

Calculs de valeurs propres de matrices, vecteurs propres

EXERCICE 1: [Indications] – Cours – Raisonner – Soit f un endomorphisme dematrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base $\mathcal{B}$.

- Déterminer $\text{rg } f$ à vue.
- En déduire une première valeur propre de f et déterminer la dimension de l'espace propre associé.
- Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
 - Vérifier que $f(\text{Im}(f)) \subset \text{Im}(f)$.
 - En déduire une deuxième valeur propre $\mu \neq 0$.
- En déduire que f est diagonalisable.

EXERCICE 2: [Indications] – Calculer – Déterminer les éléments propres (vap et vep) des matrices M suivantes.1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode du pivot sur la matrice.2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ en cherchant des opérations pour simplifier la matrice3. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en résolvant un système pour recherche les vap4. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

en faisant d'abord un maximum d'opérations sur les lignes.

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

avec la méthode de votre choix

EXERCICE 3: [Indications] – Cours – Dire, dans chacun des cas de l'exercice précédent, si les matrices sont

- diagonalisables (dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?)
- inversibles ?

EXERCICE 4: [Indications] – Calculer – Déterminer les puissances $n^{\text{ème}}$ des matrices, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Les formules se généralisent-elles à $n \in \mathbb{Z}$?**EXERCICE 5:** [Indications] – Calculer – Pour s'entraîner au calcul :

Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables et si oui, en donner les éléments propres.

1. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

6. $M = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$
(uniquement vap)

7. $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$.

8. pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$, $M = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}$

EXERCICE 6: [Indications] – Raisonner – Chercher – Soit A une matrice réelle.

- Montrer que si $A^2 + I_n = 0$, alors les seules valeurs propres possibles pour A sont i et $-i$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?

Valeurs propres d'endomorphismes

EXERCICE 7: [Indications] – *Raisonner* –

Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M et déterminer sa valeur propre associée.
- Montrer à vue que 0 est valeur propre de M et déterminer la dimension de son espace propre E_0 .
- Montrer que D est semblable à une matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où α est à déterminer.

EXERCICE 8: [Indications] – *cours*

Soit $u : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$, $f \mapsto f''$.

- Montrer que toute valeur réelle α est une valeur propre de u et déterminer son espace propre E_α associé (On prendra soin de distinguer les cas $\alpha > 0$, $\alpha = 0$, $\alpha < 0$.)
- Montrer que E_α si celui-ci est de dimension finie et déterminer sa dimension.
- u est-elle injective?

EXERCICE 9: [Indications] – *Calculer – Raisonner – Cours* –

On se donne $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme de matrice M suivante dans la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On pose $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1 = X^2 - X$, $P_2 = X^2 - X - 1$, $P_3 = X^2 - 2X - 2$.

- Montrer que P_1 est un vecteur propre de f et déterminer sa valeur propre.
- Exprimer $f(P_2)$ en fonction de P_2, P_3 .
- Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$
- En déduire l'ensemble des valeurs propres de f et dire si elle est diagonalisable.

EXERCICE 10: [Indications] – *Calculer – Mobiliser – Raisonner* –

- Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.
- M est-elle diagonalisable? (Sans calcul!)
- Montrer que M est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Déterminer M^n .

EXERCICE 11: [Indications] – *Calculer – Raisonner – Cours* – On pose $M =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer l'ensemble des valeurs propres de M .
- La matrice est-elle diagonalisable?
- Montrer que M est semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \star \\ 0 & -1 & \star \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
- Déterminer les 2 valeurs possibles de α .

Applications

EXERCICE 12: [Indications] – *Calculer – Mobiliser* –

Soient $(p_n), (q_n), (r_n)$ trois suites telles que
$$\begin{cases} p_{n+1} = 2q_n - r_n \\ q_{n+1} = 3p_n - 2q_n \\ r_{n+1} = -2p_n + 2q_n + r_n \end{cases}$$

- Pour tout n , on pose $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice M telle que $U_{n+1} = MU_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire le terme général de ces trois suites en fonction de p_0, q_0, r_0 et de n .

EXERCICE 13: [Indications] – *Calculer – Chercher – Mobiliser* –

☆

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable?
- Calculer A^n , pour tout n entier naturel.
- Montrer que l'inverse A^{-1} de A existe, et calculer A^{-n} , pour tout n entier naturel.
- Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X = n)$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N} : p_{n+2} = -p_{n+1} + \frac{3}{4}p_n$. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n , et reconnaître la loi suivie par $X + 1$.

5. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = 3.e^{-3x/2} + e^{x/2}, \quad g(x) = -2.e^{-3x/2} + 2.e^{x/2}$$

- Exprimer les dérivées f' et g' en fonction de f et g .
- Soient $u : x \mapsto e^{-3x/2}$, $v : x \mapsto e^{x/2}$ et $E = \text{Vect}(u, v)$. Justifier que (f, g) est une base de E et que $f', g' \in E$.
En déduire que l'application $L : E \rightarrow E$; $w \mapsto w'$ est linéaire et bien définie.
- Comment déterminer une fonction F , combinaison linéaire de f et g , telle que la dérivée 2002^{ème} de F soit f ? ☆

EXERCICE 14: [Indications] – Calculer – Modéliser –

Une puce se déplace totalement au hasard sur les sommets $ABCD$ d'un carré de coté 1, de manière à ne faire que des sauts de longueur exactement 1. Déterminer la probabilité pour la puce d'être sur D après le $n^{\text{ème}}$ saut, sachant qu'elle démarre du point A

- Par le calcul
- Intuitivement.

EXERCICE 15: [Indications] – Chercher – ☆

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f est l'application qui associe au polynôme P de E le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X+1)P(X+1) - (X-1)P(X-1).$$

- Montrer que f est un endomorphisme de E .
- Montrer que f est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres de f .
- On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, u_1 = 2; \quad \forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{6}((n+1)u_{n+1} - (n-1)u_{n-1})$$

Montrer qu'il existe un polynôme $P \in E$ vérifiant : $\forall n \geq 1, u_n = P(n)$.

Un peu de théorie

EXERCICE 16: [Indications] – Chercher – Raisonner – Montrer que si M est une

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

matrice de rang 1, alors il existe $\alpha \neq 0$ tel que M soit semblable à

EXERCICE 17: [Indications] – Chercher – Cours – Quelques questions de compréhension

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie.

- Montrer que $0 \notin \text{sp}(u) \Leftrightarrow u$ surjectif.
- Si u est un automorphisme, établir $\text{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} / \lambda \in \text{Sp}(u)\}$.

- Si λ est une valeur propre de u , peut-on déterminer une valeur propre de $u \circ \dots \circ u = u^n$?
- Si λ est une valeur propre de u et μ une valeur propre de $v \in \mathcal{L}(E)$, peut-on dire que $\mu\lambda$ est une valeur propre de $v \circ u$? (On pourra considérer le cas où u, v diagonalisable avec des espaces propres de dimension 1.)

EXERCICE 18: [Indications] – Chercher – ☆

Soient f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 \in \text{sp}(f^n)$. Montrer que $0 \in \text{sp}(f)$.

EXERCICE 19: [Indications] – Chercher –

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

- Montrer que tout sous espace propre de f est stable par g .
- Que peut-on dire si cette espace propre est une droite?
- Montrer que si f admet $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, alors g est diagonalisable dans une même base que celle qui diagonalise f . (On dit que f et g sont *codiagonalisables*).

EXERCICE 20: [Indications] – Chercher – Raisonner – ☆

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Expliquer sans calcul, pourquoi A est diagonalisable?
- Montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. ☆
- Trouver **toutes** les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. ☆☆

Indications

Exercice 10

- On pourra raisonner par l'absurde sur la matrice diagonale D semblable à M et sur la signification de "être semblable à D ".
- On pourra poser f une application linéaire associée à M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et observe que T serait alors la matrice de f dans une autre base $B' = (g_1, g_2, g_3)$.
Se demander exprimer $f(g_1), f(g_2), f(g_3)$ en fonction de g_1, g_2, g_3 grâce à la matrice T . On pourra alors les chercher un par un en résolvant un système adéquat.

Exercice 11

- 2 matrices sont semblables si ce sont les matrices d'un même endomorphisme f dans 2 bases différentes.
On pourra donc se demander ce que signifie "être de matrice du type triangulaire demandé" dans une autre base (v_1, v_2, v_3) . (Trouver le lien avec les questions précédentes.)

-
4. On pourra se demander quel est le lien avec les valeurs propres.
-

Exercice 15

2. On peut éventuellement :
- étudier la matrice de f dans une base donnée,
 - ou alors faire une étude directe $f(P) = \alpha P$ (mais ce n'est clairement pas le plus simple ici!!!)
3. En cas d'existence de ce polynôme, observer qu'on a nécessairement $f(P)(n) = 6P(n)$. On pourra alors tenter de prendre un candidat dans les polynômes trouvés dans les questions précédentes puis justifier (par récurrence éventuellement) que le P choisi est adéquat.
-

Exercice 16

Déterminer le lien avec les valeurs propres ainsi que la dimension des espaces propres.

Exercice 17

1. Voir dans un premier temps le lien avec l'injectivité ou le noyau
 2. Transformer par exemple l'écriture $Av = \lambda v$ grâce à A^{-1} .
 3. Se ramener à la définition initiale du vecteur propre et de la valeur propre.
-

Exercice 18

L'hypothèse dit que $\ker f^n \neq \{0\}$ et on veut montrer que $\ker f \neq \{0\}$.

Exercice 20

2. On pourra diagonaliser A (on appelle D la matrice diagonale obtenue) et essayer de trouver B en fonction de la matrice de passage des vecteurs propres et d'une matrice trouvée grâce à D .