

CHAPITRE 3

COMPLÉMENTS SUR LE CALCUL MATRICIEL

I	Rappels de Sup	3
I.1	Matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, dans des bases	3
I.2	Opérations matricielles et applications linéaires	5
I.3	Changement de bases	7
I.4	Matrice de passage	8
I.5	Application linéaire canoniquement associée à une matrice	10
I.6	Calculer le rang à l'aide d'une matrice	13
I.7	Calcul pratique du rang	13
I.8	Systèmes linéaires	15
I.9	Déterminant	17
II	Trace d'une matrice et d'un endomorphisme	26
II.1	Trace d'une matrice	26
II.2	Trace d'un endomorphisme	27
III	Sous-espaces stables	29
III.1	Calcul matriciel par bloc	29
III.2	Déterminant par blocs	31
III.3	Matrices et sous-espaces stables	32
III.4	Traduction matricielle	33
IV	Polynômes d'endomorphismes, de matrices	36
IV.1	Définition et règles de calcul	36
IV.2	Polynômes de matrices	38

Algèbre linéaire

A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Matrices par blocs et sous-espaces stables	
Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.	Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.
Si u et v commutent alors le noyau de u est stable par v .	
c) Trace	
Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée. Relation $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.	Notation $\text{tr}(A)$.
d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées	
Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Polynôme annulateur. Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent. Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.	Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$. Application au calcul de l'inverse et des puissances. Le noyau de $P(u)$ est stable par u .

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Rapports de Sup

I.1. Matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, dans des bases



Définition 3.1 – Matrice d'un vecteur dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in E$.

On appelle **coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$** l'unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $u = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot e_k$.

On appelle **matrice colonne de u dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.



Théorème 3.1

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

L'application $E \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

$$u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$



Remarque 3.1

La proposition précédente permet de se « détacher » de l'espace vectoriel E et de se concentrer sur les coordonnées des vecteurs de E .

De cette manière, on peut ne plus travailler dans l'espace abstrait E et travailler dans l'ensemble des matrices colonnes pour lequel la manipulation de vecteurs est « simple ».



Définition 3.2 – Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

On appelle **matrice de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ dans la base $\mathcal{B}$** et on note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ou $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j -ième colonne, avec $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j)$.

Autrement dit,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \downarrow \\ a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{matrix} & \begin{matrix} u_2 \\ \downarrow \\ a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} u_p \\ \downarrow \\ a_{1,p} \\ a_{2,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{sur } e_1 \\ \text{sur } e_2 \\ \vdots \\ \text{sur } e_n \end{matrix}$$

où, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \cdot e_i.$$


Définition 3.3 – Matrice d’une application linéaire dans un couple de bases

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- La **matrice de f dans le couple de bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$** notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est la matrice de la famille de vecteurs $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base $\mathcal{C}$.

Autrement dit,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{sur } \varepsilon_1 \\ \text{sur } \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \text{sur } \varepsilon_n \end{matrix}$$

- Lorsque $E = F$ (autrement dit, lorsque f est un endomorphisme), on prend en général $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

💡 **Exemple 3.1 – Matrice de l’identité, d’une homothétie**

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\text{id}_E(e_k) = e_k = 0.e_1 + \cdots + 0.e_{k-1} + 1.e_k + 0.e_{k+1} + \cdots + 0.e_n.$$

Donc, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_n.$$

Plus généralement, la matrice de l’homothétie $\lambda.\text{id}_E$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\lambda.I_n$.

On remarque que la matrice de l’identité ou d’une homothétie ne dépend pas de la base de E choisie.

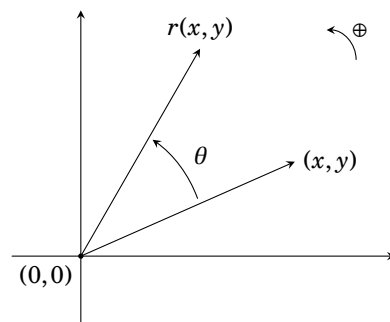
💡 **Exemple 3.2 – Matrice d’une rotation vectorielle du plan**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère la rotation r d’angle θ et de centre $(0, 0)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On considère le nombre complexe $z = x + iy$.

On sait que l’affixe de $r(x, y)$ est

$$z \times e^{i\theta} = (x + iy) \times (\cos \theta + i \sin \theta) = (x \cos \theta - y \sin \theta) + i(x \sin \theta + y \cos \theta).$$



Donc,

$$r(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta).$$

On remarque alors que r est linéaire et que sa matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.2

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F , $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $u \in E$.

On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $Y = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Alors,

$$Y = A \times X \quad \text{ou encore} \quad \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

Autrement dit,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} \times x_j.$$

I.2. Opérations matricielles et applications linéaires**Théorème 3.3**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F .

Pour tous $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda.f + \mu.g) = \lambda.\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) + \mu.\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g).$$

Remarque 3.2

Par récurrence le théorème précédent se généralise à une combinaison linéaire d'un nombre quelconque d'applications linéaires.

Théorème 3.4

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de F .

L'application $\varphi: \mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

$$f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$$

Remarque 3.3 – À quoi sert la proposition précédente ?

Soient E et F des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On note $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F .

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$.

On a ainsi la correspondance suivante : **des bases de E et F étant fixées,**

- Étant donnée une matrice A , celle-ci représente une application linéaire f ;
- Étant donnée une application linéaire f , celle-ci est représentée par une matrice A .

 Remarque 3.4 – Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Les espaces $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

Donc, par théorème, $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p = \dim(F) \times \dim(E)$.

Corollaire 3.1

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E .

L'application $\varphi: \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

$$f \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

 Théorème 3.5

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p , F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension q et G un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E , $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_q)$ une base de F et $\mathcal{B}'' = (e''_1, \dots, e''_n)$ une base de G .

Pour tous $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f).$$

 Remarque 3.5

Par récurrence le théorème précédent se généralise à une composée d'un nombre quelconque d'applications linéaires.

Corollaire 3.2

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de E et $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f).$$

 Remarque 3.6

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Par récurrence, on montre en utilisant le corollaire précédent, que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = A^p$.

 Exercice 3.1

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $f(x, y) = (-3x - 6y, 2x + 4y)$.

Montrer que f est un projecteur.

Résolution

La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Or, la matrice de f^2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est A^2 . De plus, après calculs, $A^2 = A$. Donc, $f^2 = f$. Donc, comme f est un endomorphisme, f est un projecteur.

 Théorème 3.6

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n .

On considère $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{C}$ une base de F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

L'application f est un isomorphisme si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))^{-1}.$$

Corollaire 3.3

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$.

L'application linéaire f est un automorphisme si, et seulement si, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est inversible.

Dans ce cas, $(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})$.

Remarque 3.7

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Si $f \in \text{GL}(E)$, alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^p) = A^p$.

I.3. Changement de bases

Théorème 3.7

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est inversible.

Remarque 3.8

Dans la proposition précédente, la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est constituée de $n = \dim(E)$ vecteurs de E . C'est donc une base si, et seulement si, c'est une famille libre.

On en déduit que :

- la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est inversible.
- la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille liée si, et seulement si, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ n'est pas inversible.

Remarque 3.9 – Cas des matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée**. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A et $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

1. En appliquant la proposition précédente, on a les équivalences :

- la matrice A est inversible si, et seulement si, la famille de ses colonnes est une famille libre.
- la matrice A n'est pas inversible si, et seulement si, la famille de ses colonnes est une famille liée.

2. On sait que A est inversible si, et seulement si, sa transposée est inversible. On en déduit que :

- la matrice A est inversible si, et seulement si, la famille de ses lignes est une famille libre.
- la matrice A n'est pas inversible si, et seulement si, la famille de ses lignes est une famille liée.

En particulier (on retrouve un résultat du chapitre CALCUL MATRICIEL),

- si une colonne ou une ligne de A est nulle, alors la matrice A n'est pas inversible.
- si une colonne de A est combinaison linéaire des autres, alors la matrice A n'est pas inversible.
- si une ligne de A est combinaison linéaire des autres, alors la matrice A n'est pas inversible.

💡 Exemple 3.3

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

En effet, $C_3 = 2C_2 - C_1$ où C_1 , C_2 et C_3 sont les colonnes de A , donc, la famille (C_1, C_2, C_3) est liée.

I.4. Matrice de passage



Définition 3.4 – Matrice de passage

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n .

On appelle **matrice de passage de (la base) $\mathcal{B}$ à (la base) $\mathcal{B}'$** la matrice

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

📖 Remarque 3.10 – Ancienne base, nouvelle base

On dit parfois que $\mathcal{B}$ est l'« ancienne base » et que $\mathcal{B}'$ est la « nouvelle base ». On dit alors que $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base.



Théorème 3.8

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie n . On a :

1. $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{id}_E)$.
2. La matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.

⚠ Attention

Il faut bien faire attention à l'ordre d'écriture des bases dans les égalités :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E).$$



Théorème 3.9 – Formule de changement de bases pour les vecteurs

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie et $u \in E$.

On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors,

$$X = PX' \quad \text{ou encore} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$$



Théorème 3.10 – Formule de changement de bases pour les applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E , et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F .

On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$, $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et $Q = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

Alors,

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = (P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Théorème 3.11 – Cas des endomorphismes

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Alors,

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{ou encore} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

Définition 3.5 – Matrices semblables

Soit $(A, A') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que les matrices A et A' sont **semblables** lorsqu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A' = P^{-1}AP$.

Exercice 3.2 – Important

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto (3x - 2y, x).$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer à l'aide d'un changement de base l'expression de f^n , où $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer un vecteur non nul u_1 vérifiant $f(u_1) = u_1$.
3. Déterminer un vecteur non nul u_2 vérifiant $f(u_2) = 2u_2$.
4. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer la matrice A' de f dans cette base.
5. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
6. Donner la relation qui relie A , A' et P .
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer A^n , puis f^n .

Résolution

1. On a :

$$f(e_1) = f(1, 0) = (3, 1) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(0, 1) = (-2, 0).$$

$$\text{Donc, } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On résout l'équation $f(x, y) = (x, y)$ d'inconnue (x, y) .

Passons dans les matrices. On a :

$$f(x, y) = (x, y) \iff A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (A - I_2) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or, } A - I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En notant C_1 et C_2 les colonnes de cette matrice, on a $C_1 = -C_2$. Autrement dit, $C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{D'où, } A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, $u_1 = (1, 1)$ convient.

3. On résout l'équation $f(x, y) = 2(x, y)$ d'inconnue (x, y) .

Passons dans les matrices. On a :

$$f(x, y) = 2(x, y) \iff A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff (A - 2I_2) \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or, } A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En notant C_1 et C_2 les colonnes de cette matrice, on a $2C_1 + C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Donc, $u_2 = (2, 1)$ convient.

4. Les vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires, donc la famille (u_1, u_2) est libre.
De plus, cette famille est composée de $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Par théorème, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus, comme $f(u_1) = u_1 = 1.u_1 + 0.u_2$ et $f(u_2) = 2.u_1 = 0.u_1 + 2.u_2$, on a :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Par définition, $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Par la formule de changement de base $A' = P^{-1} \times A \times P$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$.

D'après la question précédente, $A = P \times A' \times P^{-1}$.

D'où, $A^n = (P A' P^{-1}) \times \dots \times (P A' P^{-1}) = P (A')^n P^{-1}$.

On sait que P est inversible (en tant que matrice de passage) et, en utilisant la formule d'inversion d'une matrice carrée d'ordre 2,

$$P^{-1} = \frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où, après calculs,

$$A^n = P (A')^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 1 & 2 - 2^{n+1} \\ 2^n - 1 & 2 - 2^n \end{pmatrix}$$

De plus, on sait que A^n est la matrice de f^n dans la base canonique et $A^n \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la matrice de $f^n(x, y)$ dans la base canonique.

Or,

$$A^n \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 - 2^{n+1})y + (2^{n+1} - 1)x \\ (2 - 2^n)y + (2^n - 1)x \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$f^n(x, y) = \left((2 - 2^{n+1})y + (2^{n+1} - 1)x, (2 - 2^n)y + (2^n - 1)x \right).$$

I.5. Application linéaire canoniquement associée à une matrice



Définition 3.6 – Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A est appelée **application linéaire canoniquement associée à A** .

Remarque 3.12 – Identification des n -uplets de $\mathbb{K}^n$ et des matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est :

$$f : \quad \mathbb{K}^p \quad \rightarrow \quad \mathbb{K}^n$$

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \begin{pmatrix} \underbrace{\sum_{j=1}^p a_{1,j} \times x_j}_{=y_1}, \dots, \underbrace{\sum_{j=1}^p a_{n,j} \times x_j}_{=y_n} \end{pmatrix}.$$

De plus, pour simplifier les notations, on identifie tout vecteur de $\mathbb{K}^p$ (resp. de $\mathbb{K}^n$) à sa matrice des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^p$ (resp. de $\mathbb{K}^n$).

Autrement dit, on identifie $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ à $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Avec cette identification,

L'application linéaire canoniquement associée à A se réécrit :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto A \times X. \end{aligned}$$

💡 Exemple 3.4

L'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto (x + 5y + 2z, 2x + 3y + z). \end{aligned}$$

📖 Définition 3.7 – Noyau et image d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A .

- Le **noyau** de A est le noyau de f (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$).
- L'**image** de A est l'image de f (c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$).

🔍 Remarque 3.13 – Déterminer le noyau et l'image d'une matrice (Très important!)

On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$. On a :

$$(x_1, \dots, x_p) \in \text{Ker}(A) \iff A \times \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{1,1} \times x_1 + \dots + a_{1,p} \times x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1} \times x_1 + \dots + a_{n,p} \times x_p = 0. \end{cases}$$

Les lignes de A donnent un système d'équations linéaires du noyau de A .

- On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, en identifiant $\mathbb{K}^p$ à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, on a $A \times e_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$. Autrement dit, $A \times e_j$ est la j -ème colonne C_j de A .

On a alors : $\text{Im}(A) = \text{Vect}(A \times e_1, \dots, A \times e_p) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$. Autrement dit,

L'image de A est engendrée par les colonnes de A : $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

💡 Exemple 3.5

Déterminons une base du noyau et de l'image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

On a : $\text{Im}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$. La dernière égalité découle de la colinéarité des deux dernières colonnes de A . Les vecteurs $(1, 1)$ et $(2, 3)$ sont non colinéaires, donc, $((1, 1), (2, 3))$ est une base de $\text{Im}(A)$.

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + 6z = 0 \\ x + 3y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -3z \end{cases} \iff (x, y, z) \in \text{Vect}((0, -3, 1)).$$

Ainsi, $\text{Ker}(A) = \text{Vect}((0, -3, 1))$. Le vecteur $(0, -3, 1)$ est non nul, donc $((0, -3, 1))$ est une base de $\text{Ker}(A)$.



Définition 3.8 – Rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang de A**, et on note $\text{rg}(A)$, la dimension de $\text{Im}(A)$.
Autrement dit, le rang de A est le rang de son application linéaire canoniquement associée.

Remarque 3.14

On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On sait que $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_n)$.
Donc, le rang de A est le rang de la famille des colonnes de A (identifiées à des vecteurs de $\mathbb{K}^n$).

Remarque 3.15 – Existence du rang d'une matrice

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A.
Les espaces vectoriels $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ sont de dimensions finies.
Donc, f est de rang fini et on sait que $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(\mathbb{K}^n), \dim(\mathbb{K}^p))$. Donc, par définition du rang de A,

$$\text{rg}(A) \leq \min(n, p).$$

Le rang d'une matrice est inférieur ou égal à son nombre de lignes et de colonnes.



Théorème 3.12 – Théorème du rang (pour une matrice)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a :

$$p = \text{rg}(A) + \dim(\text{Ker}(A)).$$



Théorème 3.13

On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant à droite ou à gauche par une matrice inversible.



Théorème 3.14

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(QAP).$$

En particulier, deux matrices semblables ont le même rang.



Proposition 3.1

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On a :

$$\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B)).$$

Théorème 3.15

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On note $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'endomorphisme canoniquement associé à A . On a l'équivalence :

A est inversible si, et seulement si, f est un automorphisme.

Par conséquent, on a :

$$A \text{ est inversible} \iff \text{Ker}(A) = \{(0, \dots, 0)\} \iff \text{Im}(A) = \mathbb{K}^n \iff \text{rg}(A) = n.$$

Dans ce cas, f^{-1} est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A^{-1} .

Remarque 3.16 – Reformulation

Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est n .

Théorème 3.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) A est inversible,
 - (ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A \times B = I_n$,
 - (iii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B \times A = I_n$,
- De plus, si (ii) ou (iii) sont vérifiées, alors $A^{-1} = B$.

I.6. Calculer le rang à l'aide d'une matrice**Théorème 3.17**

Soient $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie et $\mathcal{B}$ une base de E . Le rang de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est le rang de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_p)$.

Corollaire 3.4

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Pour toutes bases $\mathcal{B}$ de E et $\mathcal{C}$ de F , le rang de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est égal au rang de f .

I.7. Calcul pratique du rang**Théorème 3.18**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Les opérations élémentaires sur les lignes de A conservent le noyau de A .
2. Les opérations élémentaires sur les colonnes de A conservent l'image de A .

Remarque 3.17 – Reformulation

1. Si on peut passer d'une matrice A à une matrice A' en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, alors $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A')$.
En particulier, le théorème du rang assure que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$.
2. Si on peut passer d'une matrice A à une matrice A' en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes, alors $\text{Im}(A) = \text{Im}(A')$.
En particulier, le théorème du rang assure que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A')$.

Théorème 3.19

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si on peut passer de A à B par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A , alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Remarque 3.18 – Calcul pratique du rang

Pour déterminer le rang d'une matrice A non nulle, on applique la méthode du pivot pour **échelonner** la matrice. C'est-à-dire aboutir à une matrice B qui vérifie les propriétés suivantes :

1. toute ligne non nulle commence avec strictement plus de zéro que la précédente ;
2. dès qu'une ligne est nulle, les suivantes le sont aussi.

Il existe alors un entier r tel que $0 \leq r \leq \min(n, p)$ et $j_1, \dots, j_r$ vérifiant $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq p$ tels que :

$$B = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & \dots & 0 & \boxed{a_{1,j_1}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{1,p} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \boxed{a_{2,j_2}} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{2,p} \\ 0 & & & \vdots & & & 0 & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \vdots & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{a_{r-1,j_{r-1}}} & \dots & \dots & \dots & \dots & a_{r-1,p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \boxed{a_{r,j_r}} & \dots & \dots & a_{r,p} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right)$$

où les coefficients $a_{1,j_1}, a_{2,j_2}, \dots, a_{r,j_r}$ sont non nuls.

On sait que les opérations sur les lignes conservent le rang. Donc, $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

On montre ensuite que le rang de A est égal au nombre de lignes non nulles dans la matrice B (ici, r)

De plus, en appliquant successivement les opérations sur les colonnes suivantes :

- pour tout $k > j_1$, $C_k \leftarrow C_k - \frac{a_{1,k}}{a_{1,j_1}} \cdot C_{j_1}$,
- pour tout $k > j_2$, $C_k \leftarrow C_k - \frac{a_{2,k}}{a_{2,j_2}} \cdot C_{j_2}$,
- ...
- pour tout $k > j_r$, $C_k \leftarrow C_k - \frac{a_{r,k}}{a_{r,j_r}} \cdot C_{j_r}$,
- pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $C_{j_i} \leftarrow \frac{1}{a_{i,j_i}}$.

On aboutit à la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots & & & 0 & & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & \vdots & & & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que les opérations sur les colonnes conservent le rang. Donc, $\text{rg}(A) = \text{rg}(B) = \text{rg}(C)$.

De plus, $\text{Im}(C) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ où $C_1, \dots, C_p$ désignent les colonnes de C .

D'où, en ne conservant que les colonnes non nuls,

$$\text{Im}(C) = \text{Vect}(C_{j_1}, \dots, C_{j_r}).$$

Les r colonnes $C_{j_1}, \dots, C_{j_r}$ engendrent $\text{Im}(C)$ et forment une famille libre (en effet, c'est une sous-famille de la base canonique de $\mathbb{K}^n$).

Donc, $(C_{j_1}, \dots, C_{j_r})$ est une base de $\text{Im}(C)$.

Ainsi,

$$\text{rg}(A) = r.$$

Méthode 3.1 – Déterminer le rang d'une matrice

Pour déterminer le rang d'une matrice A non nulle, on applique la méthode du pivot pour **échelonner** la matrice.

Le rang de A est alors égal au nombre de lignes non nulles de la matrice obtenue.

Théorème 3.20

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\top).$$

Autrement dit, une matrice et sa transposée ont le même rang.

Corollaire 3.5

Le rang d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est le rang de la famille des lignes de A (identifiées à des vecteurs de $\mathbb{K}^p$).

I.8. Systèmes linéaires

Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1} \times x_1 + a_{1,2} \times x_2 + \dots + a_{1,p} \times x_p = b_1 & (L_1) \\ a_{2,1} \times x_1 + a_{2,2} \times x_2 + \dots + a_{2,p} \times x_p = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{i,1} \times x_1 + a_{i,2} \times x_2 + \dots + a_{i,p} \times x_p = b_i & (L_i) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n,1} \times x_1 + a_{n,2} \times x_2 + \dots + a_{n,p} \times x_p = b_n & (L_n). \end{cases}$$

On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice des coefficients du système, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. En utilisant les opérations matricielles, on a :

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de } (\mathcal{S}) \iff A \times X = B,$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 3.21

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n équations et p inconnues est le noyau de la matrice des coefficients du système.



Définition 3.9 – Rang d'un système

Le **rang du système** $(\mathcal{S})$ est égal au rang de la matrice A des coefficients du système.

Théorème 3.22

La dimension de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n équations et p inconnues de rang r est égal à $p - r$.

Théorème 3.23

On considère un système linéaire dont l'écriture matricielle est $A \times X = B$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le système $AX = B$ est compatible si, et seulement si $B \in \text{Im}(A)$.

Théorème 3.24

On considère un système linéaire dont l'écriture matricielle est $AX = B$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Si A est inversible, alors le système $AX = B$ possède une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Dans ce cas, on dit que le système est de **Cramer**.

Remarque 3.19

En appliquant la méthode du pivot de Gauss à la matrice augmentée $(A|B)$ de $(\mathcal{S})$, on obtient la matrice équivalente

par lignes $(A'|B')$ de la forme :

$$(A'|B') = \left(\begin{array}{cccccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{1,j_1+1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & a'_{1,p} & b'_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a'_{2,j_2+1} & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & a'_{2,p} & b'_2 \\ 0 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & & \vdots & & 0 & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a'_{r-1,j_{r-1}+1} & 0 & \cdots & \cdots & a'_{r-1,p} & b'_{r-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a'_{r,j_r+1} & \cdots & a'_{r,p} & b'_r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_n \end{array} \right)$$

1. Les r équations associées aux lignes $(L_1), \dots, (L_r)$ sont appelées les **équations principales**.
2. Les $n - r$ équations associées aux lignes $(L_{r+1}), \dots, (L_n)$ sont appelées **équations de compatibilités** (ou équations auxiliaires).
3. Les inconnues $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}$ sont appelées **inconnues principales**.
4. Les autres inconnues sont appelées **inconnues secondaires** ou **inconnues auxiliaires** (ou paramètres).
5. En particulier, le rang du système $(\mathcal{S})$ est égal au nombre d'inconnues principales.

Remarque 3.20 – En résumé

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La rang de A est égal :

- au rang de la famille de ses colonnes,
- au rang de la famille de ses lignes,
- au rang de toute application linéaire dont elle est la matrice,
- au rang de toute famille de vecteurs dont elle est la matrice,
- au rang de tout système d'équations linéaires dont elle est la matrice.

I.9. Déterminant



Définition 3.10 – Forme n -linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et $f : E^n \rightarrow F$.

On dit que f est n -linéaire (ou multilinéaire) sur E lorsqu'elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables. Autrement dit, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n) \in E^{n-1}$, l'application :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ u &\mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n) \end{aligned}$$

est linéaire.

Dans le cas particulier où $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n -linéaire.



Définition 3.11 – Forme n -linéaire alternée

Soient E un $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n -linéaire sur E .

On dit que f est alternée lorsque pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E$:

$$u_i = u_j \implies f(u_1, \dots, u_n) = 0.$$

Proposition 3.2

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ une forme n -linéaire alternée sur E .

- Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$,

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \dots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \dots, u_n).$$

On dit que f est antisymétrique.

- Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille liée de E , alors $f(u_1, \dots, u_n) = 0$.

Remarque 3.21

Si une forme n -linéaire est antisymétrique, alors f est alternée.

Théorème 3.25

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B}$ une base de E .

Il existe une unique forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ sur E telle que $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Théorème 3.26

Toute forme n -linéaire alternée sur E est de la forme $g = g(\mathcal{B}).\det_{\mathcal{B}}$.

Définition 3.12 – Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

Le réel $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ est appelé déterminant de la famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 3.3

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

- On a : $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}).\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$.
- La famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Définition 3.13 – Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Le déterminant de f est le réel noté $\det(f)$, défini par

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base quelconque de E .

Théorème 3.27

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $(f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a :

- Pour toute base de E et toute famille $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

- $\det(\lambda.f) = \lambda^n \times \det(f)$. **Attention à la puissance !**
- $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
- $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$.
- $f \in \text{GL}(E)$ si, et seulement si, $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Remarque 3.22

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

Par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(f^n) = (\det(f))^n$.

De plus, si f est un automorphisme, alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\det(f^n) = (\det(f))^n$.



Exercice 3.3

Soit f un endomorphisme de E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie tel que $f^2 = -\text{id}_E$. Quelle est la parité de $\dim(E)$?

Résolution

On note n la dimension de E .

Comme on travaille dans $\mathbb{R}$, on a alors $\det(f^2) = \det(f)^2 \geq 0$.

De plus, on a $\det(-\text{id}_E) = (-1)^n \times \det(\text{id}_E) = (-1)^n$.

On en déduit que n est pair.



Définition 3.14 – Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le déterminant de A est le déterminant de l'application linéaire canoniquement associée à A . On le note $\det(A)$

ou $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$ ou, pour préciser la taille de la matrice, $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{(n)}$.

Exemple 3.6

On a $\det(I_n) = \det(\text{id}_{\mathbb{K}^n}) = 1$ et $\det(0_n) = \det(0_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)}) = 0$.

Remarque 3.23

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A .

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

On sait que l'endomorphisme f canoniquement associé à A est $f : X \mapsto A \times X$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $f(e_i) = C_i$.

D'où, par définition, $\det(A) = \det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$.

Dans le cas du déterminant d'une matrice, on ne précise pas toujours la base $\mathcal{B}$ (par défaut, ce sera la base canonique de $\mathbb{K}^n$) et on note $\det(A) = \det(C_1, \dots, C_n)$.

Théorème 3.28

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On a :

- L'application $A \mapsto \det(A)$ est n -linéaire alternée par rapport aux colonnes de A .
En particulier, si deux colonnes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.
- $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \times \det(A)$. **Attention à la puissance !**
- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$.
- $\det(A \times B) = \det(B \times A)$.
- $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A) = 0$ si, et seulement si, les colonnes de A forment une famille liée.

Remarque 3.24

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Par récurrence, on montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = (\det(A))^p$.

De plus, si A est inversible, alors, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\det(A^p) = (\det(A))^p$.

Remarque 3.25

Si deux colonnes de A sont égales ou si une des colonnes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.

Remarque 3.26 – Déterminant et matrices semblables

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\det(P^{-1} \times A \times P) = \det(A \times P \times P^{-1}) = \det(A \times I_n) = \det(A).$$

Autrement dit, deux matrices semblables ont le même déterminant.

Théorème 3.29

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{B}$ une base de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

On a : $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

Théorème 3.30

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Alors, pour toute base $\mathcal{B}$ de E , on a : $\det(f) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$.

Autrement dit, le déterminant de l'endomorphisme f est le déterminant de la matrice de f dans n'importe quelle base de E .

Théorème 3.31

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On a : $\det(A^T) = \det(A)$.

On a alors le résultat suivant.

**Proposition 3.4**

- L'application $A \mapsto \det(A)$ est n -linéaire alternée par rapport aux lignes de A .
En particulier, si deux lignes de A sont égales, alors $\det(A) = 0$.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On l'équivalence : $\det(A) = 0$ si, et seulement si, les lignes de A forment une famille liée.

 Remarque 3.27

Si deux lignes de A sont égales ou si une des lignes de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.

**Exercice 3.4**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{K})$. On suppose que A est antisymétrique.
Montrer que A n'est pas inversible.

Résolution

On a alors $A^\top = -A$. D'où, $\det(A^\top) = \det(-A)$.
Par multilinéarité, $\det(-A) = (-1)^{2n+1} \det(A) = -\det(A)$.
De plus, $\det(A^\top) = \det(A)$.
Donc, $\det(A) = -\det(A)$, puis, $\det(A) = 0$.
Ainsi, A n'est pas inversible.

 Remarque 3.28 – À retenir

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible ;
2. $\det(A) \neq 0$;
3. Les colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$;
4. Les colonnes de A forment une famille libre de $\mathbb{K}^n$;
5. Les colonnes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$;
6. Les lignes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$;
7. Les lignes de A forment une famille libre de $\mathbb{K}^n$;
8. Les lignes de A forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$;

**Théorème 3.32**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Multiplier une colonne de A par un scalaire λ multiplie le déterminant de A par λ .
- Ajouter à une colonne de A un multiple d'une des autres colonnes de A ne change pas le déterminant.
- Échanger deux colonnes de A change le déterminant en son opposé.

Le déterminant est invariant par transposition. On a alors le résultat suivant.

**Proposition 3.5**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Multiplier une ligne de A par un scalaire λ multiplie le déterminant de A par λ .
- Ajouter à une ligne de A un multiple d'une des autres lignes de A ne change pas le déterminant.
- Échanger deux lignes de A change le déterminant en son opposé.

Par récurrence, on montre alors le résultat suivant.

Corollaire 3.6

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ▶ On ne change pas la valeur de $\det(A)$ en ajoutant à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A .
- ▶ On ne change pas la valeur de $\det(A)$ en ajoutant à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes de A .



Définition 3.15 – Cofacteur

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

Le cofacteur (i, j) de A est le scalaire $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(B_{i,j})$ où $B_{i,j}$ est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j de A .



Théorème 3.33 – Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- ▶ Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
On a $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \Delta_{i,j}$. On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la j -ème colonne.
- ▶ Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
On a $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \Delta_{i,j}$. On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la i -ème ligne.



Attention

Il ne faut pas oublier le coefficient $(-1)^{i+j}$ dans les cofacteurs. On pourra retenir le schéma suivant qui donne la valeur du coefficient $(-1)^{i+j}$ en fonction de la position (i, j) :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$



Théorème 3.34 – Déterminant d'une matrice triangulaire

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A est triangulaire, alors $\det(A) = a_{1,1} \times \dots \times a_{n,n}$.

Autrement dit, le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque 3.30

- En particulier, le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.
- On retrouve l'équivalence suivante : une matrice triangulaire est inversible si, et seulement si, ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Méthode 3.2 – Méthode pratique pour calculer un déterminant

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour calculer le déterminant de A , on applique des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes de A pour se ramener à une matrice triangulaire.

Exercice 3.5

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille $((a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Résolution

La matrice de la famille $((a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a))$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

On sait que la famille $((a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a))$ est une base si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$.
L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$ ne change pas la valeur du déterminant :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2+a & 1 & 1 \\ 2+a & a & 1 \\ 2+a & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ ne changent pas la valeur du déterminant :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2+a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}.$$

On reconnaît un déterminant triangulaire. Donc, $\det(A) = (2+a)(a-1)^2$.

Ainsi, la famille $((a, 1, 1), (1, a, 1), (1, 1, a))$ est une base si, et seulement si, $a \neq 1$ et $a \neq -2$.

Exercice 3.6

Soit $E = \{x \mapsto e^x \times P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et déterminer sa dimension.
2. Soit $\varphi : f \mapsto f'$. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
3. Calculer le déterminant de φ . En déduit que $\varphi \in \text{GL}(E)$.

Résolution

1. On a $E \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

La fonction f appartient à E si, et seulement si, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \times P(x)$.

Ce qui est équivalent à l'existence de $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k e^x x^k$.

Donc, $E = \text{Vect}(x \mapsto e^x P_k(x))_{0 \leq k \leq n}$ où $P_k = X^k$.

On en déduit que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donc, E est un espace vectoriel.

De plus, la famille finie $(x \mapsto e^x P_k(x))_{0 \leq k \leq n}$ engendre E , donc E est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k e^x x^k = 0$.

D'où, comme $e^x \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^n \lambda_k x^k = 0$.

On en déduit que le polynôme $\sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$ possède une infinité de racines, donc, par théorème, $\sum_{k=0}^n \lambda_k X^k = 0$.

Puis, comme la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre (en tant que base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$), $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$.

Ainsi, $(x \mapsto e^x P_k(x))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E et $\dim(E) = n+1$.

2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f, g) \in E^2$. Il existe $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \times P(x)$ et $g(x) = e^x \times Q(x)$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\varphi(\lambda.f + g))(x) &= e^x \times (\lambda \times P(x) + \lambda \times P'(x) + Q(x) + Q'(x)) \\ &= \lambda \times e^x (P'(x) + P(x)) + e^x (Q'(x) + Q(x)) \\ &= \lambda \varphi(f)(x) + \varphi(g)(x). \end{aligned}$$

Donc, $\varphi(\lambda.f + g) = \lambda.\varphi(f) + \varphi(g)$. Donc, φ est linéaire.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $f_k : x \mapsto e^x P_k(x)$. On a $\varphi(f_0) = f_0 \in E$. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(f_k) = f_k + k.f_{k-1} \in E$.

Donc, par linéarité de φ , pour tout $f \in E$, $\varphi(f) \in E$. Ainsi, φ est un endomorphisme de E .

3. La matrice de φ dans la base $(x \mapsto e^x P_k(x))_{0 \leq k \leq n}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A est triangulaire supérieure, donc, $\det(\varphi) = \det(A) = 1$.

Le déterminant de φ est non nul, donc, φ est bijective.

Comme φ est un endomorphisme, on en déduit que $\varphi \in \text{GL}(E)$.



Méthode 3.3 – Méthode qui n'est pas systématique mais utile

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Lorsque sur chaque ligne la somme des coefficients est la même, on peut ajouter à la première colonne la somme des autres colonnes.

Lorsque sur chaque colonne la somme des coefficients est la même, on peut ajouter à la première ligne la somme des autres lignes.

Exemple 3.7

Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. On note $A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$

On a :

$$\det(A) \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ a+2b & a & b \\ a+2b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

Ainsi, avec la formule donnant le déterminant d'une matrice triangulaire, on a :

$$\det(A) = (a+2b) \times (a-b)^2.$$



Exercice 3.7 – Formules de Cramer

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$. On considère le système linéaire à n équations et p inconnues :

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

1. Justifier que si A est inversible, alors $(\mathcal{S})$ possède une unique solution.

Dans la suite, on suppose que $(\mathcal{S})$ possède une unique solution $(x_1, \dots, x_n)$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note D_j le déterminant obtenu en remplaçant la j -ème colonne du déterminant de A par le second membre de $(\mathcal{S})$:

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{(n)}$$

2. Montrer les formules de Cramer :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_j = \frac{D_j}{\det(A)}.$$

3. *Application.* En utilisant les formules de Cramer, résoudre :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - y = 1 \end{cases}$$

Résolution

1. On suppose que A est inversible.

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. On sait que $(x_1, \dots, x_n)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si, et seulement si, $AX = B$.

Comme A est inversible, $AX = B$ si, et seulement si, $X = A^{-1}B$.

Donc, $\mathcal{S}$ possède une unique solution $A^{-1}B$.

2. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A .

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ l'unique solution de $(\mathcal{S})$.

On a alors $x_1.C_1 + \dots + x_n.C_n = B$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a alors, $D_j = \det(C_1, \dots, C_{j-1}, x_1.C_1 + \dots + x_n.C_n, C_{j+1}, \dots, C_n)$.

Par multilinéarité du déterminant, $D_j = \sum_{k=1}^n x_k \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n)$.

Or, si $k \neq j$, deux colonnes du déterminant $\det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n)$ sont égales, donc le déterminant est nul.

Ainsi, $D_j = x_j \times \det(C_1, \dots, C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, \dots, C_n) = x_j \times \det(A)$. Donc, $x_j = \frac{D_j}{\det(A)}$.

Remarque : comme A est inversible, $\det(A) \neq 0$.

3. La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$. Les colonnes $C_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $C_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont non colinéaires, donc la famille (C_1, C_2) est libre. Par théorème, A est inversible. On sait alors que le système possède une unique solution (x, y) .

Par les formules de Cramer, on a :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-17} = \frac{2}{17} \quad \text{et} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-17} = \frac{3}{17}.$$

II. Trace d'une matrice et d'un endomorphisme

II.1. Trace d'une matrice



Définition 3.16 – Trace d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La trace de A est la somme des coefficients diagonaux de A . On la note $\text{tr}(A)$.

Autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$.

💡 Exemple 3.8

$$\text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 + (-2) + 3 = 2$$

⚙️ Théorème 3.35

L'application

$$\begin{aligned} \text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathbb{K} \\ A &\mapsto \text{tr}(A) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Autrement dit,

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{tr}(\lambda A + B) = \lambda \times \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$$

Démonstration

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors, $\lambda A + B = (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. D'où,

$$\text{tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + b_{i,i}) = \lambda \times \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \times \text{tr}(A) + \text{tr}(B).$$

□

⚙️ Théorème 3.36

Une matrice carrée et sa transposée ont la même trace :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{tr}(A^\top) = \text{tr}(A).$$

Démonstration

Les coefficients diagonaux de A et $A^\top$ sont les mêmes.

□

⚙️ Théorème 3.37

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(B \times A).$$

Démonstration

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $C = A \times B = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et

$$D = B \times A = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Alors, par définition du produit matriciel,

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \times b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} \times a_{i,k} = \sum_{k=1}^n d_{k,k} = \operatorname{tr}(D).$$

□

Corollaire 3.7

Deux matrices semblables ont la même trace.

Démonstration

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Par définition, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1} \times B \times P$. Alors,

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1} \times B \times P) = \operatorname{tr}(P \times P^{-1} \times B) = \operatorname{tr}(B).$$

□

Remarque 3.31 – Prudence!

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B ont la même trace. Par contre, $\operatorname{rg}(A) = 1 \neq 2 = \operatorname{rg}(B)$. Les matrices A et B ne sont donc pas semblables.

On retiendra que deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables.

II.2. Trace d'un endomorphisme



Proposition 3.6

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On considère deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de E .

Les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$ ont la même trace.

Démonstration

Les matrices $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f)$ représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc elles sont semblables. Ainsi, par le corollaire 3.7 page 27, on a : $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f)) = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_2}(f))$. □

La proposition 3.6 permet de définir la trace d'un endomorphisme.



Définition 3.17 – Trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E .

Remarque 3.32 – Trace d'un projecteur et d'un symétrie

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie

► On considère p un projecteur de E . On sait que $E = \operatorname{Im}(p) \oplus \operatorname{Ker}(p)$.

De plus, l'image et le noyau de p sont stables par p et

$$p_{\text{Im}(p)} = \text{id}_{\text{Im}(p)} \quad \text{et} \quad p_{\text{Ker}(p)} = \tilde{0}.$$

En notant r la dimension de l'image de p , on en déduit que la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition de l'espace $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ est la matrice diagonale :

$$A = \begin{cases} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } r \in [1, n-1] \\ 0_n & \text{si } r = 0 \text{ (en fait } p = 0_{\mathcal{L}(E)} \text{ dans ce cas)} \\ I_n & \text{si } r = n \text{ (en fait } p = \text{id}_E \text{ dans ce cas)}. \end{cases}$$

On en déduit que la trace d'un projecteur est égale à son rang :

$$\boxed{\text{tr}(p) = \text{rg}(p).}$$

► On considère s une symétrie de E . On sait que $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

On a : $s - \text{id}_E = P(s)$ où $P = X - 1$. Donc $s - \text{id}_E$ et s commutent. On en déduit que $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ est stable par s . De même, $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ est stable par s . De plus,

$$s_{\text{Ker}(s - \text{id}_E)} = \text{id}_{\text{Ker}(s - \text{id}_E)} \quad \text{et} \quad s_{\text{Ker}(s + \text{id}_E)} = -\text{id}_{\text{Ker}(s + \text{id}_E)}.$$

En notant r la dimension de l'image de $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ et q la dimension de $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$, on en déduit que la matrice de s dans une base adaptée à la décomposition de l'espace $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ est la matrice diagonale :

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{tr}(s) = r - q = \dim(\text{Ker}(s - \text{id}_E)) - \dim(\text{Ker}(s + \text{id}_E)).}$$



Exercice 3.8

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto 2M^\top - M. \end{aligned}$$

Déterminer la trace de f .

Résolution

La matrice de f dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, E_{2,1})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc, $\text{tr}(f) = \text{tr}(A) = 0$.

III. Sous-espaces stables

III.1. Calcul matriciel par bloc

Soient N et P deux entiers naturels non nuls. On considère une famille $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq P}}$ de matrices. On suppose que :

- pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, les matrices $A_{i,j}$ pour $j \in \llbracket 1, P \rrbracket$ ont le même nombre de lignes n_i
- pour tout $j \in \llbracket 1, P \rrbracket$, les matrices $A_{i,j}$ pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ont le même nombre de colonnes p_j

On définit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,j} & \dots & A_{1,P} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,j} & \dots & A_{2,P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \dots & A_{i,j} & \dots & A_{i,P} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & A_{N,2} & \dots & A_{N,j} & \dots & A_{N,P} \end{pmatrix}$$

obtenue en recopiant les coefficients des matrices $A_{i,j}$. La matrice M possède $\sum_{i=1}^N n_i$ lignes et $\sum_{j=1}^P p_j$ colonnes. On dit que la matrice M est **définie par blocs**.

💡 Exemple 3.9

Prenons $N = P = 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = (1).$$

On a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 1 \end{array} \right)$$

🔍 Remarque 3.33 – Cas particulier : matrice diagonale par blocs et matrice triangulaire par blocs

- On dit qu'une matrice est **diagonale par blocs** quand elle est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_N \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, A_i est une matrice carrée d'ordre n_i . La matrice D est carrée d'ordre $\sum_{i=1}^N n_i$.

- On dit qu'une matrice est **triangulaire par blocs** quand elle est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,N} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{N-1,N} \\ 0 & \dots & 0 & A_{N,N} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $A_{i,i}$ est une matrice carrée d'ordre n_i . La matrice T est carrée d'ordre $\sum_{i=1}^N n_i$.

Théorème 3.38 – Addition par blocs

Soient A et B deux matrices définies par blocs :

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,P} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & \dots & A_{N,P} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,P} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{N,1} & \dots & B_{N,P} \end{pmatrix}$$

Si, pour $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket$, les blocs $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ ont la même taille, alors le calcul de la somme $M_1 + M_2$ peut se faire par blocs :

$$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & \dots & A_{1,P} + B_{1,P} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} + B_{N,1} & \dots & A_{N,P} + B_{N,P} \end{pmatrix}$$

Démonstration

Exercice

Théorème 3.39 – Produit par blocs

Soient A et B deux matrices définies par blocs :

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,P} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N,1} & \dots & A_{N,P} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \dots & B_{1,Q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{P,1} & \dots & B_{P,Q} \end{pmatrix}$$

Si, pour $(i, j, k) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, Q \rrbracket \times \llbracket 1, P \rrbracket$, le nombre de colonnes du bloc $A_{i,k}$ est égal au nombre de lignes du bloc $B_{k,j}$, alors le calcul du produit $M_3 = M_1 \times M_2$ peut se faire par blocs :

$$M_3 = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \dots & C_{1,Q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{N,1} & \dots & C_{N,Q} \end{pmatrix}$$

où, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, N \rrbracket \times \llbracket 1, Q \rrbracket$,

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^P A_{i,k} \times B_{k,j}.$$

Attention! Le produit matriciel n'est pas commutatif. Il faut écrire le produit $A_{i,k} \times B_{k,j}$ dans cet ordre.

Démonstration

Exercice

Remarque 3.34 – Cas particulier de 4 blocs

Sous réserve de compatibilité des blocs, on a :

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 & A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 & A_4 + B_4 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \times B_1 + A_2 \times B_3 & A_1 \times B_2 + A_2 \times B_4 \\ A_3 \times B_1 + A_4 \times B_3 & A_3 \times B_2 + A_4 \times B_4 \end{pmatrix}.$$

III.2. Déterminant par blocs

Lemme 3.1

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. Alors,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

Démonstration

On remarque que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

En développant le déterminant de $\begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ par rapport à la première colonne p fois, on a :

$$\det \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(C).$$

De même, en développant le déterminant de $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$ par rapport à la dernière colonne q fois, on a

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det(A).$$

D'où, par propriété du déterminant,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \times \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det(A) \times \det(C)$$

□

Théorème 3.40

Soit T une matrice triangulaire supérieure par blocs :

$$T = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,m} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{m-1,m} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{m,m} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $A_{i,i}$ est une matrice carrée. Alors,

$$\det(T) = \det(A_{1,1}) \times \cdots \times \det(A_{m,m}) = \prod_{i=1}^m \det(A_{i,i})$$

Démonstration

Appliquer plusieurs fois le lemme précédent.

□

III.3. Matrices et sous-espaces stables



Définition 3.18 – Sous-espace stable

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable par f** lorsque $f(F) \subset F$. Autrement dit,

$$\forall x \in F, f(x) \in F.$$

Remarque 3.35 – Reformulation de la définition

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si, et seulement si, l'image par f de tout élément de F est un élément de F .

Exemple 3.10

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les sous-espaces vectoriels E et $\{0_E\}$ sont stables par f .
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le noyau et l'image de f sont stables par f .
Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Par définition du noyau, on a : $f(x) = 0$. Or, $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , donc, $f(x) \in \text{Ker}(f)$. Le noyau de f est donc stable par f . (La démonstration $f(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$ est laissée en exercice)
3. Soit Q un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$. On considère l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}[X] &\rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\mapsto P \times Q \end{aligned}$$

L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 0\}$ est stable par f .

Soit $P \in F$. alors, $P(1) = 0$. Comme $f(P) = P \times Q$, on a :

$$(f(P))(1) = (P \times Q)(1) = P(1) \times Q(1) = 0.$$

Donc $f(P) \in F$.



Proposition 3.7 – Endomorphisme induit

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

Si F est un sous-espace vectoriel stable par f , alors l'application

$$\begin{aligned} f_F : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est bien définie et est un endomorphisme de F

Démonstration

Le sous-espace vectoriel F est stable par f , donc, pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$. L'application f est bien définie.

La linéarité de f entraîne la linéarité de f . □



Définition 3.19 – Endomorphisme induit

Avec les notations de la proposition 3.7, f_F est appelé **endomorphisme de F induit par f** .

 Remarque 3.36

Attention à ne pas confondre la restriction $f|_F$ qui est une application linéaire de F dans E et l'endomorphisme induit f_F qui est une application linéaire de F dans F .

 Théorème 3.41

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On suppose que f et g commutent. Alors, le noyau et l'image de g sont stables par f .

Démonstration

► Montrons que le noyau de g est stable par f .

Soit $x \in \text{Ker}(g)$. On montre que $f(x) \in \text{Ker}(g)$. Comme f et g commutent, on a : $g(f(x)) = f(g(x))$. Or $x \in \text{Ker}(g)$ et f est linéaire, donc $f(g(x)) = f(0_E) = 0_E$. Ainsi, $f(x) \in \text{Ker}(g)$.

Ainsi, $\text{Ker}(g)$ est stable par f .

► Montrons que l'image de g est stable par f .

Soit $y \in \text{Im}(g)$. On montre que $f(y) \in \text{Im}(g)$.

Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Comme f et g commutent, on a : $f(y) = f(g(x)) = g(f(x)) \in \text{Im}(g)$.

Ainsi, $\text{Im}(g)$ est stable par f .

III.4. Traduction matricielle **Théorème 3.42**

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $r \in [1, n-1]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ de E adaptée à F .

► Alors, F est stable par f si, et seulement si, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r, n-r}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$.

► Dans ce cas, la matrice A est la matrice de l'endomorphisme induit f_F dans la base $\mathcal{B}_1$.

Démonstration

► On note $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Par définition F est stable par f si, et seulement si, pour tout $x \in F$, $f(x) \in F$. Or, $\mathcal{B}_1$ est une base de F , donc tout vecteur $x \in F$ s'écrit comme une combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_r$. Donc, F est stable par f si, et seulement si, pour tout $j \in [1, r]$ $f(e_j) \in F$.

De plus, $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. D'où, F est stable par f , si et seulement si, pour tout $j \in [1, r]$, $f(e_j)$ est une combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_r$. Or, les r premières colonnes de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_r)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$.

Ainsi, F est stable par f si, et seulement si, les coefficients de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ situés en position (i, j) avec $r+1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$ sont nuls.

► On suppose que F est stable par f . D'après ce qui précède, les colonnes de A sont les coordonnées des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_r)$ dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$. Donc $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(f_F)$. $\square$

 Proposition 3.8

Soient $p \geq 2$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

On considère une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ de E adaptée la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

- Les sous-espaces vectoriels $E_1, \dots, E_p$ sont stables par f si, et seulement si, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, A_i est une matrice carrée d'ordre $n_i = \dim(E_i)$

- Dans ce cas, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}_i}(f_{E_i}) = A_i$.

Démonstration

Démonstration similaire à la proposition précédente. □

Remarque 3.37 – Cas particulier d'une matrice diagonale

Une matrice diagonale est une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont de taille 1 : on a par conséquent $p = n$ et les E_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, sont de dimension 1. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a $E_i = \text{Vect}(e_i)$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) \in \text{Vect}(e_i)$.

Autrement dit, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'endomorphisme induit $f_{\text{Vect}(e_i)}$ est une homothétie (de rapport le coefficient en position (i, i) de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$).



Proposition 3.9

Soient $p \geq 2$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

On considère une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ de E adaptée la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

On suppose que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,p} \\ 0 & A_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{p-1,p} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{p,p} \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $A_{i,i}$ est une matrice carrée d'ordre $n_i = \dim(E_i)$.

Alors, E_1 est stable par f et plus généralement, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\bigoplus_{i=1}^k E_i$ est stable par f .

Démonstration

Appliquer le théorème 3.42 (pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, une base de $\bigoplus_{i=1}^k E_i$ est $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k)$).

Remarque 3.38 – Cas particulier d'une matrice triangulaire

Une matrice triangulaire est une matrice triangulaire par blocs dont les blocs diagonaux sont de taille 1 : on a par conséquent $p = n$ et les E_i , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont de dimension 1. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on a $E_i = \text{Vect}(e_i)$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire si, et seulement si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

IV. Polynômes d'endomorphismes, de matrices

IV.1. Définition et règles de calcul



Définition 3.20 – Polynôme d'endomorphismes

Soient $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $d \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On définit :

$$P(f) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot f^k = a_0 \cdot \text{id}_E + a_1 \cdot f + \cdots + a_d \cdot f^d \in \mathcal{L}(E).$$

On dit que $P(f)$ est un polynôme en f . C'est un endomorphisme de E .



Exemple 3.11

Si $P = 3X^2 + X - 2$, alors $P(f) = 3f^2 + f - 2\text{id}_E$ et, pour tout $x \in E$,

$$(P(f))(x) = 3f^2(x) + f(x) - 2x.$$



Théorème 3.43

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $1(f) = \text{id}_E$.
- $(\lambda.P + Q)(f) = \lambda.P(f) + Q(f)$.
- $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

Démonstration

► Par définition, $1(f) = \text{id}_E$.

► On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{l=0}^m b_l X^l$. Quitte à ajouter des coefficients nuls à P ou Q , on peut supposer que $n = m$.

Alors, $(\lambda.P + Q)(f) = \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + b_k) \cdot f^k = \lambda \cdot \sum_{k=0}^n a_k \cdot f^k + \sum_{k=0}^n b_k \cdot f^k = \lambda.P(f) + Q(f)$.

► On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{l=0}^m b_l X^l$. Alors, $P \times Q = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_k \times b_l X^{k+l}$. D'où $(P \times Q)(f) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_k \times b_l \cdot f^{k+l}$.

D'un autre côté, $P(f) \circ Q(f) = \left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot f^k \right) \circ \left(\sum_{l=0}^m b_l \cdot f^l \right) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \left(f^k \circ \sum_{l=0}^m b_l \cdot f^l \right)$.

Par linéarité de f , on a : $f^k \circ \sum_{l=0}^m b_l \cdot f^l = \sum_{l=0}^m b_l \cdot f^k \circ f^l$, donc,

$$P(f) \circ Q(f) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_k \times b_l \cdot f^k \circ f^l = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_k \times b_l \cdot f^{k+l}.$$

□



Remarque 3.39 – Les polynômes en f commutent

Comme $P \times Q = Q \times P$, on en déduit que :

$$P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f).$$

**Définition 3.21 – Polynôme annulateur**

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur de f** lorsque $P(f)$ est l'endomorphisme nul.

Exemple 3.12

- Si $f = \lambda \cdot \text{id}_E$, alors le polynôme $X - \lambda$ est annulateur de f .
- Si f est un projecteur de E , alors le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de f .
- Si f est une symétrie de E , alors le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de f .

Remarque 3.40 – Existe-t-il toujours un polynôme non nul annulateur d'un endomorphisme ?

Supposons E de dimension finie n .

Alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 . Or, la famille d'endomorphismes $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n^2})$ est composée de $n^2 + 1$ vecteurs de $\mathcal{L}(E)$. C'est donc une famille liée de $\mathcal{L}(E)$.

Par définition, il existe $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ une famille de scalaires non tous nuls telle que :

$$a_0 \cdot \text{id}_E + a_1 \cdot f + a_2 \cdot f^2 + \dots + a_{n^2} \cdot f^{n^2} = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Le polynôme

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$$

est non nul et est annulateur de f .

Remarque 3.41 – Automorphismes et polynôme annulateur

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

On suppose que $a_0 \neq 0$ et que f annule P . On a alors :

$$a_0 \cdot \text{id}_E + a_1 \cdot f + \dots + a_d \cdot f^d = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

D'où, comme $a_0 \neq 0$, on a :

$$-\frac{a_1}{a_0} \cdot f - \dots - \frac{a_d}{a_0} \cdot f^d = \text{id}_E$$

Donc,

$$f \circ \left(-\frac{a_1}{a_0} \cdot \text{id}_E - \dots - \frac{a_d}{a_0} \cdot f^{d-1} \right) = \left(-\frac{a_1}{a_0} \cdot \text{id}_E - \dots - \frac{a_d}{a_0} \cdot f^{d-1} \right) \circ f = \text{id}_E.$$

Ainsi, f est un isomorphisme de E sur E et sa bijection réciproque est donnée par :

$$f^{-1} = -\frac{a_1}{a_0} \cdot \text{id}_E - \dots - \frac{a_{d-1}}{a_0} \cdot f^{d-1}.$$

On peut remarquer au passage que f^{-1} est une polynôme en f .

Exemple 3.13

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^3 + 2f^2 - \text{id}_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (autrement dit, f annule le polynôme $X^3 + 2X^2 - 1$). Alors,

$$f \circ (f^2 + 2f) = (f^2 + 2f) \circ f = \text{id}_E.$$

Ainsi, f est un isomorphisme de E sur E et $f^{-1} = f^2 + 2f$.

 Proposition 3.10

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
Le noyau et l'image de $P(f)$ sont stables par f .

Démonstration

On sait que deux polynômes en f commutent, donc, par le théorème précédent, le noyau et l'image de $P(f)$ sont stables par f . $\square$

IV.2. Polynômes de matrices **Définition 3.22 – Polynôme de matrices**

Soient $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ où $d \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. On définit :

$$P(A) = \sum_{k=0}^d a_k \cdot A^k = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + \cdots + a_d \cdot A^d.$$

On dit que $P(A)$ est un polynôme en A . C'est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

 Exemple 3.14

Si $P = 3X^2 + X - 2$, alors $P(A) = 3A^2 + A - 2I_n$.

 Théorème 3.44

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- $1(A) = I_n$.
- $(\lambda \cdot P + Q)(A) = \lambda \cdot P(A) + Q(A)$.
- $(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$.

Démonstration

Adapter la démonstration du théorème 3.43 page 36. $\square$

 Remarque 3.42

Comme $P \times Q = Q \times P$, on en déduit que :

$$P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A).$$

On retiendra que les polynômes en A commutent.

 Exercice 3.9

Soit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires) et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors,

$$P(D) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

Résolution

► On vérifie par récurrence que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $D^N = \text{diag}(\lambda_1^N, \dots, \lambda_n^N)$

Initialisation. Pour $N = 0$, on a $D^0 = I_n = \text{diag}(1, \dots, 1) = \text{diag}(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0)$.

Hérédité. Soit $N \in \mathbb{N}$. On suppose que $D^N = \text{diag}(\lambda_1^N, \dots, \lambda_n^N)$. Alors,

$$D^{N+1} = D^N \times D = \begin{pmatrix} \lambda_1^N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^N \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{N+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{N+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $D^{N+1} = \text{diag}(\lambda_1^{N+1}, \dots, \lambda_n^{N+1})$. Ce qui achève la récurrence.

► On note $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Alors, par opérations sur les matrices :

$$P(D) = \sum_{k=0}^d a_k D^k = \sum_{k=0}^d a_k \cdot \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^d a_k \times \lambda_1^k, \dots, \sum_{k=0}^d a_k \times \lambda_n^k \right) = \text{diag}(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)).$$

**Définition 3.23 – Polynôme annulateur**

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est un **polynôme annulateur de A** lorsque $P(A)$ est la matrice nulle.

Remarque 3.43 – Existe-t-il toujours un polynôme non nul annulateur d'une matrice carrée ?

On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie n^2 . Or, la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est composée de $n^2 + 1$ matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est donc une famille liée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Par définition, il existe $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1}$ une famille de scalaires non tous nuls telle que :

$$a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + a_2 \cdot A^2 + \dots + a_{n^2} \cdot A^{n^2} = 0.$$

Le polynôme

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{n^2} X^{n^2}$$

est non nul et est annulateur de A .

Question pour les 5/2 : Pouvez-vous donner un polynôme non nul et annulateur de A de degré strictement inférieur à n^2 ?

**Exercice 3.10 – Puissances et inverse de matrice**

On considère la matrice $A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $P = (X - 1) \times \left(X - \frac{1}{3}\right)$ est un polynôme annulateur de A .
2. **Idée à retenir.** Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n , où $n \in \mathbb{N}$, par P .
3. En déduire les puissances de A .
4. Étudier l'inversibilité de la matrice A et calculer A^{-1} .