ce chapitre est une brève extension au cas complexe des notions abordées. Il n'y a pas de vraie difficulté, mais des pièges, on retiendra en particulier les points suivants :

- Les notions de monotonie n'existent plus.
- Les notions impliquant des valeurs absolues, comme la limite finie, gardent un sens en utilisant le module.
- Les limites infinies n'ont plus de sens.
- Une suite complexe est déterminée par sa partie réelle et sa partie imaginaire, qui sont deux suites réelles.

Définition 69 On appelle suite complexe une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On la note encore $(u_n)_{n \geq 0}$, où, pour n fixé, $u_n \in \mathbb{C}$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n = x_n + iy_n$, où $(x_n)_{n \geq 0}$ et $(y_n)_{n \geq 0}$ sont les suites parties des parties réelles et imaginaires respectivement.

Définition 70 Une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée lorsque la suite réelle $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire :

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Une suite complexe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite un complexe $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

✗ ATTENTION ! ✗ Dans ces définitions, c'est bien du MODULE d'un nombre complexe que l'on parle. On évitera bien de parler de minimum ou de maximum pour les nombres complexes, et de limites infinies. En particulier, on dit qu'une suite complexe converge lorsqu'elle admet une limite finie, et sinon on dira qu'elle diverge.

Théorème 71 - Suites des parties réelles et imaginaires.. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre complexe. On pose $x_n = \operatorname{Re}(u_n)$ et $y_n = \operatorname{Im}(u_n)$. Soit $\ell \in \mathbb{C}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \operatorname{Re}(\ell) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \operatorname{Im}(\ell) \end{cases}$$

Le théorème précédent est plus subtil qu'il n'y paraît, car la définition d'une limite de suite complexe fait intervenir le module.

Théorème 72 Les résultats suivants restent vrais dans le cadre des suites complexes :

- Ceux de la section 3.1 (Toute suite convergente est bornée, unicité de la limite).
- Les règles de calculs de la section 3.2 dans le cas des limites finies.
- La section 4.3 (toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite).

Exemple 73 - Une suite qui tourne. Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$u_n = e^{i \frac{n\pi}{3}}.$$

Exhiber des sous-suites qui convergent, mais montrer que la suite diverge.

On peut également définir des suites récurrentes linéaires à coefficient complexes :

Théorème 74 - Suite récurrente linéaire homogène du second ordre, le retour complexe. Ceci est l'extension du théorème 54 au cas complexe. L'étude d'une suite récurrente linéaire homogène du second ordre à coefficients complexes, de la forme (1), mais avec $b, c \in \mathbb{C}$ et $c \neq 0$, s'étudie comme pour le cas réel, à la différence que lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique vérifie $\Delta < 0$, les formules coïncident alors avec le cas $\Delta > 0$:

Discriminant Δ de $X^2 - bX - c$	Racine(s) de $X^2 - bX - c$	Forme des solutions
$\Delta \neq 0$	r et s	$(\lambda r^n + \mu s^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$	r	$((\lambda n + \mu) r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

En pratique Pour une suite réelle dont le polynôme caractéristique a des racines complexes, on peut utiliser les formules d'Euler pour voyager entre les expressions obtenue en voyant la suite comme étant réelle ou complexe. S'entraîner sur l'exercice 56.

Exercice 75 Soit la suite complexe définie par

$$u_{n+1} = \frac{(i-1)u_n + 6i}{u_n + 2 - i}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$v_n = \frac{u_n - 2i}{u_n + 3}$$

est une suite géométrique dont on déterminera la raison.

En déduire une expression du terme général de $(u_n)_{n \geq 0}$ et étudier sa convergence.

7 Un dernier passage par les réels

Dans cette section on voit l'importance des suites dans la structure et les propriétés “profondes” de $\mathbb{R}$.

Proposition 76 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors

$$\beta = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \beta \\ \text{il existe une suite } (x_n)_{n \geq 0} \text{ de } A \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \beta. \end{cases}$$

et

$$\alpha = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, \alpha \leq x \\ \text{il existe une suite } (x_n)_{n \geq 0} \text{ de } A \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha. \end{cases}$$

Définition 77 - Partie entière. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entière de x , notée $[x]$, ou encore $E(x)$, l'entier n qui vérifie

$$n \leq x < n + 1.$$

L'existence de cet entier est subtile, et découle de l'existence d'une borne inférieure pour des ensembles minorés... nous l'admettons. Mais il s'agit de la troncature vue en petite classe.

Exemple 78 - Calcul de partie entière. Calculer $[0]$, $[0, 5]$, $[\sqrt{2}]$ (le démontrer), $[2, 99]$, $[-0, 5]$, $[-1]$, $[-\pi]$.

Exemple 79 - Fonction partie entière. Montrer que la fonction partie entière définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto [x]$ est croissante et la représenter. Est-elle strictement croissante ?

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 \leq [x] \leq x.$$

Illustrer graphiquement.

Proposition 80 - Approximation décimale. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique entier $p_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}.$$

On a $p_n = [10^n x]$. Le nombre décimal $\frac{p_n}{10^n}$ est appelé approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} , tandis que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'appelle développement décimal de x .

Exemple 81 - Développement décimal de π . Pour $x = \pi$, donner les premiers termes de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant votre culture.

Notez que les nombres décimaux, parfois notés $\mathbb{D}$, sont définis comme les nombres de la forme $\frac{p}{10^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On vient de voir que tout nombre réels peut être approché par une suite de nombre décimaux. En terme savant (et hors programme), on dit que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et donc puisque tout décimal est aussi rationnel que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Etant donné un nombre irrationnel (par exemple, $\sqrt{2}$, π , e , ...), l'approcher par une suite de nombres rationnels est un problème souvent dur et historique.