

M2 - Loi de la quantité de mouvement

Table des matières

1 Lois de Newton	1
2 Quantité de mouvement	2
2.1 Définition	2
2.2 Théorème de la quantité de mouvement	2
2.3 Conservation de la quantité de mouvement	2
3 Forces	3
3.1 Force de pesanteur - Chute libre	3
3.2 Force de frottements proportionnelle à la vitesse, dite visqueuse	5
3.3 Force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse	7
3.4 Comparaison des deux modèles de frottements	9
3.5 Tension d'un fil	9
3.6 Force de liaison	10

1 Lois de Newton

Définition d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé

Un point matériel est dit **isolé** s'il ne subit aucune force.

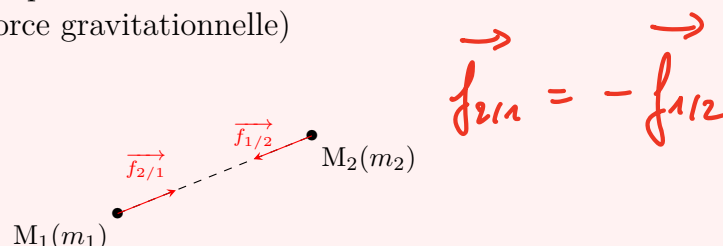
Un point matériel est dit **pseudo-isolé** si la résultante $\vec{F}$ (ou somme) des forces qui lui sont appliquées est nulle : $\vec{F} = \vec{0}$.

Les 3 lois de Newton

1^{re} loi ou principe d'inertie : Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens, par rapport auxquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé a un mouvement rectiligne uniforme.

2^e loi ou principe fondamental de la dynamique : Dans un référentiel galiléen, un point matériel de masse m , soumis à une résultante des forces extérieures $\vec{F}$, a un mouvement tel que $m\vec{a} = \vec{F}$.

3^e loi ou principe de l'action et de la réaction : Les forces d'interaction réciproque qui s'exercent entre deux points matériels sont opposées et ont pour support la droite joignant ces points. Ces forces peuvent être des forces de contact ou des forces d'interactions à distance (exemple : force gravitationnelle)



Si l'on considère deux référentiels $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ en translation rectiligne et uniforme l'un par rapport à l'autre, tout point matériel animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport

à $\mathcal{R}_1$ sera également en translation rectiligne et uniforme par rapport à $\mathcal{R}_2$. Lorsque l'un est galiléen alors l'autre l'est également.

Propriété des référentiels galiléens

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne et uniforme les uns par rapport aux autres.

2 Quantité de mouvement

Dans cette section, on considère un point matériel M de masse m , de vecteur vitesse $\vec{v}$ et de vecteur accélération $\vec{a}$, soumis à la résultante des forces $\vec{F}$.

2.1 Définition

En mécanique classique, la masse inertielle est supposée invariante et conservée pour un système fermé. Cette hypothèse cesse d'être valable dès que l'on prend en compte les effets relativistes ou les conversions entre masse et énergie. On a donc ici :

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Définition de la quantité de mouvement

On appelle **quantité de mouvement** du point M la grandeur notée $\vec{p}$ telle que :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

2.2 Théorème de la quantité de mouvement

Loi de la quantité de mouvement

La 2^e loi de Newton peut aussi s'écrire en faisant apparaître la quantité de mouvement :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Comme la 2^e loi, le théorème de la quantité de mouvement s'applique dans un référentiel galiléen.

2.3 Conservation de la quantité de mouvement

Si $\vec{F} = \vec{0}$ (point isolé ou pseudo-isolé) alors $\vec{p} = \text{cste}$

ou encore $\vec{v} = \text{cste}$ et l'on retrouve la 1^{re} loi de Newton.

3 Forces

3.1 Force de pesanteur - Chute libre

Le poids d'un corps est la manifestation de l'interaction gravitationnelle entre ce corps et la Terre à la surface de cette dernière.

Soit un projectile de masse m lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ et soumis uniquement à son poids (figure 1).

Système étudié : projectile de masse m assimilable à un point matériel.

Référentiel : référentiel d'observation (terrestre) supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

en notant $g = \|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$

Projection : il s'agit de choisir le paramétrage le plus adapté au problème, or ici les coordonnées cartésiennes avec un axe colinéaire à $\vec{g}$ sont les plus appropriées pour la chute libre ¹.

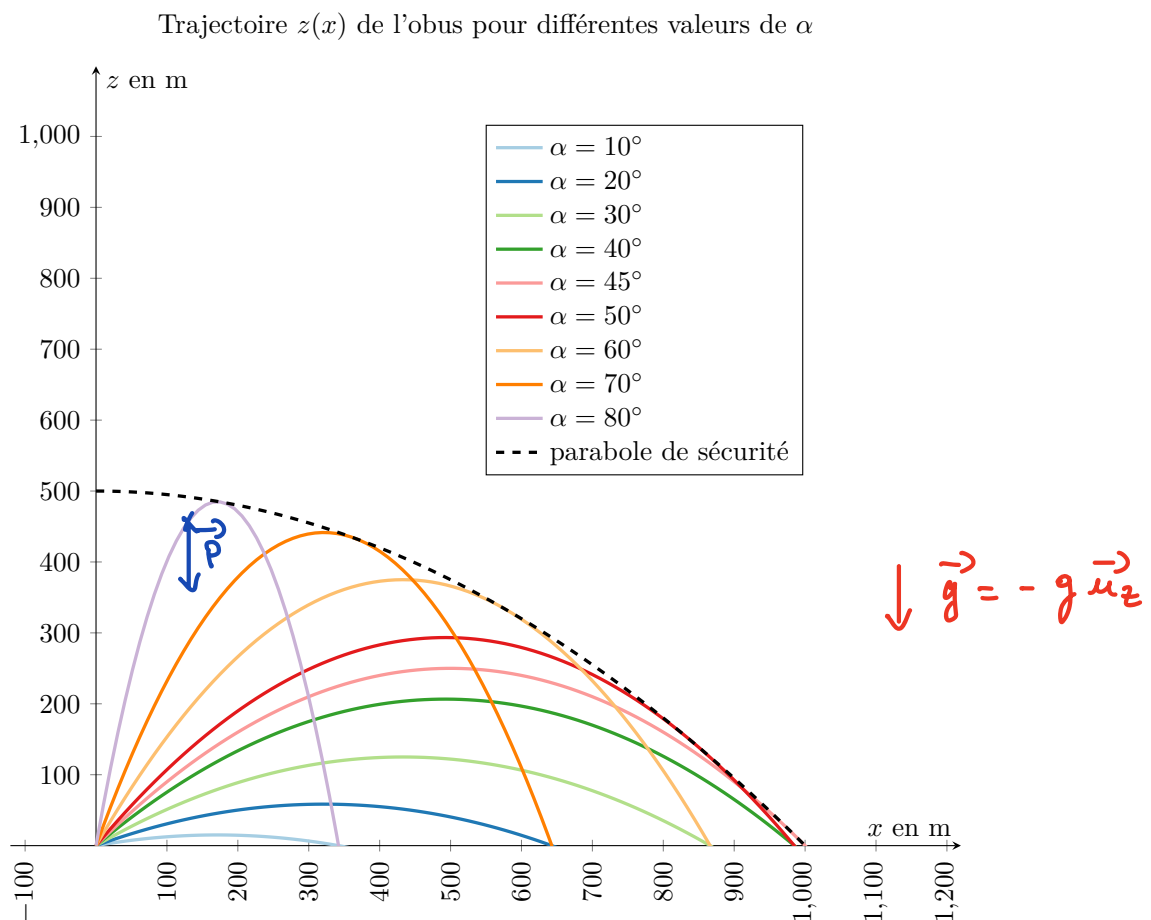


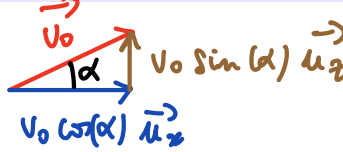
Figure 1 – Chute libre parabolique sans frottements

1. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/parasecu.html>

On obtient alors :

$$(1) \begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = 0 \\ \ddot{z}(t) = -g \end{cases} \Rightarrow (2) \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow (3) \begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\alpha) t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) t \end{cases}$$

Démonstration :



Soit $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}$

de plus $\vec{OM}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

On intègre (1) entre $t_0 = 0$ et t quelconque :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0 \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(0) = 0 \\ \dot{z}(t) - \dot{z}(0) = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases} \quad (2)$$

On intègre (2) entre $t_0 = 0$ et t quelconque :

$$(3) \begin{cases} x(t) - x(0) = v_0 \cos(\alpha) \times t \\ y(t) - y(0) = 0 \\ z(t) - z(0) = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin(\alpha) \times t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

Pour trouver l'équation de la trajectoire $z(x)$, il suffit d'éliminer t dans l'équation de $z(t)$:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \Rightarrow z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan(\alpha) x$$

Pour trouver la portée ² d du tir, il faut résoudre $z(x = d) = 0$:

$$d = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \text{ maximum pour } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Démonstration : $z(d) = 0 \Leftrightarrow \tan(\alpha) \times d = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} d^2$

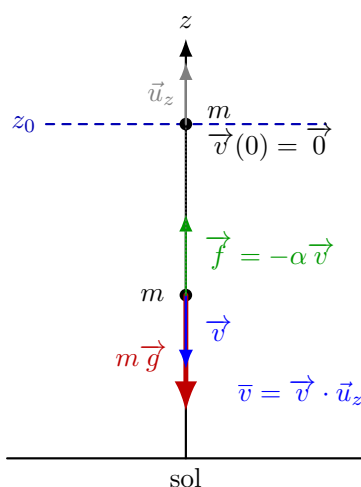
$$\Leftrightarrow d = \frac{2v_0^2 \cos^2(\alpha) \times \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

d maximale quand $\sin(2\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

3.2 Force de frottements proportionnelle à la vitesse, dite visqueuse

Lorsque la vitesse de déplacement du projectile est suffisamment faible, les frottements sont alors bien modélisés par une force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, où α est une constante positive. Le projectile de masse m est désormais lâché depuis une altitude z_0 avec une vitesse initiale nulle (figure 2). On

note $\bar{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}_z$ la norme algébrique de la vitesse.



PFD :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - \alpha \vec{v}$$

avec $\vec{g} \cdot \vec{u}_z = +g = -g$

où $g = \|\vec{g}\|$

Figure 2 – Chute verticale avec frottements linéaire en vitesse, dits visqueux

L'application du PFD en projection sur (Oz) nous donne :

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = -\alpha \bar{v} - mg$$

2. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/parasecu.html>

$$\Rightarrow \frac{d\bar{v}}{dt} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\frac{1}{\tau}} \bar{v} = -g$$

On peut aussi l'écrire :

$$\tau \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v} = -\frac{mg}{\alpha}$$

Pour résoudre cette équation différentielle du 1^{er} ordre, il faut suivre les étapes suivantes :

1. Déterminer la *solution générale* $\bar{v}_h$ de l'équation homogène sans second membre
2. Déterminer la *solution particulière* $\bar{v}_p$ de l'équation différentielle
3. Additionner les deux pour obtenir la *solution générale* $\bar{v} = \bar{v}_h + \bar{v}_p$.
4. Déterminer la constante d'intégration en appliquant les conditions initiales à la solution générale.

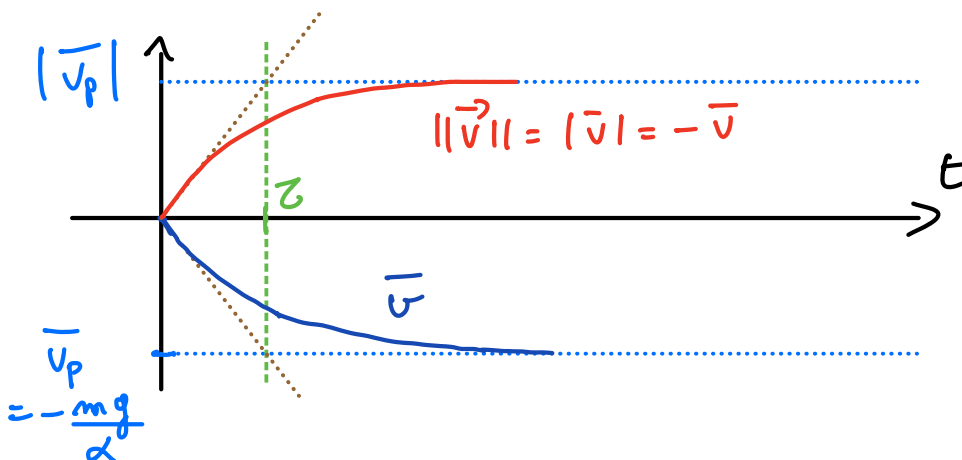
Résolution de l'équation différentielle ci-dessus et tracé de la solution :

$$(1) \bar{v}_h = A e^{-t/\tau} \quad (2) \bar{v}_p = -\frac{mg}{\alpha}$$

$$(3) \text{ solution générale : } \bar{v} = \bar{v}_h + \bar{v}_p = A e^{-t/\tau} + \bar{v}_p$$

$$(4) \text{ On sait que } \bar{v}(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = A e^0 + \bar{v}_p \Rightarrow A = -\bar{v}_p$$

$$\text{Au final : } \bar{v}(t) = \bar{v}_p (1 - e^{-t/\tau})$$



3.3 Force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse

Comme précédemment, on choisit l'axe vertical (Oz) orienté vers le haut, la chute ayant lieu vers le bas :

$$\vec{v} = \bar{v} \vec{u}_z = -v \vec{u}_z \quad \vec{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \vec{u}_z = -\frac{dv}{dt} \vec{u}_z \quad \vec{g} = -g \vec{u}_z.$$

On modélise ici la force de frottement par une loi quadratique en vitesse (figure 3) :

$$\vec{f} = -\alpha_2 v \vec{v}$$

où $v = \|\vec{v}\| = -\bar{v}$ est la norme de la vitesse.

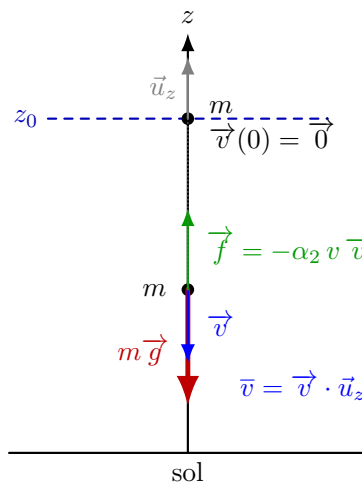


Figure 3 – Chute verticale avec frottements quadratique en vitesse

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - \alpha_2 v \vec{v}$$

La projection sur (Oz) conduit à l'équation scalaire suivante pour $\bar{v}$:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} + \alpha_2 v \bar{v} = -mg$$

On fait ici le choix de résoudre l'équation différentielle vérifiée par $v = -\bar{v}$, la norme de la vitesse :

$$\Rightarrow -m \frac{dv}{dt} - \alpha_2 v^2 = -mg \Rightarrow m \frac{dv}{dt} + \alpha_2 v^2 = mg \quad (Eq)$$

Cette équation n'est pas linéaire : on va la traiter par séparation des variables en passant par des grandeurs adimensionnées.

Comme pour d'autres modèles de frottement, la vitesse tend vers une *vitesse limite* v_ℓ quand le poids est compensé par le frottement :

$$\text{si } \frac{dv}{dt} = 0 \text{ alors } (Eq) \Rightarrow \alpha_2 v_\ell^2 = mg \quad \Rightarrow \quad v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha_2}}$$

et $v = v_\ell$

On introduit v_ℓ dans l'équation différentielle en notant que $\frac{m}{\alpha_2 v_\ell^2} = \frac{1}{g}$:

$(Eq) \times \frac{1}{\alpha_2} \Rightarrow$

$$\frac{m}{\alpha_2} \frac{dv}{dt} + v^2 = v_\ell^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} = 1 - \left(\frac{v}{v_\ell}\right)^2$$

$\times 1/v_\ell^2$

On obtient une équation à variables séparables :

$$\frac{dv}{1 - (v/v_\ell)^2} = g dt$$

On définit alors la vitesse adimensionnée $v^* = v/v_\ell$, le temps caractéristique $\tau = \frac{v_\ell}{g}$

et le temps adimensionné $t^* = \frac{t}{\tau}$. Ainsi :

$$dv^* = \frac{dv}{v_\ell} \quad dt^* = \frac{dt}{\tau}$$

$\Rightarrow dv = v_\ell dv^*$
 $dt = \tau dt^* \Rightarrow$

$$\frac{dv^*}{1 - (v^*)^2} = dt^* \quad \Rightarrow \quad \int_{v^*(0)}^{v^*(t)} \frac{dv^*}{1 - (v^*)^2} = \int_0^{t^*} dt^*$$

Cette relation permet de tracer l'évolution temporelle : v^* croît de 0 vers 1 et la vitesse se rapproche de v_ℓ après quelques temps caractéristiques τ (figure 4).

La primitive de $\int \frac{dv^*}{1 - (v^*)^2}$ conduit à une expression en fonctions hyperboliques. On obtient par exemple avec la condition initiale $v^*(0) = 0$:

$$v^*(t^*) = \frac{e^{t^*} - e^{-t^*}}{e^{t^*} + e^{-t^*}} = \frac{\text{sh}(t^*)}{\text{ch}(t^*)} = \text{th}(t^*)$$

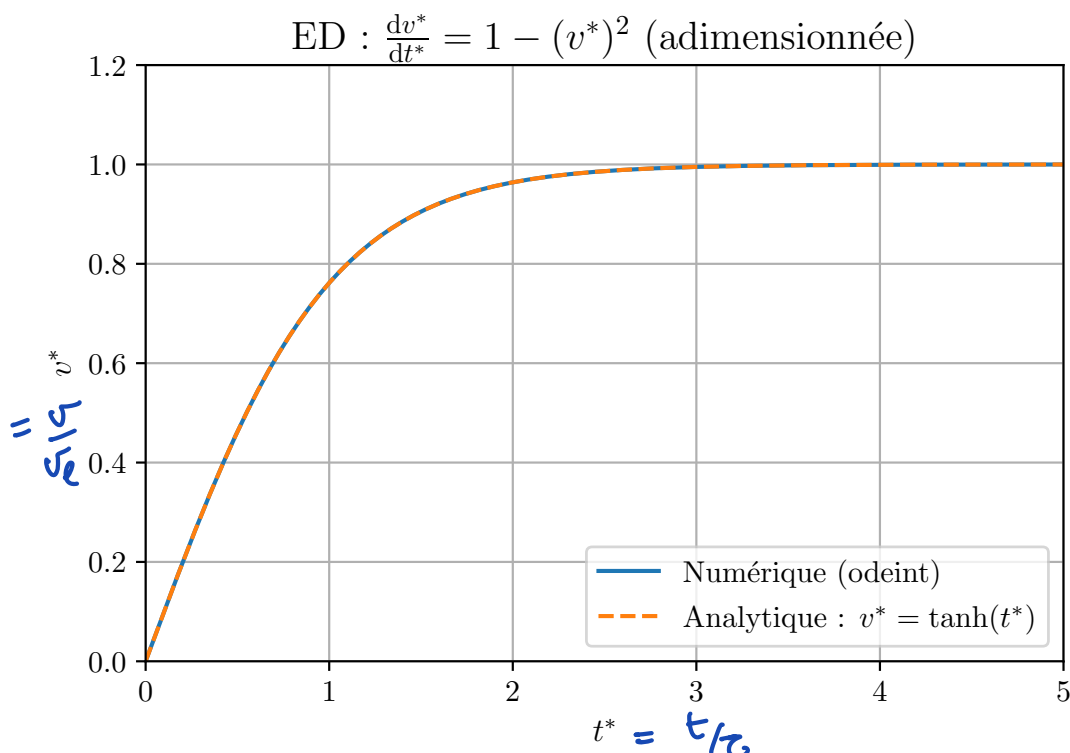


Figure 4 – Chute libre verticale avec frottements quadratiques

Le mouvement présente une phase transitoire (durée typique de l'ordre de quelques τ) où le mobile accélère, puis une phase permanente où la vitesse est constante et égale à v_ℓ .

- $v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha_2}}$ est la vitesse limite (finale) ;
- $\tau = \frac{v_\ell}{g} = \sqrt{\frac{m}{\alpha_2 g}}$ est le temps caractéristique d'établissement.

Ces paramètres ne dépendent pas des conditions initiales : ils gouvernent entièrement l'allure temporelle.

3.4 Comparaison des deux modèles de frottements

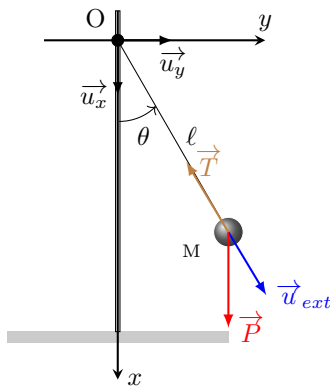
Les deux modèles (frottement proportionnel à v ou à v^2) prédisent une phase d'accélération suivie d'un régime à vitesse limite, mais l'expression de cette vitesse limite diffère :

$$\begin{cases} v_\ell = \frac{mg}{\alpha} & (\text{frottement proportionnel à la vitesse}) \\ v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\alpha_2}} & (\text{frottement proportionnel au carré de la vitesse}). \end{cases}$$

En pratique, la mesure de v_ℓ permet d'estimer α ou α_2 . Pour discriminer plus finement les modèles, on s'appuie typiquement sur le domaine de validité :

- à faibles vitesses (ou en fluide visqueux), le modèle linéaire est souvent pertinent ;
- à vitesses plus élevées (dans un gaz comme l'air), un frottement quadratique devient plus adapté.

3.5 Tension d'un fil



Un fil de masse négligeable prend une forme rectiligne dès qu'il est tendu. Il exerce alors sur un objet accroché à une de ses extrémités une tension notée $\vec{T}$. La direction de cette force est celle du fil. Elle est toujours dirigée d'une extrémité du fil vers l'autre : un fil peut tirer un objet mais pas le repousser. La norme de la tension est a priori indéterminée, sa valeur dépend des autres forces. Dans le cas où le fil n'est pas tendu, la tension est nulle.

Tension d'un fil

La force de tension exercée par un fil tendu sur un objet accroché à l'une de ses extrémités vaut :

$$\vec{T} = -T \vec{u}_{ext}$$

où $\vec{u}_{ext}$ est un vecteur unitaire parallèle au fil, toujours orienté vers l'extérieur du fil, et $T = \|\vec{T}\|$ est la norme de cette tension.

3.6 Force de liaison

La réaction $\vec{R}$ du support est la force sans laquelle le système étudié s'enfoncerait dans le support ! On note $\vec{R}_N$ la réaction normale du support et $\vec{R}_T$ la réaction tangentielle du support :

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

$\vec{R}$ est **normale au support lorsqu'il n'y a pas de frottements solide**, c'est-à-dire lorsque $\vec{R}_T = \vec{0}$

Lorsqu'il y a des frottements, il existe une composante tangentielle $\vec{R}_T$ non nulle donnée par les lois de Coulomb :

Lois de Coulomb

◇ **S'il y a glissement du mobile sur le support fixe**, c'est-à-dire si la vitesse $\vec{v}$ du mobile est non nulle (figure 5), alors $\vec{R}_T$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires :

$$\vec{R}_T \cdot \vec{v} < 0$$

de plus les modules de $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ sont proportionnels, on définit ainsi un **coefficient de frottement dynamique** μ_d positif par :

$$\|\vec{R}_T\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$$

◇ **S'il n'y a pas glissement du mobile sur le support fixe**, c'est-à-dire si $\vec{v} = \vec{0}$ (figure 6), alors les modules de $\vec{R}_T$ et $\vec{R}_N$ satisfont à :

$$\|\vec{R}_T\| \leq \mu_s \|\vec{R}_N\|$$

où μ_s est le **coefficient de frottement statique**.

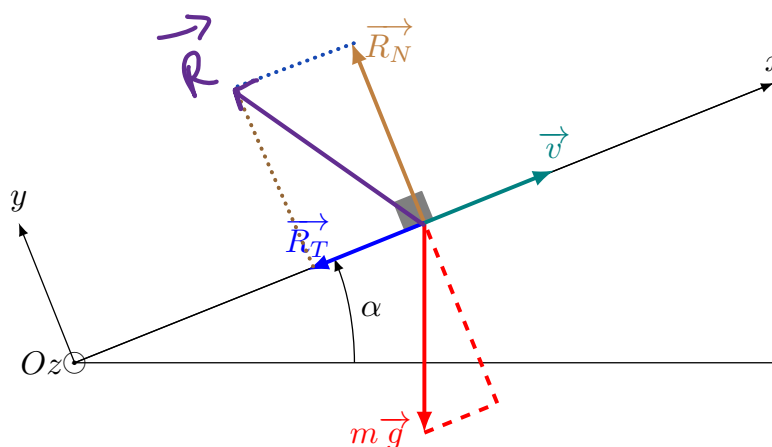


Figure 5 – Glissement sur un plan incliné en montée

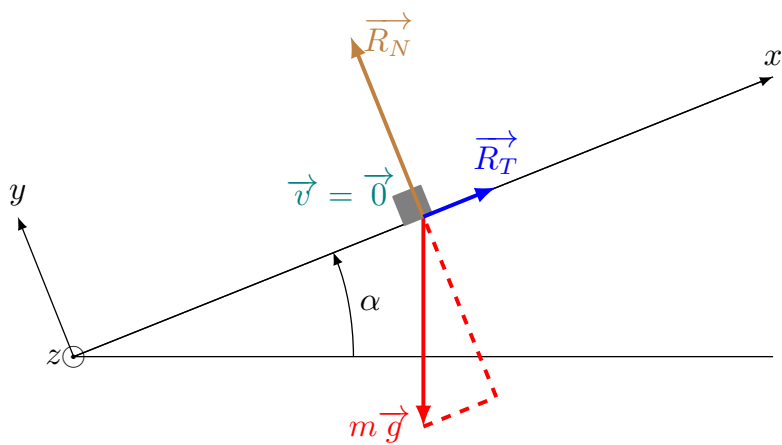


Figure 6 – Équilibre sur un plan incliné grâce aux frottements solide

Le coefficient de frottement statique est en général légèrement supérieur au coefficient de frottement dynamique : il est plus difficile de mettre un objet en mouvement que de maintenir le glissement.

Surfaces en contact	μ_s	μ_d
Bois sur bois	0,4 à 0,6	0,2 à 0,4
Caoutchouc sur béton sec	≈ 1	0,7 à 0,8
Métal sur métal	0,2 à 0,4	0,1 à 0,3
Glace sur glace	$\approx 0,1$	$\approx 0,03$

Table 1 – Ordres de grandeur typiques des coefficients de frottement

Si on parle juste de coefficient de frottement sans plus de précision, cela signifie que les coefficients de frottement statique et dynamique sont supposés égaux.