La musique et les nombres – Fiche de cours

1. Musique et intervalle

a. Harmonie musicale

Il existe des combinaisons de sons consonants (plus agréables à l’oreille) que d’autres (dissonants).
Depuis l’antiquité les mathématiciens ont recherché l’harmonie musicale.

b. L’intervalle

L’intervalle de 2 notes est le rapport de leur fréquence fondamentale

$I=\frac{4}{3}$ quarte $\qquad$ $I=\frac{3}{2}$ quinte $\qquad$ $I=2$ octave

c. La gamme

Une gamme est une suite finie de notes réparties sur un octave

2. La gamme de Pythagore

a. Définition

La construction des 7 notes de la gamme de Pythagore utilise le principe suivant :

- choisir une note ou fréquence f de départ de la quinte
  - calculer $1{,}5 \cdot f$
  - si $1{,}5 \cdot f < 2f$ on conserve la fréquence et on associe une note
  - si $1{,}5 \cdot f > 2f$ on divise la fréquence par 2 et on associe une note
  - on réitère autant de fois que nécessaire

La gamme de Pythagore ne reboucle pas exactement à $2 \cdot f$ pour la 8ième note ; il existe une infinité de cycles de quintes de Pythagore

b. Les notes de la gamme de Pythagore

Les 7 notes de la gamme de Pythagore sont :

Do, Ré, Mi, Fa, Sol, La, Si

c. Exemple de cycle de quinte (octave 3)

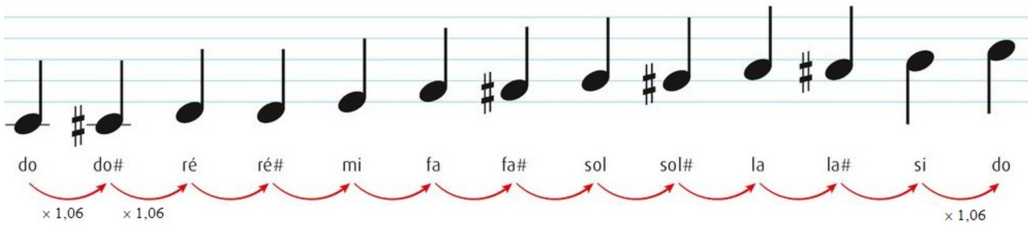
262 Hz / 295 Hz / 331 Hz / 373 Hz / 393 Hz / 442 Hz / 497 Hz
5 tons (rapport 5/8) et 2 demi-tons (rapport 256/243)

d. Inconvénient de la gamme de Pythagore

La gamme de Pythagore ne possède pas des intervalles égaux et ne boucle pas : cela présente l’inconvénient de la transposition musicale d’un instrument à l’autre

3. La gamme tempérée

L’harmonie musicale est restreinte à l’octave qui a été découpé en 12 intervalles égaux appelés demi-tons
La connaissance des nombres irrationnels a permis au 17ième siècle de construire des gammes définies par des suites géométriques de raison $r=2^{1/12} \approx 1{,}06$



La musique et les nombres – Exercices – Devoirs

Exercice 1 corrigé disponible

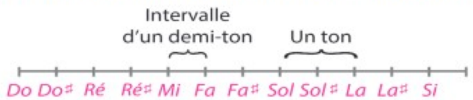
Q1) Qu'est-ce que la « quinte du loup » ? Quelle est son origine ?

Q2) Si le cycle des quintes était fini, il existerait un nombre n de quintes successives qui donnerait la même note qu'un nombre p d'octaves successives. Montrer en raisonnement par l'absurde que le cycle des quinte est infini.

Q3) En raisonnement à nouveau par l'absurde, montrer que les gammes de Pythagore ne « rebouclent » pas.

Q4) À quelle époque est apparue la gamme tempérée ? Quelle est sa particularité ?

Q5) À Quelle est la valeur du rapport de fréquence r entre deux notes de la gamme tempérée ?
Sachant que ce rapport est appelé demi-ton, en déduire la valeur du rapport de fréquence d'un ton.



Q6) La gamme de Pythagore et la gamme tempérée sont-elles construites à partir des mêmes types de nombre ?

Q7) Dans la gamme tempérée, la hauteur du La_3 (La de la troisième octave) est fixée à 440,0 Hz et sert de référence.
Calculer les fréquences des deux notes suivantes et précédentes et compléter le tableau ci-dessous :

Note	Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si	Do
Fréquence (Hz)	261,6	277,2	293,7	311,1	329,6	349,2	370			440,0			523,2

Q8) Montrer que les deux Do du tableau (do3 et do4) sont séparés d'une octave.

Q9) Lors d'une transposition, la tonalité d'un morceau de musique est augmentée de deux tons et demi. Par quelle note le Do est-il alors remplacé ?

Q10) En quoi la gamme tempérée (gamme à intervalles égaux) est-elle plus pratique pour les musiciens ?

Exercice 2 corrigé disponible

Q1 Dans la gamme de Pythagore, combien y-a-t'il de notes de musique ?

Q2 Quand peut-on dire que deux sons sont harmonieux ?

Q3 Remplir le QCM suivant :

Qu'est-ce que le son ?
☐ une onde mécanique.
☐une onde électromagnétique.
☐un truc qui sort d'un casque audio.
☐de l'énergie se propageant de proche en proche dans un milieu tel que l'air.

Une octave est un intervalle :
☐ séparant deux notes de même nom.
☐ constitué de 8 notes de même nom.
☐ séparant deux notes dont les fréquences sont dans le rapport 3/2.
☐ séparant deux notes dont les fréquences sont dans le rapport 2/1.

La hauteur d'un son :
☐ est reliée à la fréquence de l'onde.
☐ est le volume auquel on écoute le son.
☐ indique si le son est plutôt grave ou aigu.

Pour construire sa gamme, Pythagore s'est basé sur :
☐ la quinte.
☐ la tierce.
☐ la quarte.

Exercice 3 corrigé disponible

Beethoven est un compositeur allemand qui a composé la neuvième symphonie en 1823. L'hymne européen, un arrangement de l'Ode à la joie, est le dernier mouvement de cette symphonie.

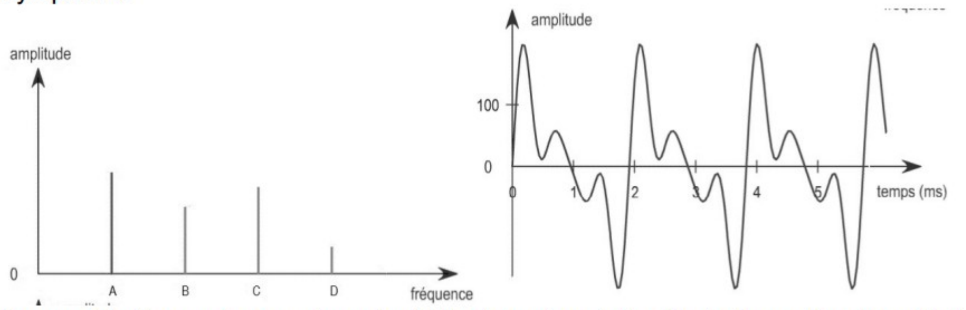
Document 1 : la neuvième symphonie

Figure 1a : Extrait de la partition de la neuvième symphonie et fréquences des notes jouées

Notes jouées : si3 si3 do4 ré4 ré4 do4 si3 la3 sol3 sol3 la3 si3
Fréquences : 494 523 587 440 392

Source : http://www.nelpallone.net/partition-piano-ode-à-la-joie-beethoven.html

Figure 1b : spectre et signal du son d'une note jouée au piano pendant la 9^e symphonie



Source : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/synthese.html

1- On s'intéresse à une note jouée au piano, dont le spectre et le signal sont donnés en figure 1b.
1-a- Ce son est-il pur ou composé ? Justifier.
1-b- Montrer que la note jouée correspond au do4.

2- Le spectre de la figure 1b présente quatre pics notés A, B, C et D.
2-a- Quelle est la valeur de la fréquence associée au pic A ? Justifier.
2-b- Quelle est la valeur de la fréquence associée au pic C ? Justifier.

3- L'extrait de la neuvième symphonie (figure 1a) est joué sur les octaves 3 et 4. Ainsi, la note do4 indique que la note jouée est le do de la quatrième octave.

La succession des notes des octaves 3 et 4 de la gamme à tempérament égal (également appelée gamme tempérée) est donnée dans un tableau dans le document réponse de l'annexe.
Deux notes successives sont séparées d'un demi-ton, ce qui correspond à un intervalle de fréquence de racine douzième de 2, notée $\sqrt[12]{2}$ ou $2^{1/12}$.
Compléter le tableau en calculant les fréquences manquantes arrondies à l'unité dans **l'annexe** à rendre avec la copie.

4- Une grande partie de la neuvième symphonie est chantée. Un baryton ne peut chanter que des notes dont les fréquences sont comprises entre 130 Hz et 400 Hz. On souhaite transposer l'extrait de la partition (document 1, figure 1a) afin que ce baryton puisse la chanter.
On rappelle que la transposition musicale consiste à décaler les fréquences de toutes les notes vers l'aigu ou le grave en les multipliant ou les divisant par un nombre fixé de demi-tons.

4-a- Justifier que le baryton ne peut pas chanter la note la plus aiguë de la partition donnée.

4-b- L'algorithme ci-contre permet de déterminer le nombre N de demi-tons ($2^{1/12}$) de l'intervalle minimal pour réaliser cette transposition.
En arrondissant les valeurs des fréquences F à l'unité, compléter le tableau du **document réponse à rendre avec la copie** en écrivant les valeurs des différentes variables au fur et à mesure de l'algorithme.

4-c- Conclure en donnant le nombre de demi-tons correspondant à cette transposition.

Algorithme :

$F \leftarrow 587$
$N \leftarrow 0$
Tant que $F > 400$ faire :
$$F \leftarrow \frac{F}{2^{1/12}}$$
$$N \leftarrow N + 1$$
Fin Tant que

Question **3-**
Tableau à compléter :

Note	ré3	ré3#	mi3	fa3	fa3#	sol3	sol3#	la3	la3#	si3	do4	do4#	ré4
Fréquence (en Hz)	294	311				392	415	440	466	494	523	554	587

Question **4-b**
Tableau à compléter :

F	587									
N	0									
Condition $F > 400$	VRAI									

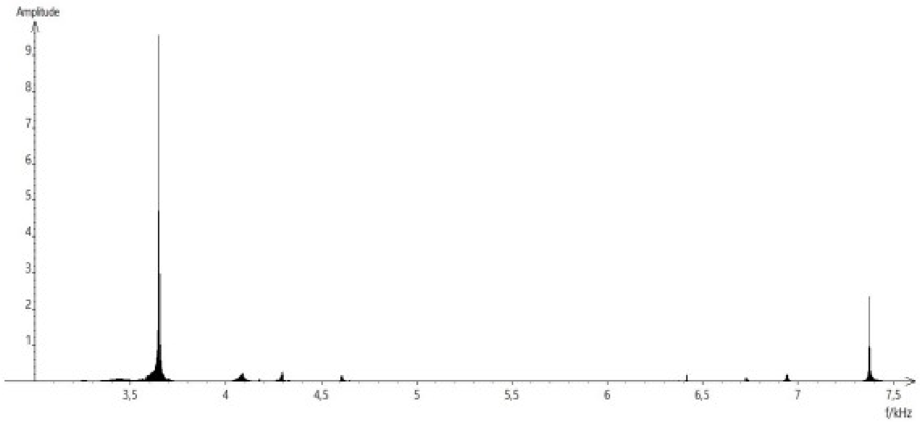
Exercice 4 **corrigé disponible**

Partie 1. Masse et fréquence.

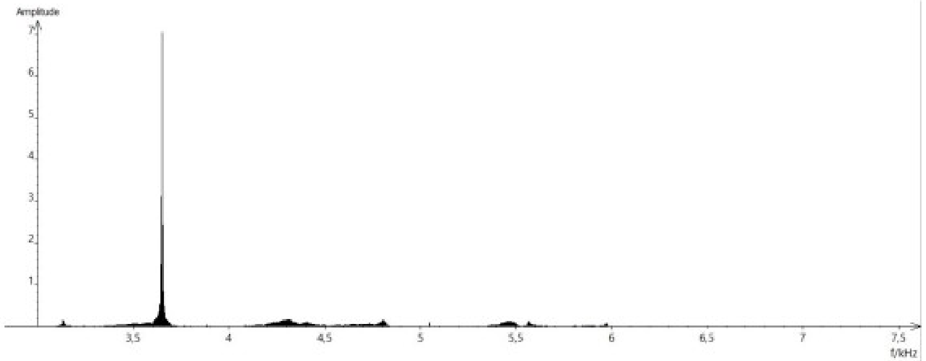
On dispose de trois marteaux M_1, M_2 et M_3 de masses respectives $m_1 = 0{,}24$ kg, $m_2 = 0{,}48$ kg et $m_3 = 1{,}44$ kg.
L'expérience consiste à les laisser tomber sur une enclume. Un logiciel d'acquisition enregistre le signal sonore émis.
On désigne respectivement par f_1, f_2 et f_3 les fréquences fondamentales des sons émis par les marteaux M_1, M_2 et M_3 lors de l'expérience.

Document 1 : spectres des fréquences des sons émis lors de la chute des marteaux

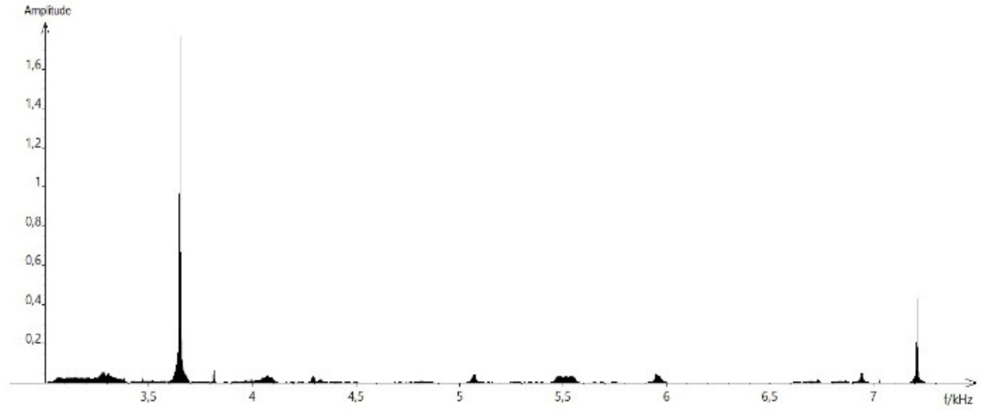
Spectre du son obtenu avec le marteau 1 :



Spectre du son obtenu avec le marteau 2 :



Spectre du son obtenu avec le marteau 3 :



1- Lire sur le document 1 les fréquences fondamentales f_1, f_2, et f_3 des sons émis lors de l'expérience et noter leurs valeurs sur la copie.
2- Comparer ces fréquences. La masse du marteau influe-t-elle sur la fréquence fondamentale du son émis ?

Partie 2. Construction d'une gamme

On souhaite construire une gamme musicale en harmonie avec la note obtenue en tapant sur l'enclume de la partie 1. On admet que cette fréquence vaut environ 3600 Hz.

3- Cette note, jugée trop aigüe, doit être diminuée de plusieurs octaves-pour obtenir une fréquence proche de 440 Hz, correspondant à la fréquence du La3 servant communément de référence. Combien d'octaves séparent la note obtenue en tapant sur l'enclume et le La3 ?

4- Dans une gamme de douze notes au tempérament égal (aussi appelée gamme tempérée), la fréquence de chaque note est obtenue en multipliant la fréquence de la précédente par racine douzième de deux, notée $\sqrt[12]{2}$ ou $2^{\frac{1}{12}}$.

4-a- Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette de construire la gamme de douze notes au tempérament égal à partir de la note de fréquence $F = f_0$

```
    F ← ⋯
Pour i allant de … à …
        Afficher F
    F ← ⋯
FinPour
```

4-b- Donner la valeur de B dans le tableau des fréquences ci-dessous :

	Note 0	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6	Note 7	Note 8	Note 9	Note 10	Note 11	Note 12
Fréquence f (en Hertz)	455 $= f_0$	482	511	541	573	607	**A**	682	723	765	811	859	910
Rapport $\frac{f}{f_0}$	1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	**B**	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	2

4-c- Expliquer pourquoi $A^2 = 682 \times 607$ puis donner la valeur de A.

5- On rappelle que la quinte juste introduite pour construire les gammes de Pythagore est exactement $\frac{3}{2}$.
Déterminer la note de la gamme pour laquelle l'intervalle qu'elle forme avec la note 0 est le plus proche de la quinte juste.

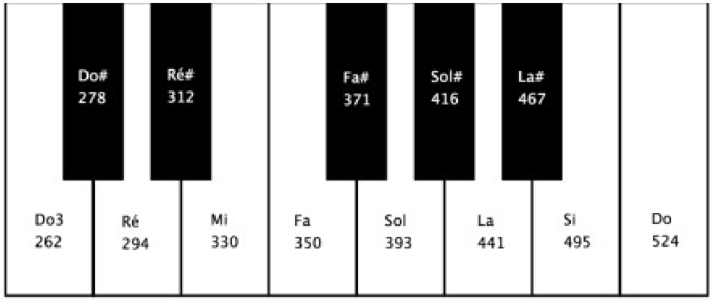
Exercice 5 corrigé disponible

Les instruments de musique produisent des sons auxquels l'oreille humaine associe certaines caractéristiques : hauteur, timbre et intensité. La répartition des notes dans une gamme a été retenue pour qu'elles sonnent de manière harmonieuse les unes par rapport aux autres. La recherche de cette harmonie a conduit à différents types de gammes, des gammes dites de Pythagore aux gammes tempérées.

Partie 1 : des instruments et des notes

Les cordes d'un piano vibrent lorsqu'elles sont frappées par de petits marteaux actionnés par les touches du clavier. Les sons produits par le piano résultent de ces vibrations.

Document 1 : notes associées aux touches d'un piano pour l'octave Do3 - Do4 et fréquences associées en hertz (Hz)



1- Calculer la fréquence associée au La4 située une octave au-dessus du La3.

2- On s'intéresse aux sons produits par ce piano. Un système d'acquisition informatisé permet l'enregistrement et la visualisation des signaux associés à ces sons.

Document 2 : signaux enregistrés correspondant à des notes de musique jouées par un piano

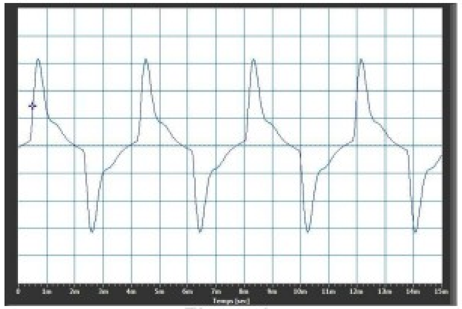


Figure 1
Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms.

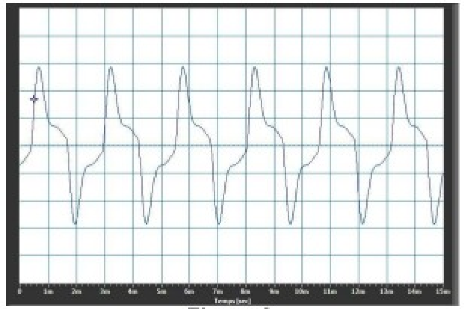


Figure 2
Signal sonore en fonction du temps. Une graduation horizontale correspond à 1,0 ms.

2-a- Justifier que les figures 1 et 2 correspondent à deux notes différentes.

2-b- Identifier les notes correspondantes aux figures 1 et 2.

Partie 2 : des notes et des gammes

La théorie musicale étant fondée sur des rapports de fréquences, on décide de simplifier les calculs en attribuant la valeur 1 (sans unité) à une fréquence choisie comme référence. Celle-ci correspond à une note de référence (par exemple 262 Hz pour le Do 3). On retrouve ensuite les fréquences réelles en multipliant les valeurs calculées par la fréquence de la note de référence.

La construction des gammes dites de Pythagore est basée sur le cycle des quintes : on part de la fréquence de valeur $f_0 = 1$. On construit une nouvelle fréquence, la quinte, en multipliant f_0 par $\frac{3}{2}$. On réitère ce processus pour obtenir la quinte de la quinte, et ainsi de suite. À certaines étapes, le fait de multiplier par $\frac{3}{2}$ une fréquence f comprise entre 1 et 2 peut donner une fréquence supérieure ou égale à 2. On se propose de démontrer que, si on divise par 2 la valeur obtenue, on la ramène dans l'octave.

3- On suppose que $1 \leq f < 2$ et on raisonne par disjonction de cas :

- premier cas : $1 \leq f < \frac{4}{3}$. Montrer que $1 \leq \frac{3}{2} \times f < 2$
- deuxième cas : $\frac{4}{3} \leq f < 2$. Montrer que $2 \leq \frac{3}{2} \times f$ et $1 \leq \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} f < 2$

4- L'algorithme suivant permet de calculer les fréquences des notes successivement obtenues par ce processus jusqu'à ce qu'on retombe sur la fréquence initiale.

```
f ← 1
f ← 3/2 × f
n ← 1
Tant que  f ≠ 1 faire
    n ← n + 1
    f ← f × 3/2
    Si  f ≥ 2 alors  f ← f × 1/2
   Fin Si
Fin Tant que
```

Recopier et compléter le tableau ci-dessous en donnant les valeurs des 12 premières quintes obtenues par cet algorithme. Les résultats seront donnés d'abord sous forme exacte comme quotients d'une puissance de 2 par une puissance de 3, puis par leurs valeurs décimales approchées au centième obtenues à l'aide de la calculatrice.

Numéro de la note	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence (fraction irréductible)	1	$\frac{3}{2}$				$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$
Fréquence (valeur approchée à 10^{-2} près)	1	1,5				1,9	1,42	1,07		1,20	1,80	1,35	1,01

5- L'algorithme termine-t-il pour une valeur de n inférieure ou égale à 12 ?

6- Chacune des fréquences calculées est obtenue à partir de 1 par multiplications successives par $\frac{3}{2}$ et parfois par $\frac{1}{2}$. Elles peuvent donc toutes s'écrire sous la forme $\frac{3^m}{2^n}$ où m et n sont des entiers naturels non nuls.

6-a- Démontrer que l'égalité $\frac{3^m}{2^n} = 1$ est impossible.

6-b- Que peut-on en déduire pour l'algorithme proposé ci-dessus ?

7- D'après ce qui précède, le cycle des quintes ne « reboucle » jamais exactement sur la note de départ. En s'appuyant sur le tableau de la question 4, justifier le choix de 12 notes dans une gamme construite selon ce principe.

8- Si on choisit comme fréquence de référence celle du Do3, les fréquences réelles des autres notes sont obtenues en multipliant par 262 les fréquences calculées dans le tableau de la question 4. En les rangeant dans l'ordre croissant et en arrondissant à l'unité, on obtient les fréquences des notes de la gamme de Pythagore à 12 notes :

Do	Do#	Ré	Ré#	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	La#	Si
262	280	295	315	332	354	373	393	420	442	472	497

8-a- Comparer ces fréquences à celles inscrites sur les touches du piano de la partie 1

8-b- Calculer au centième près les rapports entre la fréquence du Do# et celle du Do puis entre la fréquence du Ré et celle du Do# dans cette gamme. Que constate-t-on ?

9-a- Calculer au centième près les rapports entre la fréquence du Do# et celle du Do, puis entre la fréquence du Ré et celle du Do# dans la gamme figurant sur le piano représenté dans la partie 1. Que constate-t-on ?

9-b- Comment nomme-t-on la gamme figurant sur le piano ? En quoi diffère-t-elle de la gamme de Pythagore à 12 notes ?