Fonctions polynômes de degré 3

1 Représentations graphiques

Définition : polynôme de degré 3

Soient a, b, c et d des nombres réels avec $a \neq 0$.
On appelle **polynôme du troisième degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Exemple

- $x \mapsto 3x^3 - 6x^2 + x - 9$ est un polynôme de degré 3 avec $a = 3$, $b = -6$, $c = 1$ et $d = -9$.
- $x \mapsto x^3 + 2x - 1$ est un polynôme de degré 3 avec $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$ et $d = -1$.
- $x \mapsto 2x^2 - 1$ n'est pas un polynôme de degré 3.

Remarque

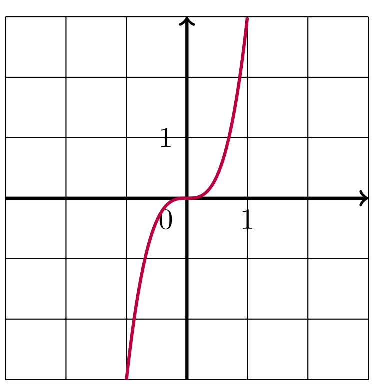
Les fonctions $x \mapsto ax^3$ et $x \mapsto ax^3 + d$ sont des fonctions polynôme de degré 3. Pour la première, c'est un cas particuliers où les coefficients b, c et d sont nuls. Pour la seconde, les coefficients b et c sont nuls.

Propriété

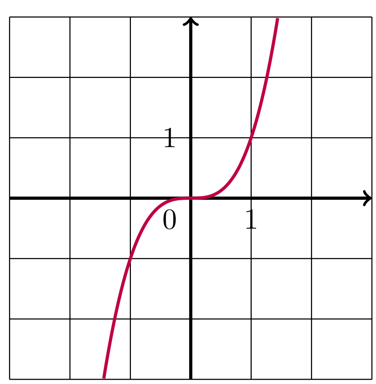
Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ une fonction polynôme de degré 3.

- Si $a > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- Si $a < 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

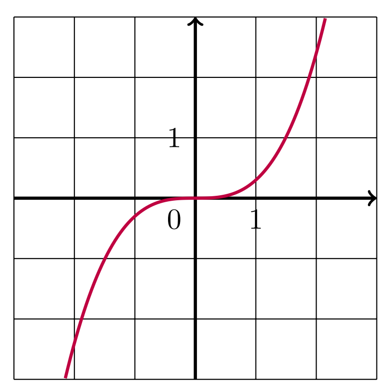
Exemple : représentations graphiques de quelques fonctions $x \mapsto ax^3$ pour $a > 0$



$x \mapsto 3x^3$

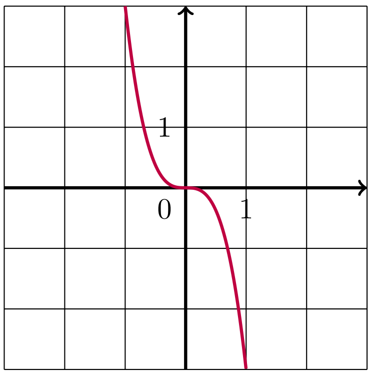


$x \mapsto x^3$

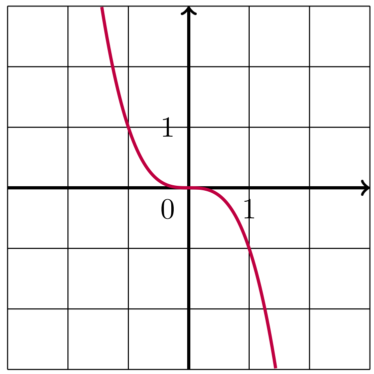


$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$

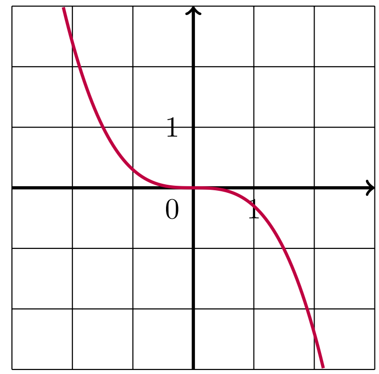
Exemple : représentations graphiques de quelques fonctions $x \mapsto ax^3$ pour $a < 0$



$x \mapsto -3x^3$



$x \mapsto -x^3$

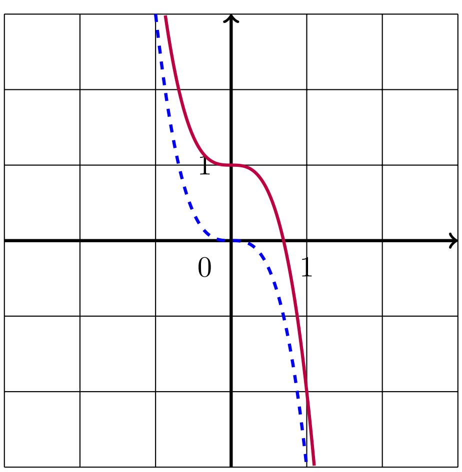


$x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^3$

Propriétés

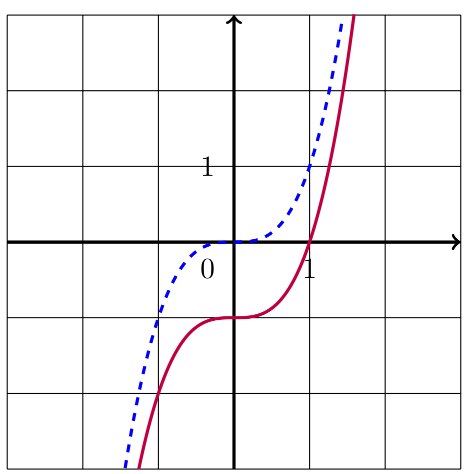
Soit f un polynôme du troisième degré de la forme $ax^3 + d$.
La courbe représentative de f est l' image de la courbe représentative d'équation $y = ax^3$ par la translation de vecteur $(0\,;\,d)$.

Exemple : représentations graphiques de quelques fonctions $x \mapsto ax^3 + d$



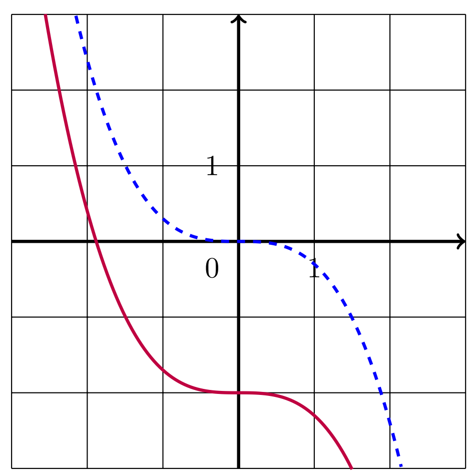
$x \mapsto -3x^3$

$x \mapsto -3x^3 + 1$



$x \mapsto x^3$

$x \mapsto x^3 - 1$



$x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^3$

$x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^3 - 2$

2 Racines et signe d'un polynôme de degré 3

Propriété - Définition

Soient a, x_1, x_2 et x_3 trois nombres réels avec $a \neq 0$.
la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est un polynôme du troisième degré.
L'écriture $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ est appelée la **forme factorisée** de cette fonction.

Propriété

Soit f un polynôme de degré 3 dont la forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec x_1, x_2 et x_3 non nécessairement distincts.

L'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions, non nécessairement distinctes : x_1, x_2 et x_3.

Définition

Soit f un polynôme de degré 3 dont la forme factorisée est $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec x_1, x_2 et x_3 non nécessairement distincts.
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont appelées les **racines** de f.

Exemple : étudier le signe d'un polynôme de degré 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -\dfrac{1}{2}(x + 4)(x - 3)(x + 2)$. On souhaite étudier le signe de ce polynôme sur son ensemble de définition.

(1) On détermine les racines du polynôme. Ici, les racines sont $x_1 = -4$, $x_2 = 3$ et $x_3 = -2$.
(2) On réalise le tableau de signe de la fonction sur son ensemble de définition :

x	$-\infty$		-4		-2		3		$+\infty$
$-\dfrac{1}{2}$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

3 Équation $x^3 = c$

Propriété

Soit c un réel.
L'équation $x^3 = c$ admet une unique solution réel. Cette solution se note $c^{\frac{1}{3}}$ ou encore $\sqrt[3]{c}$.

Définition

Soit c un nombre réel positif.
Le nombre $c^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{c}$ est appelé la **racine cubique** de c.

Exemples

- On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^3 - 2 = 133$.

$$\begin{aligned} & 5x^3 - 2 = 133 \\ \Leftrightarrow\ & 5x^3 = 135 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 = 27 \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{27} = 3 \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = 3$.

- On souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-2x^3 + 5 = -98$.

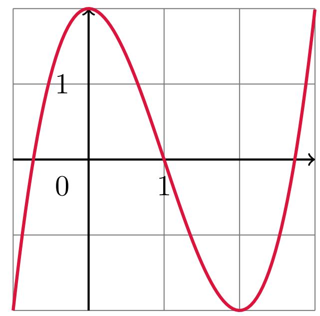
$$\begin{aligned} & -2x^3 + 5 = -98 \\ \Leftrightarrow\ & -2x^3 = -103 \\ \Leftrightarrow\ & x^3 = \frac{103}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{\frac{103}{2}} \end{aligned}$$

La solution de l'équation est donc $x = \sqrt[3]{\frac{103}{2}}$.

Polynômes de degré 3

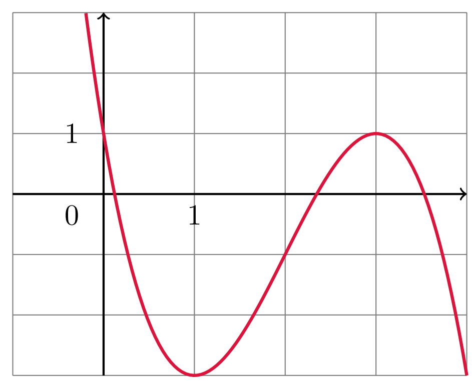
> Résolution graphiques d'équations et d'inéquations

Exercice n°1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$.



1. Calculer l'image de 2 par la fonction f.
2. Est-ce que 2 est une racine de f ?
3. On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f sur $[-1\,;\,3]$. Établir le tableau de variation de la fonction f sur $[-1\,;\,3]$.
4. Quelles semblent-être les trois racines de f ?
5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 1$.

Exercice n°2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$.



1. Calculer l'image de -1 par la fonction f.
2. On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f sur $[-1\,;\,4]$. Établir le tableau de variation de la fonction f sur $[-1\,;\,4]$.
3. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$?
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant -2$.
5. Établir le tableau de signe de $f(x)$ sur $[-1\,;\,4]$.

> Forme factorisée d'un polynôme de degré 3

Exercice n°3 Soit $f : x \mapsto x^3 - 8$.

1. Est-ce que 0 est une racine de f ?
2. Montrer que pour tout réel x, on a $x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4)$.
3. En déduire une racine évidente de $x^3 - 8$.

Exercice n°4 Soit $g : x \mapsto -2x^3 + x^2 + 2x - 1$.

1. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de géométrie, afficher la courbe représentative de la fonction g.
2. Déterminer, graphiquement, les solutions de l'équation $g(x) = 0$.
3. Montrer que $g(x) = -2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x+1)(x-1)$.

Exercice n°5 Soit $h : x \mapsto x^3 - 7x + 6$.

1. Montrer que $h(x) = (x-2)(x+3)(x-1)$.
2. En déduire les racines de h.

> Établir un tableau de signes

Exercice n°6 Soit $f : x \mapsto 6x^3 + 4x^2 - 2x$.

1. Montrer que 0 ainsi que -1 sont des racines du polynôme f.
2. Montrer que $f(x) = 2x(x+1)(3x-1)$.
3. Établir le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°7 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^3 - 10x^2 + 2x + 10$.

1. Montrer que pour tout réel x on a $g(x) = -2(x+1)(x-1)(x+5)$.
2. En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$.

1. (a) Montrer que 0 ; -1 et -2 sont des racines de f.
   (b) En déduire une factorisation de f.
2. Le coût total variable de commercialisation d'un bien alimentaire est donnée par la fonction C définie sur $[0\,;\,4]$ par
   $$C(q) = q^3 + 3q^2 + 2q$$
   où q désigne la quantité de produit en tonnes et $C(q)$ le coût correspondant en milliers d'euros.
   Calculer $C(1)$ et $C(3)$ et interpréter ces deux résultats.
3. Établir le tableau de signes de $C(q)$ sur $[0\,;\,4]$ en vous aidant de la factorisation trouvée à la question 1.b.
4. On désire trouver à partir de quelle quantité le coût devient supérieur ou égal à 53 000€. On propose pour cela le programme Python suivant :

```
1 def f(x):
2     return(...)
3 def cout():
4     q=2
5     while f(q)<... :
6         q=q+0.1
7     return (q)
```

   Compléter les lignes 2 et 5 du programme pour répondre au problème posé.
5. Tester le programme et donner la quantité de produit recherchée.
6. Que peut-on modifier dans ce programme pour avoir une quantité encore plus précise ?

> Résoudre des équations

Exercice n°9 Résoudre les équations suivantes :

$x^2 = 25$ $\qquad$ $x^2 = 100$ $\qquad$ $x^2 = 1$

Exercice n°10 Résoudre les équations suivantes :

$5x^2 = 125$ $\qquad$ $3x^2 + 6 = 306$ $\qquad$ $(6x + 1)^2 = 9$

Exercice n°11 Résoudre les équations suivantes :

$x^3 = 8$ $\qquad$ $x^3 = 81$ $\qquad$ $x^3 = 10$

Exercice n°12 Résoudre les équations suivantes :

$3x^3 = 24$ $\qquad$ $2x^3 + 9 = 171$ $\qquad$ $(6x + 1)^3 = 8$

Exercice n°13

On s'intéresse à l'offre et à la demande de poulets « label ».
L'offre est modélisée par la fonction f définie sur $[3\,;\,6]$ par $f : x \mapsto 0,1x^3 + 5$. La demande est quant à elle modélisée par la fonction g définie sur $[3\,;\,6]$ par $g(x) = -0,05x^3 + 30$.
La variable x désigne le prix du poulet au kg. Les quantités échangées sur ce marché $f(x)$ et $g(x)$ sont en tonnes.

1. Étudier le sens de variation de chacune de ses fonctions sur $[3\,;\,6]$.
2. (a) Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice. On donnera le résultat arrondi à 0,01 près.
   (b) Calculer la quantités de volailles échangées au prix d'équilibre, à 100 kg près.

Exercice n°14 On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x \quad \text{et} \quad g(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 3$$

1. Est-ce que 0 est une racine du polynôme f ? et pour le polynôme g ?
2. On donne ci-contre les représentations graphiques des fonctions f et g. De quelle couleur est la représentation graphique de f ?
3. Graphiquement, quelles semblent-être les solutions de l'équation $f(x) - g(x) = 0$?
4. Donner l'expression de $f(x) - g(x) = 0$ en fonction de x.
5. Montrer que $f(x) - g(x) = -2(x - 3)\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$.
6. En déduire le tableau de signe de $f(x) - g(x)$.
7. En déduire les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions f et g.