

Variables aléatoires discrètes

Table des matières

1	Variables aléatoires réelles discrètes	2
1.1	Définitions	2
1.2	Loi d'une variable aléatoire discrète	3
1.3	Fonction de répartition	4
1.4	Transformation d'une variable aléatoire discrète	5
1.5	Moments d'une variable aléatoire discrète	6
1.5.1	Espérance	6
1.5.2	Variance	9
2	Lois discrètes usuelles	11
2.1	Loi géométrique	11
2.2	Loi de Poisson	13
2.3	Simulation des lois usuelles	14

1 Variables aléatoires réelles discrètes

1.1 Définitions

Définition 1.1 : Variable aléatoire réelle discrète

On appelle **variable aléatoire réelle discrète** définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application

$$\begin{aligned} X : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega) \end{aligned}$$

telle que $X(\Omega)$ est finie ou dénombrable et pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$[X = x] \in \mathcal{A}.$$

L'ensemble $[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$ est un événement, c'est l'événement "*X prend la valeur x*".

Définition 1.2 : Rappel : support d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. L'ensemble des valeurs prises par X est noté

$$X(\Omega) = \{X(\omega) \text{ avec } \omega \in \Omega\}.$$

$X(\Omega)$ est appelé le **support de X** ou l'**univers image de X** .

(i) Si $X(\Omega)$ est fini, on dit que X est une **variable aléatoire finie** et on notera généralement

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

(ii) Si $X(\Omega)$ est infini, on dit que X est une **variable aléatoire discrète infinie** et on notera généralement

$$X(\Omega) = \{x_i \text{ avec } i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exemple 1. Il existe d'autres variables aléatoires que les variables aléatoires discrètes, appelées variables aléatoires à densité :

- La variable aléatoire X égale à la taille d'une personne dans une ville donnée ou dans un pays donné.
- La variable aléatoire X égale à la durée de fonctionnement d'une ampoule électrique exprimée en heures.

Proposition 1.3 : Événements liés aux variables aléatoires

Si X est une variable aléatoire discrète et $x \in \mathbb{R}$, alors les ensembles suivants sont des événements de $\mathcal{A}$

$$[X \leq x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A},$$

$$[X = x] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}.$$

Plus généralement, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors l'ensemble suivant est un événement de $\mathcal{A}$

$$[X \in I] = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in I\} \in \mathcal{A}.$$

Exemple 2. Soit Ω l'ensemble des habitants en France, on définit X la variable aléatoire égale à l'année de naissance d'une personne en France. Si $\omega \in \Omega$, alors ω est un habitant en France et $X(\omega)$ est son année de naissance. L'ensemble suivant correspond à l'événement " les personnes nées entre 1997 et 2012 " :

$$[1997 \leq X \leq 2012].$$

1.2 Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 1.4 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On appelle **loi de probabilité** de X l'application $\mathcal{L}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : X(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X = x)\end{aligned}$$

Méthode 1.5 : Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Afin de pouvoir déterminer la loi d'une variable aléatoire discrète, il faudra donc déterminer d'abord son support $X(\Omega)$, puis, pour tout $x \in X(\Omega)$, déterminer $\mathbb{P}(X = x)$.

On prendra garde à ne pas confondre X (variable aléatoire), $[X = x]$ (événement) et $\mathbb{P}(X = x)$ (réel).

Théorème 1.6 : Système complet associé à une variable aléatoire discrète

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ forme une partition de Ω . Par conséquent,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

Cette famille est appelée **système complet d'événements associé à la variable aléatoire X** .

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du chapitre Variables aléatoires finies. □

- (i) Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors le système complet d'événements associé à la variable aléatoire X est

$$([X = x_1], [X = x_2], \dots, [X = x_n])$$

- (ii) Si X est une variable aléatoire discrète infinie telle que $X(\Omega) = \{x_i \text{ avec } i \in \mathbb{N}^*\}$, alors le système complet d'événements dénombrable associé à la variable aléatoire X est

$$([X = x_i])_{i \in \mathbb{N}^*} = ([X = x_1], [X = x_2], \dots)$$

De plus, le théorème 1.6 signifie que la série $\sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(X = x_i)$ converge et que sa somme vaut

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_i) = 1.$$

Exemple 3. Pour quelle valeur de α la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha}{3^n}.$$

définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

Solution.

1.3 Fonction de répartition

Définition 1.7 : Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire discrète. On appelle **fonction de répartition** de X la fonction réelle F_X définie par

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbb{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x)$ donne la probabilité que la variable aléatoire X ne dépasse pas x .

Propriété 1.8 : Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire discrète et F_X sa fonction de répartition. La fonction F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) &= 0, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) &= 1. \end{aligned}$$

La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier donc discontinue.

Exemple 4. Si X suit une loi certaine de paramètre a , sa fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a, \\ 1, & \text{si } x \geq a. \end{cases}.$$

Exemple 5. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, sa fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - p, & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}.$$

Proposition 1.9 : Fonction de répartition

Soient X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. On a pour tout $a < b$,

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Démonstration. Pour tout $a < b$,

$$[a < X \leq b] = [X \leq b] \setminus [X \leq a],$$

donc

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a).$$

□

Corollaire 1.10 : *Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète à sa loi*

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$). Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = F_X(k) - F_X(k - 1).$$

Proposition 1.11 : *Ecriture de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète*

Soit X une variable aléatoire discrète. Sa fonction de répartition F_X est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \sum_{\substack{t \in X(\Omega) \\ t \leq x}} \mathbb{P}(X = t).$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$[X \leq x] = \bigcup_{\substack{t \in X(\Omega) \\ t \leq x}} [X = t].$$

Cette union étant disjointe, on obtient le résultat attendu. $\square$

Théorème 1.12 : *Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire discrète*

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, alors

$$X \text{ et } Y \text{ ont même loi de probabilité} \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ ont même fonction de répartition.}$$

On dira alors que la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire discrète.

On peut donc définir directement une variable aléatoire discrète grâce à sa fonction de répartition.

Démonstration. On montre l'unicité uniquement dans le cadre d'une variable aléatoire finie.

$\Rightarrow$ D'après la proposition 1.11, la loi de probabilité permet de déterminer une unique fonction de répartition.

$\Leftarrow$ On pose

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad \text{avec} \quad x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

De la même manière que dans le corollaire 1.10, on a

$$\mathbb{P}(X = x_1) = F_X(x_1) \quad \text{et pour } i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_{i-1}).$$

Ainsi F_X est définie entièrement par sa loi et réciproquement. $\square$

1.4 Transformation d'une variable aléatoire discrète**Définition 1.13 :** *Transformation d'une variable aléatoire discrète*

Soient X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et g une fonction réelle. On note $g(X)$ l'application définie par :

$$\begin{aligned} g(X) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto Y(\omega) = g(X(\omega)). \end{aligned}$$

Alors $Y = g(X)$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Soient a et b deux réels. Si X est une variable aléatoire discrète, alors $aX + b$ est aussi une variable aléatoire discrète. Il en est de même pour $X^2, e^X \dots$

Exemple 6. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On pose

$$Y = 2X \quad \text{et} \quad Z = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est pair,} \\ 1 & \text{si } X \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors $Y(\Omega) = \{2k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\}$ est infini alors que $Z(\Omega) = \{0, 1\}$ est fini.

Proposition 1.14 : Formule de transfert de loi (hors programme)

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La loi de $Y = g(X)$ est donnée par

$$Y(\Omega) = g(X(\Omega)) \quad \text{et} \quad \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x)=y}} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration. Soit $y \in Y(\Omega)$, on a les équivalences suivantes

$$\omega \in [Y = y] \Leftrightarrow Y(\omega) = y \Leftrightarrow g(X(\omega)) = y$$

Ce qui revient à dire que $X(\omega)$ est un antécédent de y par g , autrement dit

$$\exists x \in X(\Omega) \text{ tel que } g(x) = y \text{ et } X(\omega) = x.$$

On a obtenu que

$$\omega \in [Y = y] \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x)=y}} [X = x].$$

On a donc l'égalité suivante

$$[Y = y] = \bigcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ g(x)=y}} [X = x].$$

Comme l'union est disjointe, on peut conclure. □

Exemple 7. On reprend les variables aléatoires X , Y et Z de l'exemple précédent avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}.$$

Déterminer la loi de Y et de Z .

Solution.

1.5 Moments d'une variable aléatoire discrète

1.5.1 Espérance

Définition 1.15 : Espérance d'une variable aléatoire finie

Soit X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. **L'espérance de X** est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Les variables aléatoires finies ont toujours une espérance.

Définition 1.16 : *Espérance d'une variable aléatoire discrète infinie*

Soit X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$. On dit que

$$X \text{ admet une espérance} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \geq 1} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, **l'espérance de X** est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Pour une variable aléatoire discrète infinie, il faut donc prouver que l'espérance existe avant de la calculer.

Exemple 8. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^k}.$$

Montrer que X possède une espérance et calculer cette espérance.

Solution.

Exemple 9. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = 2^k) = \frac{1}{2^k}.$$

Montrer que X n'admet pas d'espérance.

Solution.

Théorème 1.17 : *Théorème de transfert (variable aléatoire finie)*

Soient X une variable aléatoire finie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et g une fonction réelle. L'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Théorème 1.18 : *Théorème de transfert (variable aléatoire discrète infinie)*

Soient X une variable aléatoire discrète infinie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ et g une fonction réelle. Alors

$$g(X) \text{ admet une espérance} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i \geq 1} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i) \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, l'espérance de $g(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 10 (Paradoxe de Saint-Petersbourg). *Le paradoxe de Saint-Petersbourg est un paradoxe probabiliste qui décrit une situation où une variable aléatoire n'a pas d'espérance. Le problème a été énoncé en 1713 par Nicolas Bernoulli, et discuté en 1738 dans les Transactions de l'Académie de Saint-Petersbourg par son cousin Daniel Bernoulli (neveu de Jacques Bernoulli, qui a donné son nom à la loi de Bernoulli).*

Imaginons un jeu de pile ou face, où un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir "face". Lorsqu'il obtient pour la première fois "face" après n tirages, la banque lui verse 2^n euros.

Quelle doit être la mise initiale du joueur pour que ni la banque, ni le joueur ne soit avantage par le jeu ?

Solution.

Le paradoxe réside dans le fait qu'il serait rationnel, si le gain seul importait, d'offrir de miser la totalité de ses biens pour pouvoir jouer à ce jeu dont on vient de voir qu'il offrait une espérance de gain infinie (donc bien supérieur à n'importe quelle mise), et que pourtant personne, observe Daniel Bernoulli, ne ferait une chose pareille.

Propriété 1.19 : Linéarité

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance et a, b des réels, alors $aX + bY$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a \mathbb{E}(X) + b \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. Admis. □

Propriété 1.20 : Croissance de l'espérance

Si X est une variable aléatoire discrète prenant des valeurs positives (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$) et admettant une espérance, alors

$$\mathbb{E}(X) \geq 0.$$

Propriété 1.21 : Croissance de l'espérance

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant une espérance telles que

$$\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega),$$

alors

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

Les démonstrations de ces propriétés sont similaires à celles du chapitre Variables aléatoires finies.

Propriété 1.22 : Existence d'une espérance par domination

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes telles que

$$\forall \omega \in \Omega, 0 \leq |X(\omega)| \leq Y(\omega).$$

Si Y admet une espérance alors X admet également une espérance et

$$|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y).$$

Démonstration. Admis. □

Définition 1.23 : Variable aléatoire centrée

On dit que X est une **variable aléatoire centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Si X une variable aléatoire discrète, alors la variable aléatoire $X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.

1.5.2 Variance**Définition 1.24 : Moments d'ordre r**

Soient X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $r \in \mathbb{N}$. On dit que X admet un **moment d'ordre r** lorsque X^r admet une espérance. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

L'espérance d'une variable aléatoire discrète est donc son moment d'ordre 1.

- (i) Si X est une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors X admet des moments de tout ordre et d'après le théorème de transfert pour $r \in \mathbb{N}$,

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^n x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

- (ii) Si X est une variable aléatoire discrète infinie telle que $X(\Omega) = \{x_i \text{ avec } i \in \mathbb{N}^*\}$, alors d'après le théorème de transfert pour $r \in \mathbb{N}$,

$$X \text{ admet un moment d'ordre } r \Leftrightarrow \sum_{i \geq 1} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i) \text{ converge absolument.}$$

Dans ce cas, le moment d'ordre r de X est défini par

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^r \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemple 11. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = 2^k) = \frac{7}{8^k}.$$

Montrer que X admet des moments d'ordre 1 et 2, mais pas de moment d'ordre 3.

Solution.

Proposition 1.25 : Existence de moments d'ordre inférieur

Si X est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre r , alors

- X admet des moments à tout ordre inférieur ou égal à r .
- X admet un moment centré d'ordre r .

Démonstration. Admis □

Définition 1.26 : Variance, écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. On appelle **variance** de X

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E} \left((X - \mathbb{E}(X))^2 \right),$$

et **écart-type** de X

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)},$$

La variance d'une variable aléatoire est son moment centré d'ordre 2, elle mesure la dispersion de la variable aléatoire par rapport à son espérance.

Propriété 1.27 : Variance

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. Alors :

- (i) (Positivité) $\mathbb{V}(X) \geq 0$.
- (ii) (Variance nulle) $\mathbb{V}(X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.
- (iii) (Transformation affine) Si $a, b \in \mathbb{R}$ alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Démonstration. À faire en exercice à l'aide du théorème de transfert. □

Théorème 1.28 : Formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2.

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. La démonstration est similaire à celle du chapitre Variables aléatoires finies. □

Exemple 12. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{2^k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*\}$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = 2^k) = \frac{7}{8^k}.$$

Vérifier que X admet une variance et calculer $\mathbb{V}(X)$.

Solution.

Définition 1.29 : Variable aléatoire réduite

On dit que X est une **variable aléatoire réduite** si $\mathbb{V}(X) = 1$.

Propriété 1.30 : Variable aléatoire centrée réduite associée

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 2. Si $\mathbb{V}(X) \neq 0$, alors on note

$$X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}.$$

La variable aléatoire X^* est appelée la **variable aléatoire centrée réduite associée** à X .

2 Lois discrètes usuelles

Nous avons déjà vu des lois discrètes usuelles finies : loi certaine, loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, loi uniforme $\mathcal{U}_{[1, n]}$. Nous allons voir maintenant deux lois de référence discrètes infinies.

2.1 Loi géométrique

Définition 2.1 : Loi géométrique

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi géométrique de paramètre p** avec $0 < p < 1$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 13. Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Solution.

Proposition 2.2 : Espérance et variance

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Démonstration. La série $\sum_{k \geq 1} k p (1-p)^{k-1}$ converge absolument d'après le critère sur les séries géométriques dérivées d'ordre 1 et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k p (1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k (1-p)^{k-1} = \frac{p}{(1 - (1-p))^2} = \frac{1}{p}.$$

De même, la série $\sum_{k \geq 1} k^2 p (1-p)^{k-1}$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 p (1-p)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (k(k-1) + k) p (1-p)^{k-1} \quad \text{car } k^2 = k(k-1) + k \\ &= \left(p(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1) (1-p)^{k-2} \right) + \mathbb{E}(X) \\ &= \frac{2p(1-p)}{(1 - (1-p))^3} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}. \end{aligned}$$

On a donc d'après la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

□

Méthode 2.3 : Situation caractéristique

Soit une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles, succès de probabilité p ou échec. X désigne le nombre de fois où cette expérience a été répétée dans des conditions identiques et indépendantes jusqu'à obtenir le premier succès.

On dit que X est le temps d'attente du premier succès (*i.e.* le numéro du tirage qui amène le premier succès).

Exemple 14. Le temps d'attente du premier pile obtenu lors de lancers successifs d'une pièce suit une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exemple 15. On lance une infinité de fois dans des conditions identiques une pièce de monnaie truquée qui donne Pile avec une probabilité $\frac{1}{3}$. On note X le rang d'apparition du premier Pile.

1. Déterminer la loi de X .
2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un Pile lors des 6 premiers lancers ?

Solution.

Proposition 2.4 : Fonction de répartition

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - (1 - p)^n.$$

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$[X \leq n] = \bigcup_{k=1}^n [X = k].$$

Cette union étant disjointe, on a

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n p (1 - p)^{k-1} = p \sum_{i=0}^{n-1} (1 - p)^i = 1 - (1 - p)^n \quad \text{avec } i = k - 1.$$

Pour $n = 0$, on a bien $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0 = 1 - (1 - p)^0$. □

Nous avons jusqu'à présent interprété une loi géométrique comme le temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves de Bernoulli indépendantes. Si un observateur commence son observation au temps t et qu'il constate que l'événement ne s'est pas encore produit, quelle est la probabilité que l'événement se produise au temps $t + s$? Elle est en fait égale à la probabilité que l'événement se produise au temps s , comme si rien ne s'était produit jusque là. La loi géométrique est qualifiée de **loi sans mémoire**.

Proposition 2.5 : Absence de mémoire de la loi géométrique

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors pour tout $(s, t) \in \mathbb{N}^2$,

$$\mathbb{P}_{[X > t]}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > s).$$

Démonstration. D'après la proposition 2.4, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n) = (1 - p)^n.$$

Comme $[X > t + s] \subset [X > t]$, alors $[X > t + s] \cap [X > t] = [X > t + s]$ et donc

$$\mathbb{P}_{[X > t]}(X > t + s) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{(1 - p)^{t+s}}{(1 - p)^t} = (1 - p)^s = \mathbb{P}(X > s).$$

□

2.2 Loi de Poisson

Définition 2.6 : Loi de Poisson

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$ si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On notera $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple 16. Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Solution.

Proposition 2.7 : Espérance et variance

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Démonstration. La série $\sum_{k \geq 0} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge absolument en tant que série exponentielle et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda \quad \text{avec } i = k - 1.$$

De même, la série $\sum_{k \geq 0} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1+1) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right) \\ &= e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} + \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) = e^{-\lambda} (\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \lambda^2 + \lambda. \end{aligned}$$

On a donc d'après la formule de Koenig-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Il n'y a pas de modèle simple pour la loi de Poisson, celle-ci est systématiquement donnée par l'énoncé.

Remarque 2.8 : Approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson

La loi de Poisson est une loi limite (nous y reviendrons dans le chapitre Convergences et approximations) : quand n est grand et p petit, si X suit $\mathcal{B}(n, p)$, alors X suit approximativement $\mathcal{P}(np)$.

Méthode 2.9 : Situation caractéristique

On s'intéresse à un grand nombre d'événements aléatoires indépendants. On observe qu'ils se produisent λ fois en moyenne durant un intervalle de temps donné. La loi de Poisson indique la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$ que l'événement se produise seulement k fois exactement durant cette période.

Pour la culture, cette loi fut publiée par Siméon Denis Poisson en 1837, dans son ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, où il l'utilise pour mesurer le nombre de condamnations injustifiées dans un pays durant une certaine période.

Exemple 17. *Le nombre de clients qui se présentent à un guichet un jour donné est souvent modélisé par une loi de Poisson.*

2.3 Simulation des lois usuelles

Informatique 2.10 : Python : simulation des lois usuelles

Pour une implémentation en Python, on commence par

```
import numpy.random as rd
```

- On suppose que $p \in]0, 1[$ a été implémenté préalablement en Python. Pour obtenir une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , on peut utiliser la fonction

```
X=rd.geometric(p)
```

- On suppose que $r \in \mathbb{R}_+^*$ a été implémenté préalablement en Python. Pour obtenir une réalisation d'une variable aléatoire suivant une loi Poisson de paramètre r , on peut utiliser la fonction

```
X=rd.poisson(r)
```

Exemple 18. *On peut simuler 40 fois une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p = 0.3$. On stocke les résultats dans la liste A .*

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
p=0.3
A=np.zeros(40)
for k in range(0,40):
    A[k]=rd.geometric(p)
print(A)
```

Voici ce que renvoie Python

[3.7.5.2.3.4.4.4.2.1.9.1.1.10.3.5.1.2.1.5.12.3.4.1.1.8.2.2.1.5.1.3.3.3.3.1.6.2.4.2.]

Exemple 19. On peut simuler 10 fois une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $r = 6$. On stocke les résultats dans la liste A .

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
r=6
A=np.zeros(10)
for k in range(0,10):
    A[k]=rd.poisson(r)
print(A)
```

Voici ce que renvoie Python

[2.3.6.7.10.3.5.6.12.3.]

Exemple 20. On peut tracer le diagramme en bâtons d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $r = 6$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
r=6
L=np.zeros(21) # liste pour stocker les probabilités
F=np.zeros(21) # liste pour stocker les factorielles
L[0]=np.exp(-r)
F[0]=1
for k in range(1,21):
    F[k]=k*F[k-1]
    L[k]=np.exp(-r)*(r**k)/F[k]
plt.bar(range(0,21),L,0.2)
plt.show()
```

