

Intégration

Intégration des fonctions continues par morceaux

Exercice 1 (*)

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t) dt$.

Exercice 2 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Établir que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell$.

Exercice 3 (*)

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}$.

Exercice 4 (*)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right)$.

Exercice 5 (*)

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, calculer $\int_0^{2\pi} \ln|x - e^{it}| dt$ en utilisant une somme de Riemann.

Dérivation et intégration

Exercice 6 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et $g : x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)f(t) dt$.

- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g'(x) = \int_0^x \cos(x-t)f(t) dt$.
- Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$.

Exercice 7 (*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant : $\forall t \in [a, b], f(a+b-t) = f(t)$.

Montrer que $\int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$, et en déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$.

Exercice 8 (*)

Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt = \frac{\pi}{4}$, et en déduire $\int_0^1 \frac{dt}{t + \sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 9 (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n dt$.

- Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) , et calculer u_0 et u_1 .
- En déduire les valeurs des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 10 (**)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- a. Soit $g : x \mapsto x \int_a^x (1-t)f(t)dt + (1-x) \int_x^b tf(t)dt$. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $g'' = f$.
- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $h_n : x \mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$. Justifier que h_n est de classe $\mathcal{C}^n$ et que $h_n^{(n)} = f$.

Exercice 11 (**)

Pour $0 < a < b$ déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{1 - \cos(t)}{t^3} dt$.

Exercice 12 (**)

Soient α et β deux réels tels que $0 < \alpha < \beta$. Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{e^u}{u} du$. Trouver la limite de f lorsque x tend vers 0.

Exercice 13 (**)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$, et $s_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0)$. Déterminer la limite de la suite (s_n) .

Exercice 14 (*)

Soit $I = \int_0^\pi \frac{t \sin t}{1 + (\cos t)^2} dt$. Effectuer dans I le changement de variable $u = \pi - t$ et en déduire la valeur de I .

Exercice 15 (***)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue non identiquement nulle.

- a. On suppose que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.
- b. On suppose que $\int_a^b f(t)dt = 0$ et $\int_a^b tf(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $]a, b[$.
- c. Soit $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. Montrer que f s'annule au moins n fois sur $]a, b[$.

Exercice 16 (***)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue à valeurs strictement positives, et $I = \int_a^b f(t)dt$.

- a. Montrer l'existence d'une subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \frac{I}{n}$.
- b. Quelle est la limite de $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f(x_k)$?

Exercice 17 (***)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$, et $M_2 = \sup_{t \in [a, b]} \|f''(t)\|$.

Montrer que : $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12}$. On pourra procéder à deux intégrations par parties successives.

Exercice 18 (*)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose $M_0 = \|f\|_\infty$ et $M_2 = \|f''\|_\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$, établir que pour tout $h > 0$,

$$|f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

puis en déduire que $\|f'\|_\infty \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

En utilisant cette fois les inégalités de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ ainsi qu'entre x et $x-h$, établir que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$$

et en déduire que $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Intégrales généralisées

Exercice 19 (*)

Déterminer sans recourir à la recherche de primitives la convergence ou non des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \quad \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt \quad \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln t}} dt$$

Exercice 20 (*)

Justifier l'existence puis calculer les intégrales :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(e^t+1)(e^{-t}+1)} \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$$

Exercice 21 (*)

Déterminer en fonction de $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt \quad \int_0^1 \frac{\ln t}{(1-t)^\alpha} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{t - \sin t}{t^\alpha} dt \quad \int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$$

Exercice 22 (*)

Nature de l'intégrale $\int_{2/\pi}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$?

Exercice 23 (**)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ et $\int_0^{+\infty} f''(t)^2 dt$ soient convergentes.

Montrer qu'il en est de même de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)f''(t) dt$.

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)^2 dt$ (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 24 (*)

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ converge puis calculer sa valeur en utilisant le changement de variable $u = 1/t$.

b. Soit $a > 0$. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2} dt$.

Exercice 25 (*)

Justifier l'existence de $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et de $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$, puis montrer que $I = J$.

Calculer $I + J$ en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, et en déduire la valeur de I .

Exercice 26 (**)

Soient α et β deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt$.

Soit $x > 0$. Montrer que $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} dt = \int_{\alpha x}^{\beta x} \frac{e^{-u}}{u} du$, et en déduire la valeur de I .

Exercice 27 (**)

a. Justifier l'existence de : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.

b. Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t^2} dt$.

À l'aide de la formule : $\sin(3t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$, montrer que $I(x) = \int_x^{3x} \frac{3 \sin t}{4t^2} dt$, et en déduire la valeur de I .

Exercice 28 (*)

Soit $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone et intégrable sur $[0, 1[$, et $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 29 (**)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et décroissante, telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t(f(t) - f(t+1)) dt$ converge et la calculer. On utilisera le résultat de l'exercice 7 du cours.

Exercice 30 (**)

À l'aide d'une intégration par parties, prouver que l'intégrale de Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ est convergente.

Exercice 31 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et T -périodique.

On pose $\lambda = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ et $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt - \lambda x$.

a. Montrer que la fonction F est T -périodique.

b. Soit $\alpha > 0$. Démontrer la convergence et l'égalité des intégrales $I = \int_T^{+\infty} \frac{f(t) - \lambda}{t^\alpha} dt$ et $J = \alpha \int_T^{+\infty} \frac{F(t)}{t^{\alpha+1}} dt$.

Exercice 32 (***)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\int_n^{n+1} f(t) dt = f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t) dt$.

b. On suppose de plus f' intégrable sur $[1, +\infty[$. Montrer que la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

c. Soit $\alpha > 1/2$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\cos(\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Exercice 33 (*)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux, décroissante et intégrable. Montrer que pour tout $h > 0$ la série $\sum hf(nh)$ converge, puis calculer la limite $\lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} hf(nh)$.

Le théorème de convergence dominée

Exercice 34 (*)

Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n + e^t}$.

Exercice 35 (*)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 36 (*)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 nt^n f(t) dt = f(1)$.

Exercice 37 (*)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et bornée, telle que $f(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de : $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

Exercice 38 (*)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t^n) dt$.
- On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que $I_n = f(0) + \int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right) f'(u) du$.
- En déduire que $I_n = f(0) - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(u) f'(u) du + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 39 (*)

Calculez la limite : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} dt$. Pour cela, on considérera la fonction $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-2t} & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases}$$

Exercice 40 (*)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que f et f' soient bornées. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt \text{ existe, et calculer } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n.$$

On suppose $f'(0) \neq 0$. Donner un équivalent de $(I_n - \ell)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 41 (**)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} n f(t) e^{-nt} dt \quad \text{puis} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n n f(t) e^{-nt} dt.$$

Exercice 42 (*)

Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt$ (utiliser le développement en série entière de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$).

Exercice 43 (*)

Calculer $\int_0^1 \frac{t \ln t}{1-t} dt$ en utilisant le développement en série entière de $t \mapsto \frac{1}{1-t}$.

Exercice 44 (**)

Exprimer l'intégrale $\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t^2} dt$ en fonction de la constante d'Apéry $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Exercice 45 (**)

Prouver les deux relations suivantes (connues dans les pays anglo-saxons sous le nom de *sophomore's dream*) :

$$\int_0^1 t^t dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \quad \text{et} \quad \int_0^1 t^{-t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$$

Exercice 46 (**)

On pose pour $n \geq 1$: $u_n = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. Justifier la convergence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 47 (**)

Soit (λ_n) une suite croissante de réels strictement positifs, divergeant vers $+\infty$. On considère la fonction suivante :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-\lambda_n x}.$$

- Quel est l'ensemble de définition de S ? Y-est-elle continue?
- On suppose la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que S est intégrable sur $]0, +\infty[$, et calculer $\int_0^{+\infty} S(t) dt$.
- On ne suppose plus la série $\sum \frac{1}{\lambda_n}$ convergente. Montrer que le résultat précédent subsiste.

Exercice 48 (**)

- Justifier l'existence de l'intégrale $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1} dt$, puis montrer que $K = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin t e^{-nt} dt$.
- Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin t e^{-nt} dt$, et en déduire que $K = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Intégrales à paramètre

Exercice 49 (**)

Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{xh(t) dt}{x^2 + t^2} = \frac{\pi}{2} h(0)$.

Exercice 50 (*)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan t dt$ est définie et continue sur $]0, +\infty[$ puis en donner un équivalent en 0 et en $+\infty$.

Exercice 51 (*)

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

- Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Calculer $f'(x)$, et en déduire une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 52 (*)

Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. En déduire une expression de g sans symbole intégral (on admettra que $g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 53 (*)

On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$. Montrer qu'elle est définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. Donner une équation différentielle du second ordre vérifiée par g sur $]0, +\infty[$.

Exercice 54 (**)

Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt$.

- Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$. f est-elle continue sur cet intervalle? Dérivable?
- On pose $h(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Exprimer f à l'aide de h et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 55 (**)

On pose quand c'est possible $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

- Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f . Est-elle continue sur $\mathcal{D}$? De classe $\mathcal{C}^1$?
- Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}$.
- Donner un équivalent de f en $(-1)^+$.

Exercice 56 (**)

On considère la fonction $g : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(x^2 + \sin^2 t) dt$. Quel est son ensemble de définition? g y est-elle continue? de classe $\mathcal{C}^1$? Exprimer g sans symbole intégral.

Exercice 57 (**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$, et en déduire que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.