

S1.2 - Lentilles minces dans les conditions de Gauss

Table des matières

1	Systèmes centrés dans les conditions de Gauss	1
1.1	Conditions de Gauss	1
1.2	Stigmatisme approché et taille des récepteurs	2
1.3	Stigmatisme et diffraction	3
1.4	Stigmatisme et luminosité	3
2	Lentilles minces	3
2.1	Définition	3
2.2	Lentille mince convergente ou divergente	4
2.3	Aberrations des lentilles	4
2.4	Points particuliers - Distances focales	6
2.5	Aplanétisme approché dans les conditions de Gauss - Plan focaux	6
2.6	Modélisation de la lentille mince et constructions géométriques	7
2.6.1	Modélisation	7
2.6.2	Construction de l'image A' d'un point A sur l'axe	8
2.6.3	Construction d'un rayon transmis	9
2.7	Relations de conjugaison et grandissement	10
3	Système afocal, exemple de la lunette astronomique	12
3.1	Propriétés d'un système afocal	12
3.2	Grossissement	12

1 Systèmes centrés dans les conditions de Gauss

1.1 Conditions de Gauss

Définition d'un système centré

Un **système optique centré** est un système optique dont les éléments constitutifs (dioptres, lentilles, miroirs) ont un **axe de symétrie commun**. Cet axe est appelé **axe optique**, il est orienté dans le sens de propagation de la lumière incidente.

Conditions de Gauss

Expériences et simulations ^a permettent de conclure que les systèmes optiques classiques sont stigmatiques, au sens du stigmatisme approché, et aplanétiques, uniquement dans certaines conditions appelées conditions de GAUSS :

Les rayons lumineux sont paraxiaux, c'est-à-dire proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à l'axe optique.

Liste des animations :

- Miroir plan ^b : Stigmatisme rigoureux
- Dioptre plan ^c : Stigmatisme approché dans les conditions de Gauss.
- Lentille demi-boule ^d

a. <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/>

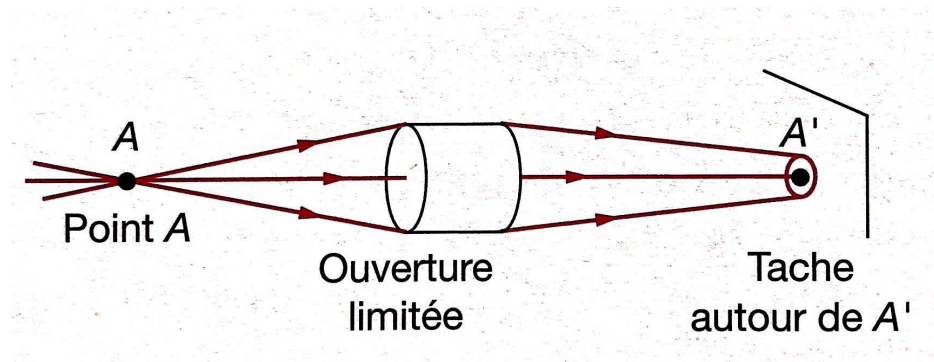
b. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/optiqueGeo/miroirs/miroir_plan.php

c. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/optiqueGeo/dioptres/dioptre_plan.php

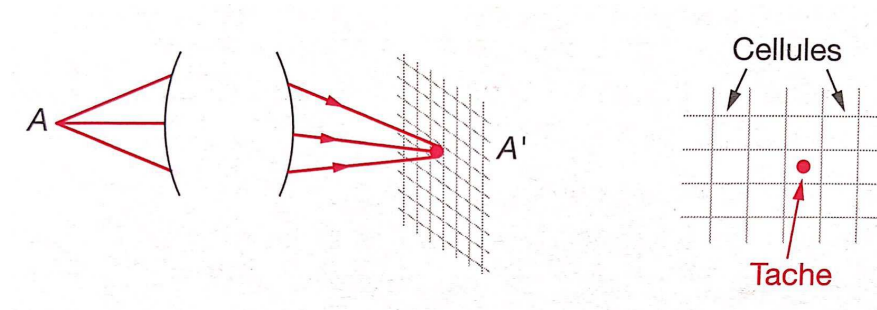
d. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optigeo/boule.html>

1.2 Stigmatisme approché et taille des récepteurs

Du fait de l'absence de stigmatisme rigoureux, l'image d'un point A par un système optique est une tache centrée autour de A' (image de A). La rétine de l'œil composée de cellules biologiques, un récepteur de lumière constitué de pixels d'un appareil photographique numérique, ou tout autre capteur qui détecte l'image a une résolution limitée.



Ainsi, des rayons émergeant du système optique et parvenant sur la même cellule photosensible du capteur peuvent être considérés comme confondus. Quantitativement, on considère le diamètre de chaque cellule du capteur, sa dimension caractéristique pour être plus général. Il suffit de faire en sorte que les différents rayons issus d'un même point A de l'objet parviennent au voisinage du point A', avec une distance inférieure à la taille de la cellule photosensible.



Critère permettant de se contenter du stigmatisme approché

Compte tenu de la résolution limitée des capteurs de lumière analysant l'image, il est possible de se contenter d'un stigmatisme approché. **Les rayons incidents issus d'un point objet A doivent passer dans un voisinage de A', dont la taille est inférieure à la dimension caractéristique des cellules du capteur.**

1.3 Stigmatisme et diffraction

Réduire l'étendue des rayons admis dans le système améliore la qualité du stigmatisme, mais s'accompagne d'une augmentation de l'angle de la diffraction provoquée par les bords du diaphragme qui limite l'ouverture. En pratique, une fois la taille caractéristique des cellules du capteur de lumière déterminée, il suffit de faire en sorte que le diamètre de la tache de diffraction soit inférieur à celui d'une cellule du capteur.

Critère permettant de s'affranchir des effets de la diffraction

Il est possible de s'affranchir des effets de la diffraction en adoptant une ouverture suffisante pour que le diamètre de la tache de diffraction soit inférieur à la taille des cellules du capteur.

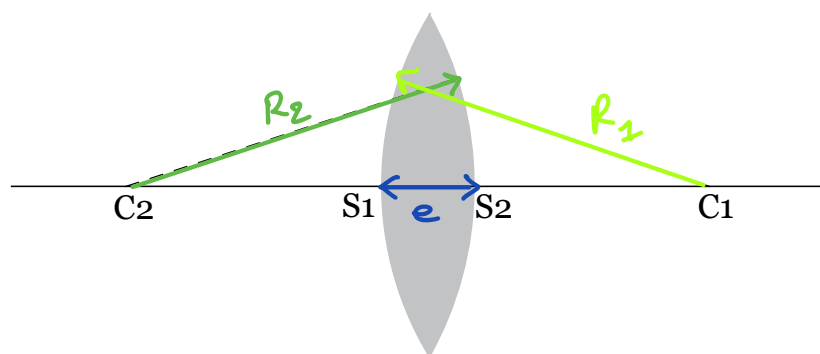
1.4 Stigmatisme et luminosité

Diminuer l'ouverture d'un système optique consiste à ne pas admettre les rayons qui seront interceptés par le diaphragme. Ils n'affecteront donc pas la qualité de l'image, mais on se prive en contrepartie de la luminosité qu'ils auraient apportée.

Remarque à caractère expérimental : Compromis entre stigmatisme et luminosité

Restreindre l'étendue des rayons admis dans le système améliore la qualité du stigmatisme, mais s'accompagne d'une perte de luminosité.

Ce compromis est encore rendu plus délicat, en photographie, lorsque le sujet est en mouvement, car il faut alors diminuer le temps de pose. Mais la sensibilité du capteur nécessite de recevoir une quantité de lumière supérieure à un minimum. Il faut alors augmenter l'ouverture de l'instrument et perdre en netteté.

2 Lentilles minces**2.1 Définition**

Définition d'une lentille mince

La lentille mince ^a est constituée de deux dioptries sphériques (de centres notés ici C_1 et C_2) dont le rayon de courbure est très grand devant l'épaisseur e de la lentille :

$$e = S_1S_2 \ll C_1S_1 = R_1$$

$$e \ll C_2S_2 = R_2$$

$$e \ll C_1C_2$$

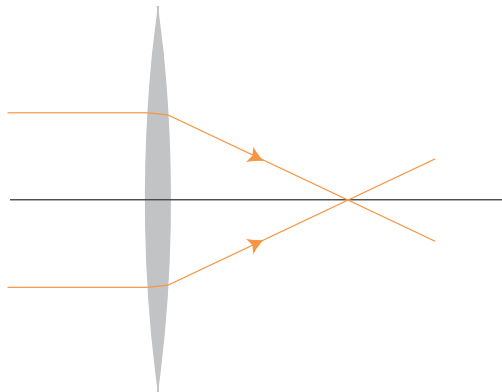
alors le milieu du segment $[S_1S_2]$ est appelé le centre de la lentille, noté O .

a. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/optiqueGeo/lentilles/stigmatisme_lentille.php

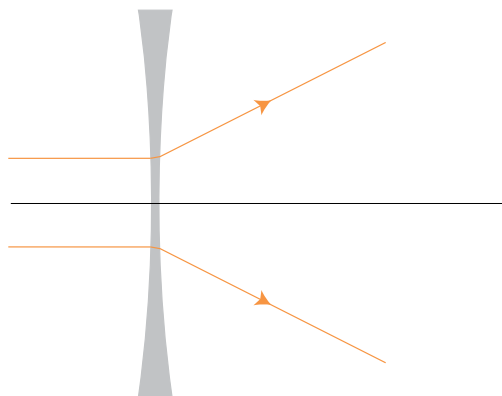
2.2 Lentille mince convergente ou divergente

Expérience de cours : Déviation des rayons lumineux par des lentilles minces fixées sur le tableau magnétique

Lentille mince convergente :



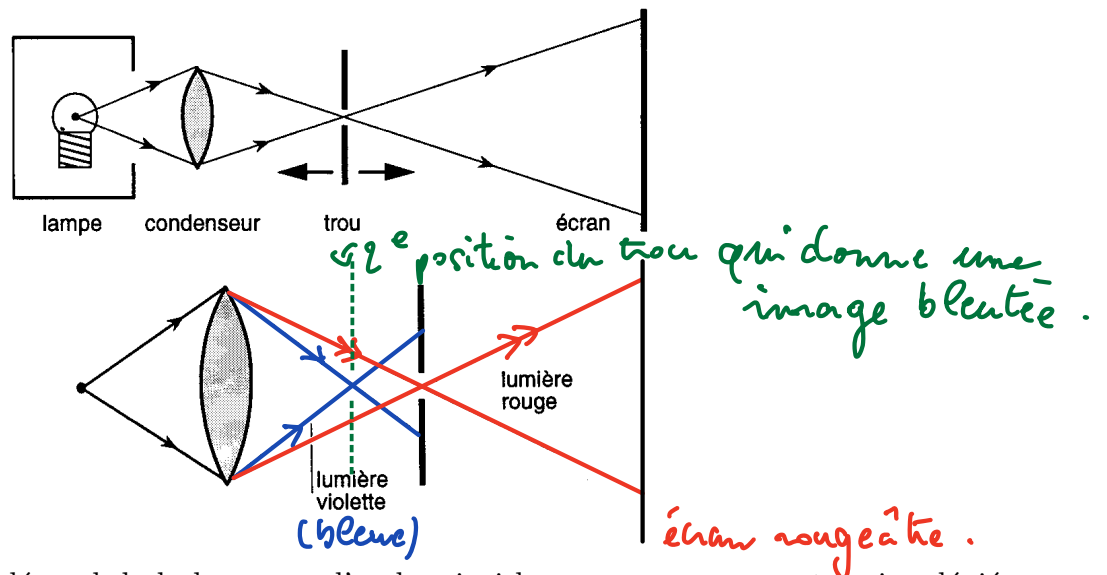
Lentille mince divergente :



2.3 Aberrations des lentilles

Expérience de cours : Aberrations chromatiques d'une lentille mince convergente ¹

1. https://uel.unisciel.fr/physique/optigeo/optigeo_ch16/co/apprendre_ch16_02.html



L'indice de la lentille dépend de la longueur d'onde, ainsi les rayons rouges sont moins déviés que les rayons bleus (ou violet qui est proche du bleu). Pour mettre en évidence ce phénomène, on place le diaphragme de manière à obstruer les rayons rouges, l'image sur l'écran sera bleutée. Et inversement, si on occulte les rayons bleus, l'image apparaîtra rougeâtre.

On peut aussi mettre en évidence les aberrations géométriques des lentilles ²

Limitations des aberrations et stigmatisme dans les conditions de Gauss

On voit que dans les conditions de Gauss les aberrations sont minimisées, on peut alors considérer qu'il y a stigmatisme approché.

$$A \xrightarrow{\text{lentille mince}} A'$$

On dit que A et A' sont des **points conjugués**. A' est le conjugué de A et réciproquement.

2. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optigeo/abergeom.html>

2.4 Points particuliers - Distances focales

Propriétés d'une lentille mince

Centre optique O : les rayons passant par le **centre** O ne sont pas déviés ^a (on considère qu'au voisinage de O, on a une lame à faces parallèles). Le centre optique est son propre conjugué.

$$O \xrightarrow{\text{lentille mince}} O$$

Foyer image F' : l'image d'un point à l'infini sur l'axe (tel que $\overline{OA} = -\infty$) de la lentille est par définition le foyer image F' situé sur l'axe optique.

$$A_{\infty} \text{ à l'infini sur l'axe optique} \xrightarrow{\text{lentille mince}} F'$$

Foyer objet F : Le foyer objet est un point de l'axe tel qu'un point objet ponctuel situé en F a son image à l'infini sur l'axe optique (tel que $\overline{OA'} = +\infty$)

$$F \xrightarrow{\text{lentille mince}} A'_{\infty} \text{ à l'infini sur l'axe optique}$$

Que la lentille soit convergente ou divergente, les foyers principaux objet F et image F' sont sur l'axe optique de la lentille, symétriques l'un de l'autre par rapport au centre optique O .

a. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/optiqueGeo/lentilles/lentille_mince.php

Définitions des distances focales et de la vergence

La distance focale objet et la distance focale image sont notées respectivement :

$$f = \overline{OF} \text{ et } f' = \overline{OF'}$$

Les foyers sont réels dans le cas d'une lentille convergente et virtuels dans le cas d'une lentille divergente.

La **vergence**, notée V qui s'exprime en dioptries (symbole δ), d'une lentille est définie par la relation

$$\overline{OF'} = \frac{1}{V} = f' \quad \left(\begin{matrix} \text{m} \\ \text{m} \end{matrix} \right) \quad (=) \quad V = \frac{1}{f'}$$

2.5 Aplanétisme approché dans les conditions de Gauss - Plan focaux

Expérience de cours : Image d'une lettre P par une lentille de vergence $V = +3\delta$.
On remarque que lorsque le P est perpendiculaire à l'axe optique, son image inversée l'est aussi.

Aplanétisme dans les conditions de Gauss

Les expériences et simulations permettent de conclure que dans les conditions de Gauss, il y a aplanétisme approché.

Définitions des plans focaux

Soit un objet AB perpendiculaire à l'axe optique

Si

$$A_{\infty} \text{ sur l'axe } \xrightarrow{\text{lentille mince}} F'$$

et

$$B_{\infty} \text{ hors de l'axe } \xrightarrow{\text{lentille mince}} B' \text{ dans le plan focal image}$$

B' appartient au plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F' , plan appelé **plan focal image**. On dit aussi que **B' est un foyer image secondaire**.

De même le conjugué B de B'_{∞} (image à l'infini hors de l'axe) appartient au plan perpendiculaire à l'axe optique et passant par F , plan appelé **plan focal objet**. On dit aussi que **B est un foyer objet secondaire**.

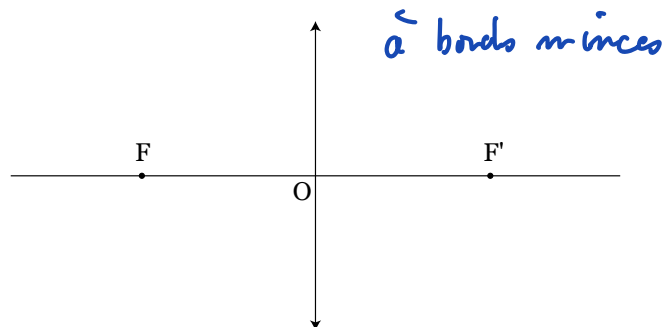
$$B \text{ dans le plan focal objet } \xrightarrow{\text{lentille mince}} B'_{\infty} \text{ hors de l'axe}$$

2.6 Modélisation de la lentille mince et constructions géométriques

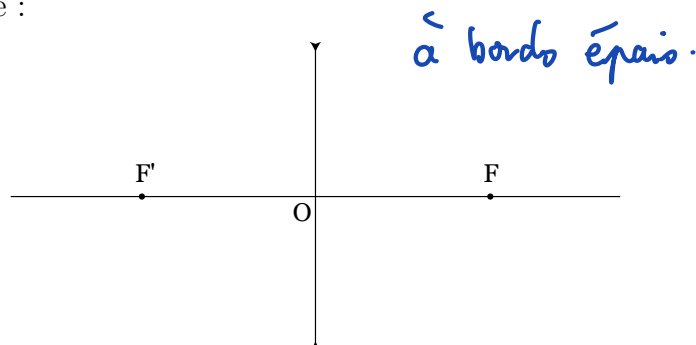
2.6.1 Modélisation

Cette modélisation concerne la lentille mince utilisée dans les conditions de GAUSS.

Lentille mince convergente :



Lentille mince divergente :



Attention, les lois de la réfraction ne sont plus vérifiées sur le schéma !

2.6.2 Construction de l'image A' d'un point A sur l'axe

Pour trouver la position de A' , conjugué d'un point A situé sur l'axe, il faut commencer par trouver l'image B' d'un point B tel que AB est perpendiculaire à l'axe optique, puis en déduire la position de A' en utilisant la propriété d'aplanétisme ($A'B'$ est perpendiculaire à l'axe optique) comme sur la figure 1.

$$A \xrightarrow{\text{on place}} B \xrightarrow{\text{stigmatisme}} B' \xrightarrow{\text{aplanétisme}} A'$$

L'image ³ ⁴ d'un point étant un point, deux rayons suffisent pour trouver B' à choisir parmi les 3 rayons remarquables suivants :

- Le rayon parallèle à l'axe (issu d'un point à l'infini sur l'axe) et passant par B est transmis en passant par F' ;
- Le rayon passant par B et par F est transmis parallèlement à l'axe ;
- Le rayon passant par B et par O n'est pas dévié.

3. <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/optigeo/images.html>

4. http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/optiqueGeo/lentilles/lentille_mince.html

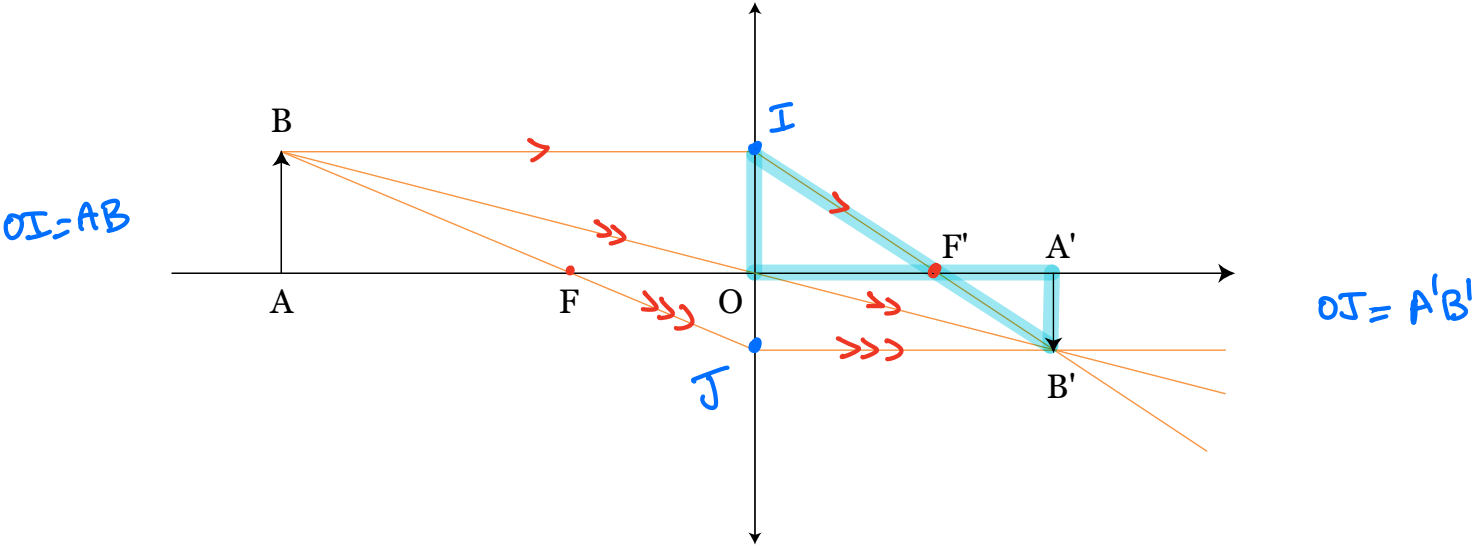


FIGURE 1 – Construction de l’image d’un objet

2.6.3 Construction d’un rayon transmis

$$B_{\infty} \xrightarrow{\text{on place}} A_{\infty} \xrightarrow{\text{stigmatisme}} F' \xrightarrow{\text{aplanetisme}} B'$$

On fait comme si le rayon parvenait d’un point B_{∞} à l’infini en dehors de l’axe, le rayon passant par O (provenant aussi de B_{∞}) coupe le plan focal en B' conjugué de B_{∞} ; Tous les rayons issus de B_{∞} convergent en B' après transmission (stigmatisme), le rayon est donc transmis en passant par B' , comme sur la figure 2.

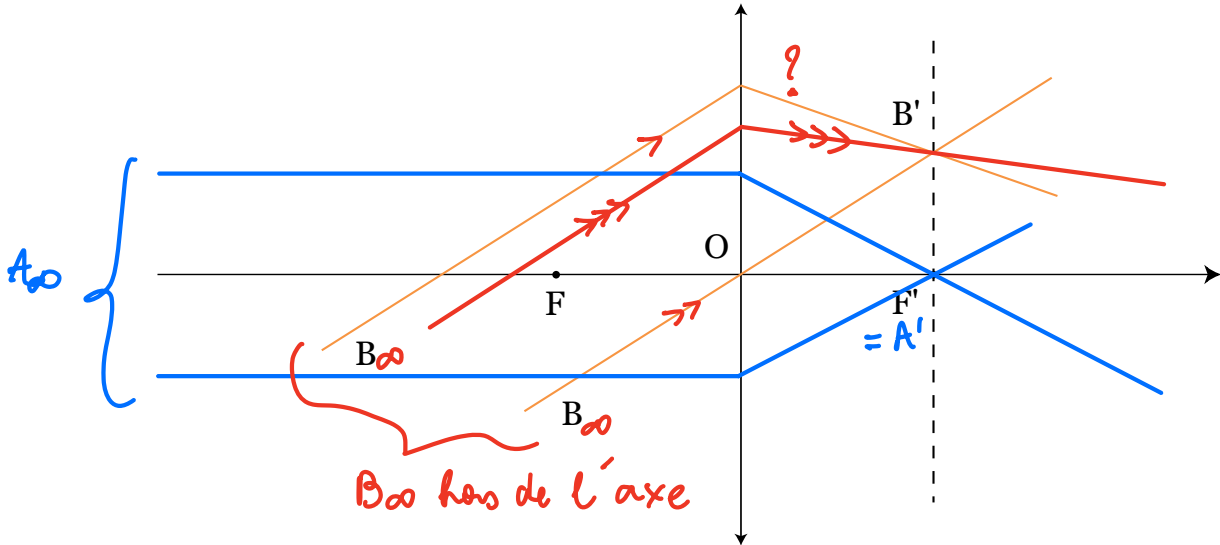
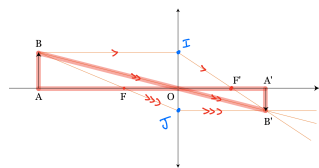


FIGURE 2 – Construction d’un rayon transmis

2.7 Relations de conjugaison et grandissement

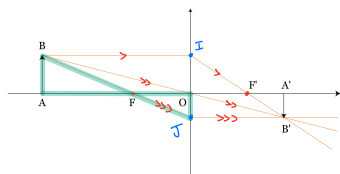
Sur la figure 1, placer le point I , intersection du rayon passant par B parallèle à l'axe et de la lentille, et J , intersection du rayon passant par B' parallèle à l'axe et de la lentille.

Dans les triangles OAB et $OA'B'$:



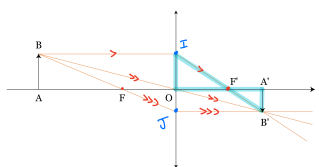
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{-\overline{OA}} = \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OA'}} \quad (1)$$

Dans les triangles ABF et OJF :



$$\frac{FA}{FO} = \frac{AB}{OJ} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{-\overline{FA}} = \frac{-\overline{A'B'}}{-\overline{OF}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF}} \quad (2)$$

Dans les triangles $A'B'F'$ et OIF' :



$$\frac{OF'}{F'A'} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \frac{-\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = -\frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} \quad (3)$$

Relation de conjugaison utilisant les foyers : formule de Newton

On déduit de ces trois équations la relation de conjugaison utilisant les foyers ou encore **formule de Newton** :

$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = \overline{OF} \cdot \overline{OF'} = -f'^2$$

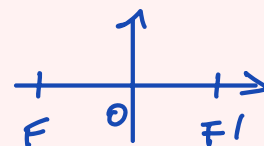
Démonstration : On multiplie membres à membres (2) et (3)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} \times \frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = -\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OF}} \times -\frac{\overline{AB}}{\overline{OF'}} \Rightarrow \overline{FA} \times \overline{F'A'} = \underbrace{\overline{OF}}_{-f'} \times \underbrace{\overline{OF'}}_{+f'} = -f'^2$$

d'où l'on tire la relation de conjugaison avec origine au centre optique ou encore **formule de Descartes**.

Relation de conjugaison utilisant le centre optique : formule de Descartes

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$



Démonstration : On part de la formule de NEWTON

$$\begin{aligned} (\underbrace{\overline{FO}}_{f'} + \overline{OA}) \times (\underbrace{\overline{F'O}}_{-f'} + \overline{OA'}) &= -f'^2 \\ \Rightarrow -f'^2 + f' \times \overline{OA'} - f' \times \overline{OA} + \overline{OA} \times \overline{OA'} &= -f'^2 + 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{f'} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{CQFD.}$$

Définition du grandissement

Le grandissement est le rapport de la norme algébrique de l'image $\overline{A'B'}$ sur la norme algébrique de l'objet $\overline{AB}$:

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Lorsque $\gamma < 0$ l'image est donc inversée par rapport à l'objet.

Expression du grandissement

Les relations (1), (2) et (3) permettent d'exprimer le **grandissement** :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \stackrel{(1)}{=} \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \stackrel{(2)}{=} -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}} \stackrel{(3)}{=} -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}$$

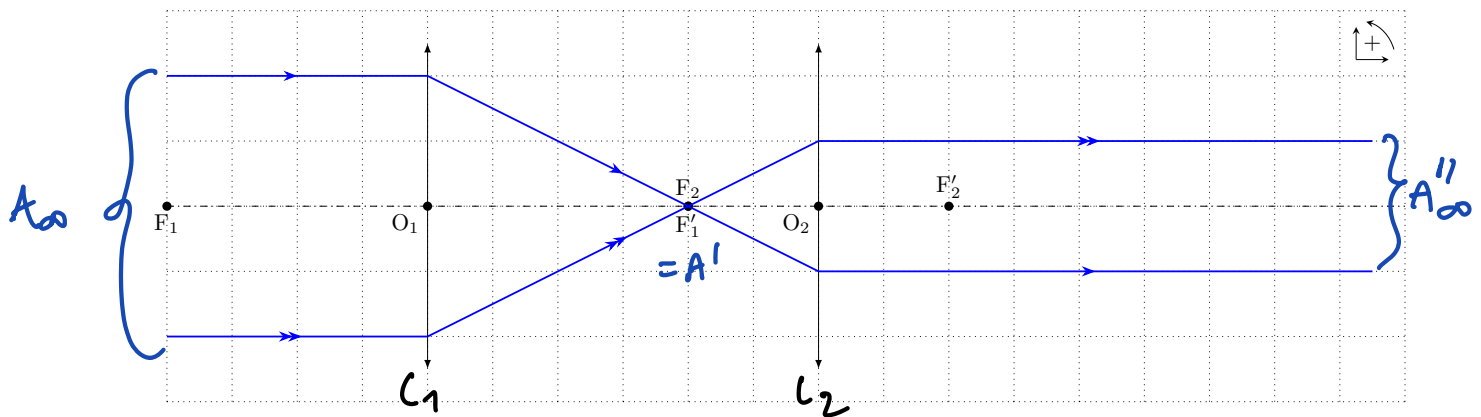
3 Système afocal, exemple de la lunette astronomique

3.1 Propriétés d'un système afocal

Définition d'un système afocal

Un système optique est dit afocal si ces foyers sont à l'infini. Autrement dit, un objet à l'infini donne une image à l'infini par le système afocal.

Un exemple classique de système afocal est la lunette astronomique, constituée de deux lentilles convergentes placées telles que le foyer image de la première lentille est confondu avec le foyer objet dans la deuxième lentille :



Sur le schéma ci-dessus, les rayons incidents proviennent d'un point objet A_∞ à l'infini sur l'axe optique :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A' = F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A_\infty''$$

3.2 Grossissement

Définition du grossissement

On définit le sens positif des angles comme étant le sens trigonométrique. Soit un rayon incident légèrement incliné d'un angle α par rapport à l'axe optique, émergeant du système afocal en étant incliné d'angle α' par rapport à l'axe optique, par définition le grossissement G s'exprime par :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

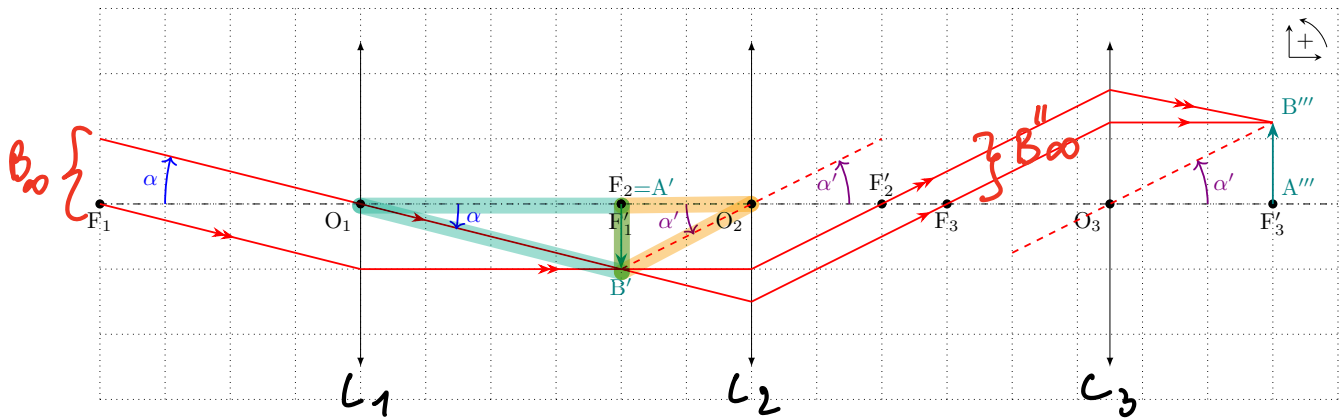
La lunette astronomique est maintenant associée à un œil qui n'accommode pas, schématisé par une lentille L_3 (cristallin) et un écran (rétine) placé dans le plan focal image de cette dernière.

On considère un point objet A à l'infini sur l'axe optique :

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} A' = F_1' \xrightarrow{L_2} A_\infty'' \xrightarrow{L_3} A'''$$

On considère un point objet B à l'infini en dehors de l'axe optique :

$$B_\infty \xrightarrow{L_1} B' \xrightarrow{L_2} B_\infty'' \xrightarrow{L_3} B'''$$



On va chercher à exprimer le grossissement de la lunette.

Expression de $\tan(\alpha)$ en fonction de $\overline{A'B'}$ et de la distance focale f_1' de L_1 :

Dans le triangle $O_1F_1'B'$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \simeq \alpha \text{ car } \alpha \ll 1 \quad (4)$$

Expression de $\tan(\alpha')$ en fonction de $\overline{A'B'}$ et de la distance focale f_2' de L_2 :

Dans le triangle O_2F_2B' :

$$\tan(\alpha') = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{\overline{A'B'}}{-f_2'} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_2'} \simeq \alpha' \text{ car } \alpha' \ll 1 \quad (5)$$

Comme nous travaillons dans les conditions de GAUSS, en faisant l'approximation des petits angles, nous obtenons $\tan \alpha \simeq \alpha$ et $\tan \alpha' \simeq \alpha'$ et ainsi pour G :

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_2'} \times \frac{f_1'}{\overline{A'B'}} = -\frac{f_1'}{f_2'} \quad (6)$$

$$G = -\frac{f_1'}{f_2'} \quad (7)$$