

Espaces préhilbertiens réels – TD₇

Produits scalaires et bases orthonormées

Exercice 1

On note $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout $(f, g) \in E^2$, on note :

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt.$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .

Exercice 2

On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on considère l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par : $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t) \times Q(t) \times e^{-t} dt$.

1. Soit $(P, Q) \in E^2$. Montrer que l'intégrale $\varphi(P, Q)$ converge.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .
3. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\varphi(X^p, X^q)$.
4. Calculer $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (t^3 - a \times t^2 - b \times t - c)^2 \times e^{-t} dt$.

Exercice 3

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top \times B)$.

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\text{tr}(A))^2 \leq n \text{tr}(A^\top A)$. Étudier le cas d'égalité.
3. Montrer que la famille constituée des vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une base orthonormée pour le produit scalaire précédent.
4. Montrer que la norme associée à ce produit scalaire vérifie : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \|A \times B\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Exercice 4

On note $\vec{u}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (2, 0, 1)$ et $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$.

1. Vérifier que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Est-elle orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$? Si non, l'orthonormaliser.

Exercice 5

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que :

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E .

Exercice 6

Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$ et (u, v) une famille libre de E .

Pour tout $x \in E$, on note $f(x) = \langle u, x \rangle v + \langle v, x \rangle u$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u, v)^\perp$.
3. On note $g = f_{\text{Im}(f)}$ l'endomorphisme de $\text{Im}(f)$ induit par f . Déterminer les valeurs propres de g .
4. En déduire que f possède exactement 3 valeurs propres.
5. Déterminer les sous-espaces propres de f .

Exercice 7

Soient E un espace euclidien, et a et b deux vecteurs unitaires de E . On considère :

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x - \langle a, x \rangle \cdot b. \end{aligned}$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit bijective. Exprimer f^{-1} lorsque cela est possible.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit diagonalisable.

Inégalité de Cauchy-Schwartz
Exercice 8

Résoudre l'équation

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_n = n \\ x_1^2 + \dots + x_n^2 = n \end{cases}$$

d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 9

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.
2. Soient $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in (\mathbb{R}_+)^{3n}$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^n a_k \times b_k \times c_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \times c_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \times c_k \right)$.
3. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{k=1}^n a_k = 1$. Montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq n^2$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 10

1. Soient $a < b$ réels. Montrer que, pour tout $f \in E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$, on a $\int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt \geq b - a$.
2. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$.
Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x)^2 \leq x \times \int_0^1 (f'(t))^2 dt$.

Exercice 11

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1$. Montrer que : $(x + y + z)^2 \leq \frac{11}{6}$.

Orthogonal
Exercice 12

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E un espace préhilbertien. Montrer que :

1. si $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$;
2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$;
3. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

Exercice 13

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\langle X, Y \rangle = X^\top \times Y$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Im}(A^\top) = \text{Ker}(A)^\perp$.
2. Montrer que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^\top \times A)$.
3. En déduire que $\text{Im}(A^\top) = \text{Im}(A^\top \times A)$ et $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top \times A)$.
4. On suppose que $A^2 = 0_n$.
(a) Montrer que $\text{Ker}(A^\top + A) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(A^\top)$.

(b) En déduire que $A^\top + A$ est inversible si, et seulement si, $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$.

Exercice 14

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On considère le sous-espace vectoriel $H = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ de E .

1. Soit $f \in H^\perp$. On pose $h : t \mapsto tf(t)$. Justifier que $\langle f, h \rangle = 0$ et en déduire que f est la fonction nulle.
2. En déduire $H^\perp$ et $(H^\perp)^\perp$.

Exercice 15

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Donner une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de E , puis déterminer $(\mathcal{D}_n(\mathbb{R}))^\perp$.
2. Déterminer $\text{Vect}(I_n)^\perp$.

Projection orthogonale et distance

Exercice 16

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 17

On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Calculer la distance de $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$ à

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y - 2t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Exercice 18

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ munit de sa structure euclidienne canonique. On note $u = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $v = 2e_2 + 3e_4$ et $F = \text{Vect}(u, v)$.

1. Déterminer $F^\perp$.
2. Donner la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) de la projection orthogonale sur F .

Exercice 19

On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$ pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 20

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top \times B)$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la distance de $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 21

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$.

Exercice 22

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Soit $v \in E$ de norme 1. Montrer que $\varphi: x \mapsto \langle x, v \rangle v$ est le projecteur orthogonal sur $\text{Vect}(v)$. Montrer que $\|\varphi(x)\| \leq \|x\|$ pour tout $x \in E$.
2. Soient p_F le projecteur orthogonal sur F et $x \in E$. Montrer que $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ sont orthogonaux, puis que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$.
3. Soit p un projecteur tel que, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$. En considérant un vecteur x orthogonal à $\text{Ker}(p)$, vérifier que x et $x - p(x)$ sont orthogonaux. En déduire que p est un projecteur orthogonal.
4. Soient p et q deux projecteurs. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur si p et q commutent. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 23

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , p un projecteur orthogonal de rang r et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E .

1. Montrer, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x \rangle$.
2. Montrer que $\sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2 = r$.

Exercice 24

On se place dans $\mathcal{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \times g(t) dt$.

Déterminer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(t) - a \times t - b \times t^2)^2 dt$.

Formes linéaires et hyperplans

Exercice 25

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \text{tr}(A \times M)$.

Exercice 26

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un polynôme A de E tel que, pour tout $P \in E$, $P(0) = \int_0^1 A(t) \times P(t) dt$.
2. Montrer que $\deg(A) = n$.