

Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 1 (*)

Soit $a > 0$. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \sum e^{\sqrt{n}} z^n & \sum \frac{n!}{2^{2n} \sqrt{(2n)!}} z^n & \sum \tan\left(\frac{n\pi}{7}\right) z^{2n} & \sum n^{(-1)^n} z^n \\ \sum \frac{n^n}{n!} z^{2n} & \sum a^n z^{n!} & \sum \frac{1 \times 4 \times 7 \times \cdots \times (3n-2)}{n!} z^{2n} & \sum \binom{2n}{n} z^n \end{array}$$

Exercice 2 (*)

Pour $n \geq 1$ on note a_n le nombre de diviseurs de n . déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 3 (*)

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs, R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, et $\alpha > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n^\alpha z^n$?

Exercice 4 (*)

On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergences respectifs R_p et R_i . Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exercice 5 (*)

Soit (a_n) une suite ne s'annulant pas. On note R_1 le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et R_2 celui de $\sum \frac{1}{a_n} z^n$ et on suppose $0 < R_i < +\infty$ pour $i \in \{1, 2\}$. Montrer que $R_1 R_2 \leq 1$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Exercice 6 (*)

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs $R_a \in \mathbb{R}_+^*$ et $R_b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie : $R \geq R_a R_b$. Donner un exemple pour lequel l'inégalité est stricte.

Exercice 7 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence égal à $+\infty$.

Exercice 8 (**)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

- Soit $\alpha > 0$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$.
- Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum P(n) a_n z^n$.

Calcul de sommes

Exercice 9 (*)

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$ sur l'intervalle ouvert de convergence, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 10 (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum s_n x^n$, puis en calculer la somme.

Exercice 11 (**)

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, après en avoir déterminé le rayon de convergence.

Exercice 12 (**)

Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ sur son intervalle ouvert de convergence.

Exercice 13 (**)

Calculer la somme sur l'intervalle ouvert de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$.

Exercice 14 (**)

On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$.

- Quel est son rayon de convergence ? On note $\text{Li}_2(x)$ sa somme (cette fonction s'appelle le dilogarithme). Reconnaître sa dérivée.
- Pour $x \in]0, 1[$, exprimer $\text{Li}_2(x) + \text{Li}_2(1-x)$ à l'aide des fonctions usuelles.
- En déduire l'égalité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}$.

Développement en série entière

Exercice 15 (*)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, les fonctions :

$$f_1 : x \mapsto e^{-x} \sin x \quad (\text{utiliser la formule d'Euler})$$

$$f_2 : x \mapsto \ln(1+x-2x^2) \quad (\text{factoriser le polynôme})$$

$$f_3 : x \mapsto \ln(\sqrt{1-2x \operatorname{ch} a + x^2}) \quad (\text{factoriser le polynôme})$$

$$f_4 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad (\text{dériver la fonction})$$

$$f_5 : x \mapsto (\arctan x)^2 \quad (\text{utiliser un produit de Cauchy})$$

$$f_6 : x \mapsto \sin(\alpha \arcsin x) \quad (\text{déterminer une équation différentielle vérifiée par } f_6)$$

Exercice 16 (*)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2} dt$ est développable en série entière au voisinage de 0, puis calculer les coefficients de ce développement.

Exercice 17 (*)

Développer en série entière la fonction $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ et en déduire le développement de $g(x) = \frac{e^{x^2}}{1-x}$.

Exercice 18 (*)

On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$, dont on cherche l'unique solution vérifiant les conditions de Cauchy : $y(0) = y'(0) = 0$.

Si cette solution est développable en série entière au voisinage de 0 sous la forme : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?

Calculer explicitement a_n en fonction de n . Quel est le rayon de convergence de la série entière correspondante, et quel en est la somme?

Exercice 19 (*)

Développer en série entière $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ en exploitant la relation $(1-x-x^2)f(x) = x$.

Exercice 20 (**)

Développer en série entière, sur un intervalle adéquat, la fonction $x \mapsto \arctan(x+1)$.

Exercice 21 (**)

Soit $r > 0$ et f et g deux fonctions développables en série entière sur l'intervalle $] -r, r[$. On suppose que pour tout $x \in] -r, r[$, $f(x)g(x) = 0$. Montrer que $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 22 (**)

Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$. On suppose pour l'instant que le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ est strictement positif et on note $f(x)$ sa somme sur $] -R, R[$.

a. Montrer que pour tout $x \in] -R, R[$, $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.

b. En déduire que pour tout $x \in] -R, R[\setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$.

c. En déduire la valeur de R , puis développer en série entière l'expression précédente pour en déduire l'expression de a_n en fonction de n .

Exercice 23 (**)

Soit E un ensemble de cardinal n . On appelle *dérangement* de E une permutation sans point fixe, et on note d_n le nombre de ces dérangements, avec la convention $d_0 = 1$.

a. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$.

b. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence est au moins égal à 1, calculer $e^x f(x)$ et en déduire $f(x)$.

c. Prouver alors que $d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Étude au bord de l'intervalle de convergence

Exercice 24 (**)

En utilisant le développement en série entière de la fonction arctan, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 25 (**)

Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs telle que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ soit égal à 1. Pour tout $x \in]-1, 1[$

on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. On suppose la série $\sum a_n$ convergente et on note S sa somme. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S$.

b. On suppose la série $\sum a_n$ divergente. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = +\infty$.

Exercice 26 (***)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence égal à 1. On suppose de plus que la série $\sum a_n$ converge, et on

pose pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$.

b. En déduire que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = S$.