

M3 - Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

Table des matières

1	Gradient et différentielle d'une fonction	2
1.1	Différentielle d'une fonction d'une variable	2
1.2	Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables	2
1.3	Différentielle d'une fonction de plusieurs variables	3
1.4	Définition du gradient	3
1.5	Lien fondamental entre gradient et différentielle	3
1.6	Conséquences géométriques	4
2	Différentielle, variation et intégration de la différentielle de l'énergie potentielle	4
2.1	Différentielle et variation	4
2.2	Intégrale de la différentielle de l'énergie potentielle	5
3	Travail et puissance d'une force	6
3.1	Puissance d'une force	6
3.2	Travail élémentaire d'une force	7
3.3	Travail d'une force au cours d'un déplacement	7
3.4	Exemple de travaux	7
4	Loi de l'énergie cinétique	9
5	Énergie potentielle et forces conservatives	11
5.1	Définitions	11
5.2	Force de pesanteur	11
5.3	Force de rappel élastique	11
5.4	Utilisation du gradient	12
5.5	Force de frottements non conservative	13
6	Énergie mécanique	13
6.1	Définition	13
6.2	Conservation de l'énergie mécanique	14
7	Analyse du mouvement à partir du graphe de l'énergie potentielle	15
7.1	Positions d'équilibre	15
7.2	Étude de la stabilité et du bornage du mouvement	16
7.3	Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable	17
7.3.1	Exemple du pendule	17
7.3.2	Généralisation	19

1 Gradient et différentielle d'une fonction

1.1 Différentielle d'une fonction d'une variable

Définition de la différentielle d'une fonction d'une variable

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dérivable en x .

La **différentielle** de f en x est définie par :

$$df = f'(x) dx$$

Elle représente la **meilleure approximation linéaire** de la variation de f au voisinage de x :

$$f(x + dx) \simeq f(x) + f'(x)dx \quad (dx \text{ petit})$$

1.2 Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables

Définition de la dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de trois variables,

$$f = f(x, y, z).$$

La **dérivée partielle de f par rapport à x** , notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, est définie comme la dérivée de la fonction d'une variable

$$x \mapsto f(x, y, z),$$

les variables y et z étant considérées comme constantes. On définit de manière analogue les dérivées partielles par rapport à y et z .

Formellement :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

si cette limite existe.

Interprétation : La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ mesure la variation de f lorsque seule la variable x varie, les autres étant figées.

Exemples

1. Soit

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^3.$$

On obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + z^3, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3yz^2.$$

2. Soit

$$f(x, y, z) = \sin(xy) + e^z.$$

Alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^z.$$

3. En physique, pour une énergie potentielle

$$E_p(x, y, z) = mgz,$$

on a :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial z} = mg.$$

On verra plus loin que les dérivées partielles constituent les composantes du gradient de f , noté $\overrightarrow{\text{grad}} f$, qui décrit la variation spatiale de la fonction f .

1.3 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Définition de la différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. La différentielle de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Remarque : La différentielle df est une **application linéaire** du déplacement infinitésimal (dx, dy, dz) .

1.4 Définition du gradient

Définition du gradient d'un champ scalaire

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On définit le **gradient** de f par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \text{dans la base cartésienne.}$$

C'est un **champ de vecteurs**, associé au champ scalaire $f(x, y, z)$.

1.5 Lien fondamental entre gradient et différentielle

On introduit le vecteur déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$, que l'on note aussi $d\vec{r}$:

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

Alors la différentielle s'écrit sous la forme compacte :

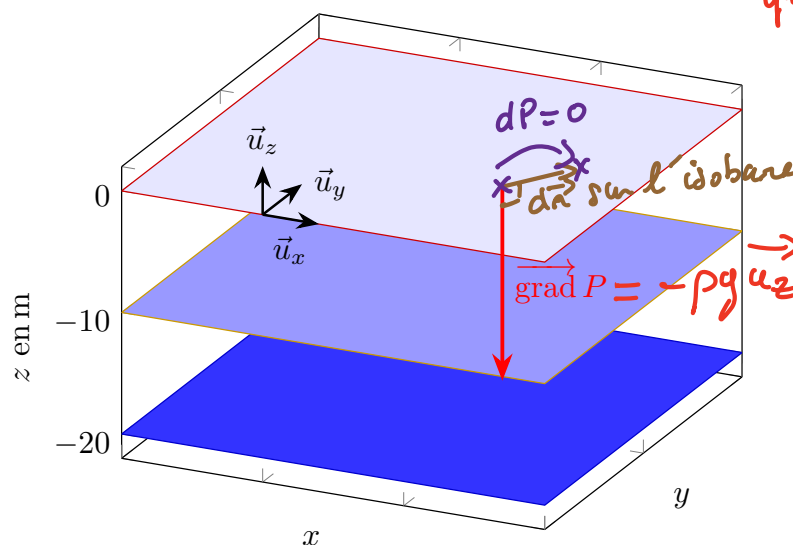
$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{r} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

1.6 Conséquences géométriques

Propriétés du gradient

- Le gradient de f pointe dans la direction de la **plus forte augmentation** de f
- Il est **orthogonal aux surfaces de niveau** de f
- Sur une surface de niveau : $df = 0$

Exemple : Considérons le champ scalaire de pression dans la mer, $P(x, y, z) = P_0 - \rho g z$. Alors les surfaces isobares sont des plan à $z = \text{cst}$ et $\vec{\text{grad}} P = -\rho g \vec{u}_z$ est bien perpendiculaire aux surfaces isobares et dirigé vers les zones de pression intense.



$$\vec{\text{grad}} P = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{pmatrix}$$

Figure 1 – Champ de pression et son gradient dans la mer

2 Différentielle, variation et intégration de la différentielle de l'énergie potentielle

2.1 Différentielle et variation

Soit $E_p(x, y, z)$ une fonction de classe C^1 . La **différentielle** de E_p est définie par :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = \vec{\text{grad}} E_p \cdot d\vec{r}$$

Elle représente la **partie linéaire** de la variation de E_p . La variation réelle de E_p entre deux points infiniment proches vérifie :

$$E_p(\vec{r} + d\vec{r}) - E_p(\vec{r}) = dE_p + \mathcal{O}(\|d\vec{r}\|^2)$$

Ainsi, l'écriture

$$dE_p = E_p(x + dx, y + dy, z + dz) - E_p(x, y, z)$$

est un **abus de langage** courant en physique mais elle n'est correcte qu'au premier ordre.

Exemple : oscillateur harmonique

Considérons l'énergie potentielle d'un oscillateur harmonique unidimensionnel :

$$E_{pe}(x) = \frac{1}{2}kx^2. \quad \text{donc } \frac{\partial E_p}{\partial x} = kx ; \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

Sa différentielle vaut :

$$dE_{pe} = kx dx. \quad (= \frac{\partial E_p}{\partial x} \times dx)$$

Calculons maintenant la variation exacte de l'énergie potentielle lorsque la position passe de x à $x + dx$:

$$\begin{aligned} E_{pe}(x + dx) - E_{pe}(x) &= \frac{1}{2}k(x + dx)^2 - \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}k(2x dx + (dx)^2) \\ &= kx dx + \frac{1}{2}k(dx)^2. \end{aligned}$$

On observe alors clairement que :

$$E_{pe}(x + dx) - E_{pe}(x) = dE_{pe} + \frac{1}{2}k(dx)^2,$$

le second terme étant d'ordre 2 en dx . Cet exemple montre que la différentielle dE_{pe} correspond uniquement à la partie linéaire de la variation de l'énergie potentielle, les termes d'ordre supérieur étant négligés dans l'approximation différentielle.

2.2 Intégrale de la différentielle de l'énergie potentielle

Soit une courbe paramétrée représentant la trajectoire du point M entre les instants t_A et t_B :

$$M : [t_A, t_B] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad M(t_A) = A, \quad M(t_B) = B.$$

On associe à chaque point $M(t)$ son vecteur position :

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$$

Soit $E_p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction composée :

$$g(t) = E_p(\vec{r}(t))$$

Par la règle de dérivation en chaîne :

$$g'(t) = \frac{dE_p}{dt} = \overrightarrow{\text{grad}} E_p(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = \frac{dE_p}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dE_p}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dE_p}{dz} \frac{dz}{dt}.$$

Or, le long de la courbe, le déplacement infinitésimal vérifie :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt.$$

La différentielle de E_p le long de la courbe s'écrit donc :

$$dE_p \stackrel{A}{=} \overrightarrow{\text{grad}} E_p(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r} = \overrightarrow{\text{grad}} E_p(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = g'(t) dt$$

En intégrant la différentielle de l'énergie potentielle le long de la trajectoire allant de A à B , ou, de manière équivalente, entre les instants t_A et t_B , on obtient :

$$\int_A^B dE_p = \int_{t_A}^{t_B} g'(t) dt = g(t_B) - g(t_A) = E_p(B) - E_p(A)$$

$$\int_A^B dE_p = E_p(B) - E_p(A)$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} g'(t) dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dE_p}{dt} \times dt$$

Cette égalité est vérifiée car dE_p est ici la différentielle d'une fonction.

3 Travail et puissance d'une force

3.1 Puissance d'une force

Définition de la puissance d'une force

La **puissance** $\mathcal{P}(\vec{f})$ d'une force $\vec{f}$ qui s'exerce sur M où $\vec{v}$ est la vitesse de M , est définie par :

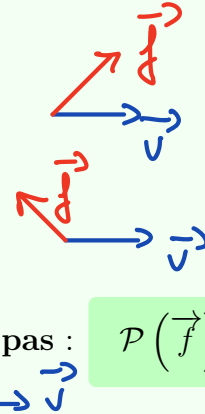
$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

Pour qualifier la puissance d'une force, on distingue 3 cas :

— la puissance de $\vec{f}$ est dite **motrice** si $\mathcal{P}(\vec{f}) > 0$

— la puissance de $\vec{f}$ est dite **résistante** si $\mathcal{P}(\vec{f}) < 0$

— si la puissance de $\vec{f}$ est nulle, on dit que $\vec{f}$ **ne travaille pas** : $\mathcal{P}(\vec{f}) = 0$



Propriété : Additivité de la puissance des forces

La puissance est une grandeur additive, en effet si on considère la résultante des forces

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i$$

la puissance de la résultante des forces $\mathcal{P}_{\text{tot}}$ est la somme des puissances de chacune des forces :

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \left(\sum_i \vec{f}_i \right) \cdot \vec{v} = \sum_i (\vec{f}_i \cdot \vec{v}) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f}_i)$$

3.2 Travail élémentaire d'une force

Définition de travail élémentaire d'une force

Le **travail élémentaire** de la force $\vec{f}$ de puissance $\mathcal{P}(\vec{f})$, qui s'exerce sur M pendant un intervalle de temps dt est défini par :

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(\vec{f}) dt$$

qui correspond à l'écriture du travail élémentaire avec la variable temporelle.

En considérant le déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ de M pendant l'intervalle de temps dt , on peut donc aussi écrire :

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(\vec{f}) dt = \vec{f} \cdot \vec{v} dt = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

qui correspond à l'écriture du travail élémentaire avec les variables spatiales.

3.3 Travail d'une force au cours d'un déplacement

Définition du travail d'une force

Au cours d'un déplacement le long d'une trajectoire allant de $M_1 = M(t_1)$ vers $M_2 = M(t_2)$ entre deux instants t_1 et t_2 tels que $t_2 > t_1$, le travail $W_{M_1 \rightarrow M_2}$ de la force $\vec{f}$ correspond à la somme des travaux élémentaires calculés le long de la trajectoire $M_1 \rightarrow M_2$:

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) = \int_{M_1}^{M_2} \delta W(\vec{f})$$

qui est une intégrale curviligne calculée le long de la trajectoire $M_1 M_2$ menant de M_1 à M_2 et pour laquelle on peut soit utiliser la variable temporelle :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt$$

soit les variables d'espace :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

L'intégrale $\int_{M_1}^{M_2} \vec{f} \cdot d\vec{OM}$ est aussi appelée **circulation** de $\vec{f}$ de M_1 à M_2 .

3.4 Exemple de travaux

Considérons un mobile repéré par son abscisse $x(t)$ auquel on communique une vitesse initiale dirigée vers le bas le long de la pente (figure 2), puis qui glisse sur le plan incliné, dans ce cas on peut montrer que les trois forces ci-dessous sont constantes et calculer le travail de chacune

d'elle entre le point de départ M_1 et le point M_2 situé en bas de la pente, repérés respectivement par leur abscisses $x(t_1) = x_1$ et $x(t_2) = x_2$. On notera $L = x_2 - x_1$, la longueur du chemin parcouru par le mobile et h la différence entre l'altitude initiale et l'altitude finale.

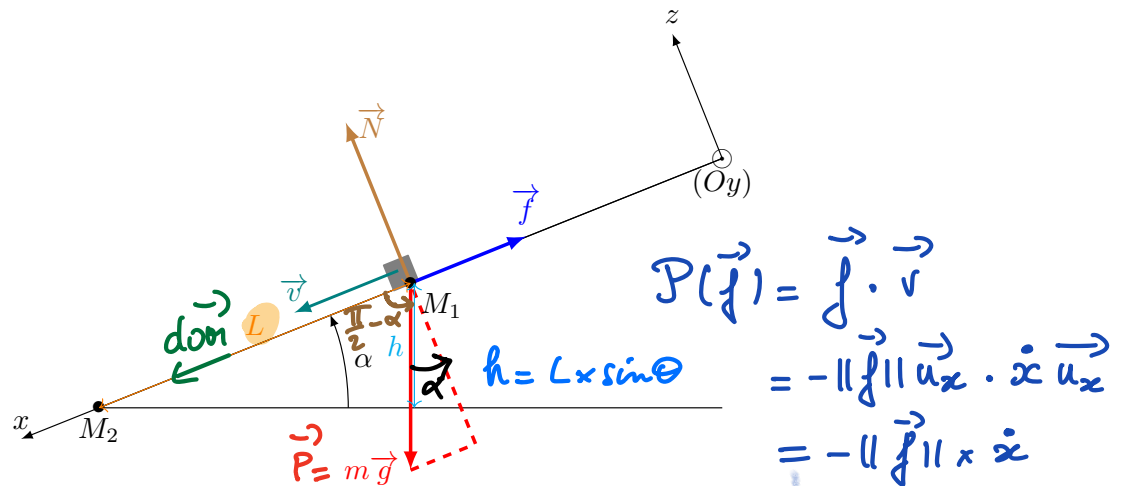


Figure 2 – Exemples de calculs de travaux

Travail de la force de frottement :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} -\|\vec{f}\| \dot{x}(t) dt = -\|\vec{f}\| (x_2 - x_1) = -\|\vec{f}\| L$$

ou peut aussi calculer ce travail en utilisant la variable d'espace x :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) = \int_{M_1}^{M_2} \underbrace{\vec{f}}_{-\|\vec{f}\| \vec{u}_x} \cdot \underbrace{d\vec{OM}}_{dx \vec{u}_x} = \int_{x_1}^{x_2} -\|\vec{f}\| dx = -\|\vec{f}\| (x_2 - x_1) = -\|\vec{f}\| L$$

On peut remarquer que $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}) < 0$ donc $\vec{f}$ est une force résistante, ce qui est toujours le cas car par exemple si on fait remonter le cube $\vec{f}$ change de sens et s'oppose toujours au mouvement.

Travail du poids :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P} \cdot d\vec{OM} = \int_{x_1}^{x_2} \|\vec{P}\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) dx = mg \sin(\theta) (x_2 - x_1) = mgh$$

On peut remarquer que $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{P}) > 0$ donc $\vec{P}$ est une force motrice dans cet exemple, mais si on fait remonter le cube cette fois le travail du poids est résistant.

Travail de la réaction normale du support :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{N}) = \int_{M_1}^{M_2} \underbrace{\vec{N} \cdot d\vec{OM}}_0 = 0$$

donc $\vec{N}$ ne travaille pas.

4 Loi de l'énergie cinétique

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, la puissance instantanée de la résultante des forces exercées sur M est égale à la dérivée par rapport au temps de son énergie cinétique :

$$W \left\{ \frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f}_i) \right.$$

Démonstration : Multiplions scalairement la 2^e loi de Newton par $\vec{v}$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{Or} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \frac{m}{2} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \frac{m}{2} \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \vec{F} \cdot \vec{v} = \left(\sum_i \vec{f}_i \right) \cdot \vec{v} = \sum_i (\vec{f}_i \cdot \vec{v}) = \sum_i P(\vec{f}_i)$$

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point M entre deux instants t_1 et t_2 correspondant aux positions $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$, est égale à la somme des travaux des forces qui s'exercent sur M entre ces deux instants :

$$\Delta E_c = E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_i W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}_i)$$

que l'on peut aussi écrire sous formule infinitésimale :

$$dE_c = \sum_i \delta W(\vec{f}_i)$$

Démonstration : On intègre entre t_1 et t_2 la relation donnée par le théorème de la puissance cinétique

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_c}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i P(\vec{f}_i) dt = \sum_i \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{f}_i) dt$$

$$\Rightarrow E_c(t_2) - E_c(t_1) = \sum_i W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}_i)$$

Application à la chute libre verticale :

Une bille de plomb, assimilable à un point matériel M de masse $m = 10 \text{ g}$, est lâchée à l'instant $t = 0$ depuis une altitude $h = 1 \text{ m}$ au dessus du sol (où se situe l'origine de l'axe (Oz) vertical ascendant). Les frottements peuvent être négligés, la bille n'est soumise qu'à son poids. On note $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ le **module** de l'accélération de la pesanteur et z l'altitude (ou cote) de la bille (figure 3).

1. Exprimer la puissance du poids.

- Exprimer le travail du poids entre l'instant initial et l'instant où la bille touche le sol.
- En déduire l'expression de la vitesse de la bille juste avant qu'elle ne touche le sol puis la calculer.

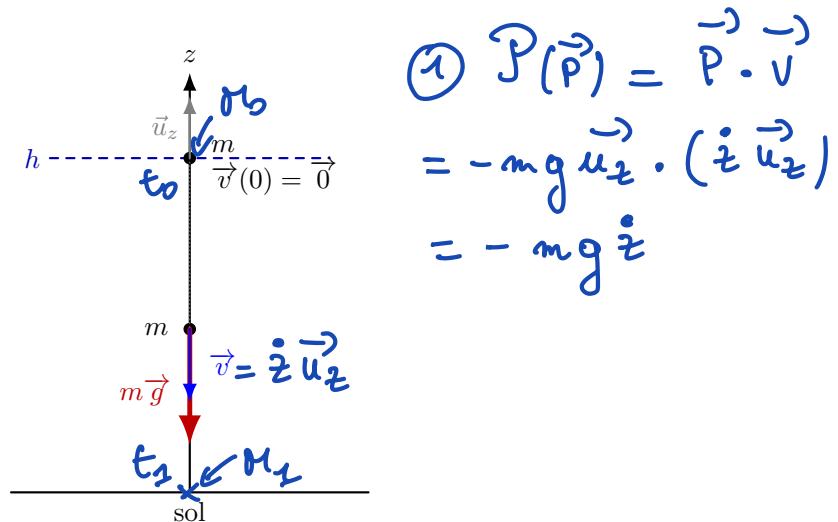


Figure 3 – Chute libre verticale sans frottements

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad W_{M_0 \rightarrow M_1}(\vec{P}) &= \int_{t_0}^{t_1} P(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} -mg \dot{z}(t) dt \\
 &= -mg [z(t)]_{t_0}^{t_1} = -mg (z(t_1) - z(t_0)) \\
 &= +mgh
 \end{aligned}$$

③ Thm de l' E_c :

$$\begin{aligned}
 E_c(t_1) - E_c(t_0) &= W_{M_0 \rightarrow M_1}(\vec{P}) \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 &= mgh
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{2gh}}$$

Remarque sur ② : $W_{M_0 \rightarrow M_1}(\vec{P}) = -\Delta E_{pp}$

$$\begin{aligned}
 &= - (E_{pp}(M_1) - E_{pp}(M_0)) \\
 &= +mgh
 \end{aligned}$$

5 Énergie potentielle et forces conservatives

5.1 Définitions

Définition d'une force conservative

Une force $\vec{f}_c$ est dite **conservative** (ou encore dérive d'une énergie potentielle) si son travail $W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}_c)$ le long de toute trajectoire $M_1 M_2$ est indépendant du chemin suivi, mais ne dépend que des positions de M_1 et M_2 . On définit alors une fonction **énergie potentielle** $E_p(M)$ associée à la force $\vec{f}_c$ et dépendant uniquement de la position du point M , telle que :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{f}_c) = E_p(M_1) - E_p(M_2) = -\Delta E_p$$

$$= - (E_p(M_2) - E_p(M_1))$$

L'énergie potentielle est définie à une constante près.

Sous forme infinitésimale, cette définition peut aussi s'écrire :

$$\delta W(\vec{f}_c) = \vec{f}_c \cdot d\vec{OM} = -dE_p$$

Le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi et en particulier pour un parcours qui part du point M_1 pour revenir à ce même point :

$$\oint \delta W(\vec{f}_c) = \int_{M_1}^{M_1} \vec{f}_c \cdot d\vec{OM} = E_p(M_1) - E_p(M_1) = 0$$

5.2 Force de pesanteur

Le travail élémentaire du poids s'écrit :

$$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg dz$$

En utilisant la définition de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} , on en déduit :

$$\delta W(\vec{P}) = -dE_{pp} = -mg dz = -d(mgz) \Rightarrow E_{pp}(z) = mgz + cst$$

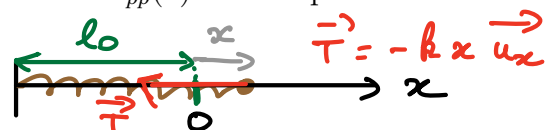
Le travail du poids entre $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ s'écrit alors :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{P}) = \int_{M_1(z_1)}^{M_2(z_2)} -mg dz = -mg(z_2 - z_1) = mgz_1 - mgz_2 = -\Delta E_{pp}$$

Attention à l'orientation des axes : E_{pp} change de signe si l'orientation de (Oz) change de sens. On notera également qu'on choisit souvent arbitrairement $E_{pp}(0) = 0$ ce qui donne $cst = 0$.

5.3 Force de rappel élastique

En choisissant l'origine de l'axe des abscisses à la position d'équilibre du ressort pour laquelle $\ell = \ell_0$, ce qui revient à $x(t) = \ell(t) - \ell_0$, le travail élémentaire de la force de rappel élastique $\vec{T}$



$$\delta W(\vec{T}) = -kx \vec{u}_x \cdot (dx \vec{u}_x)$$

s'écrit :

$$\Rightarrow \delta W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot d\vec{OM} = -kx dx$$

En utilisant la définition de l'énergie potentielle élastique E_{pe} , on en déduit :

$$\delta W(\vec{T}) = -dE_{pe} = -kx dx = -d\left(\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\Rightarrow E_{pe}(x) = \frac{1}{2}kx^2 + cte = \frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2 + cte$$

Le travail de $\vec{T}$ entre $M_1(x_1)$ et $M_2(x_2)$ s'écrit alors :

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{T}) = \int_{x_1}^{x_2} -kx dx = -k \left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \right) = E_{pe}(x_1) - E_{pe}(x_2) = -\Delta E_{pe}$$

On notera également qu'on choisit souvent arbitrairement $E_{pe}(x=0) = 0$ ce qui donne $cte = 0$.

5.4 Utilisation du gradient

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

Le travail élémentaire de la force $\vec{f}$ conservative s'écrit, en utilisant les coordonnées cartésiennes :

$$dE_p = -\delta W(\vec{f}) = -\vec{f} \cdot d\vec{OM} = -(f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

De plus, par définition de la différentielle d'une fonction $E_p(x, y, z)$ de plusieurs variables :

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

On obtient donc, en identifiant ces deux expressions :

$$\begin{cases} f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ f_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \vec{f} = -\vec{\text{grad}} E_p$$

que l'on peut écrire de manière plus condensée avec l'opérateur gradient, qui associe au champ scalaire E_p le champ vectoriel $\vec{f}$ tels que :

$$\vec{f} = -\vec{\text{grad}}(E_p) \quad (1)$$

Exemple : le poids est opposé au gradient de mgz quand l'axe vertical est orienté vers le haut. Retrouvons l'expression de E_{pp} à partir de l'équation (1) :

$\vec{P} = -\text{grad } E_{pp}$
 $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial E_{pp}}{\partial x} \\ -\frac{\partial E_{pp}}{\partial y} \\ -\frac{\partial E_{pp}}{\partial z} \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow \frac{dE_{pp}}{dz} = mg$
 $\Rightarrow E_{pp}(z) = mgz + \text{cte}$

E_{pp} ne dépend pas de x
 E_{pp} " " y .

5.5 Force de frottements non conservative

Reprenons l'exemple de la figure 2. Si on fait descendre le mobile de M_1 à M_2 pour le faire remonter ensuite de M_2 à M_1 , le travail de la force de frottements solide s'écrit :

$$W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{f}) = \int_{x_1}^{x_2} -\|\vec{f}\| \vec{u}_x \cdot (dx \vec{u}_x) + \int_{x_2}^{x_1} \|\vec{f}\| \vec{u}_x \cdot (dx \vec{u}_x)$$

$$\Rightarrow W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{f}) = -\|\vec{f}\| \underbrace{(x_2 - x_1)}_L + \|\vec{f}\| \underbrace{(x_1 - x_2)}_{-L} = -2\|\vec{f}\| L$$

Cette force n'est donc pas conservative puisque son travail sur une trajectoire fermée, c'est-à-dire qui revient à son point de départ, est non nul, contrairement au poids dont le travail sur cette même trajectoire fermée est nul :

$$W_{M_1 \rightarrow M_1}(\vec{P}) = -\Delta E_{pp} = 0$$

6 Énergie mécanique

6.1 Définition

Définition de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel M est égale à la somme de son énergie cinétique E_c de son énergie potentielle totale E_p . Par énergie potentielle totale, on entend somme des énergies potentielles associées à chacune des forces conservatives exercées sur M .

$$E_m = E_c + E_p$$

L'indice **c** fait référence aux forces **conservatives** et l'indice **nc** aux forces **non conservatives**. On désigne par $\vec{F}_c$ la **résultante des forces conservatives** et par $\vec{F}_{nc}$ la **résultante des forces non conservatives**. On a alors :

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

$$dE_c = (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{OM}$$

$$\Rightarrow dE_c = \delta W(\vec{F}_c) + \delta W(\vec{F}_{nc}) = -dE_p + \delta W(\vec{F}_{nc})$$

$$\Rightarrow d \left(\underbrace{E_c + E_p}_{E_m} \right) = \delta W(\vec{F}_{nc}) \quad (2)$$

On peut intégrer cette relation (2) entre deux instants quelconques pour aboutir à la propriété suivante :

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen, la **variation d'énergie mécanique de M** est égale au **travail des forces non conservatives exercées sur M** :

$$\Delta E_m = W(\vec{F}_{nc}) \quad (3)$$

On divisant l'équation (2) par dt , on obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W(\vec{F}_{nc})}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$$

$$= \vec{F}_{nc} \cdot \frac{d\vec{on}}{dt} = \vec{F}_{nc} \cdot \vec{v} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc})$$

ce qui mène à la propriété suivante :

Théorème de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la **dérivée de l'énergie mécanique de M par rapport au temps** est égale à la **puissance des forces non conservatives exercées sur M** :

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) \quad (4)$$

6.2 Conservation de l'énergie mécanique

Si $\mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) = 0$, d'après l'équation (4), on obtient $\frac{dE_m}{dt} = 0$

Loi de conservation de l'énergie mécanique

Si la **puissance dissipée par les forces non conservatives est nulle à tout instant**, alors l'énergie mécanique de M est **constante au cours du temps** :

$$E_m = cte$$

Cette équation appelée **intégrale première du mouvement** ou encore **intégrale première de l'énergie**.

Exemple de l'oscillateur harmonique horizontal : Écrire l'intégrale première du mouvement et retrouver l'équation différentielle du mouvement. *(sans frottements)*

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \quad \text{Or} \quad \frac{dE_m}{dt} = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{m}{2} 2 \dot{x} \ddot{x} + \frac{k}{2} 2 x \dot{x} = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad m \ddot{x} + k x = 0$$

7 Analyse du mouvement à partir du graphe de l'énergie potentielle

7.1 Positions d'équilibre

Un point matériel est en équilibre lorsque sa vitesse est nulle à tout instant. On en déduit que son accélération est nulle à tout instant puis, d'après le principe fondamental de la dynamique, que la somme des forces qui s'appliquent sur ce point est nulle.

Définition : Position d'équilibre et stabilité

En une position d'équilibre, la somme des forces qui s'appliquent au mobile M est nulle :

$$\sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$$

Le mobile peut rester indéfiniment en une position d'équilibre mais quand on écarte le mobile de sa position d'équilibre :

- s'il **revient vers sa position d'équilibre** initiale, la position d'équilibre est dite **stable**
- s'il **s'éloigne définitivement** de sa position d'équilibre initiale, la position d'équilibre est dite **instable**

Prenons l'exemple de l'oscillateur harmonique horizontal ¹ non amorti dont l'énergie potentielle représentée sur la figure 4 a pour expression :

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

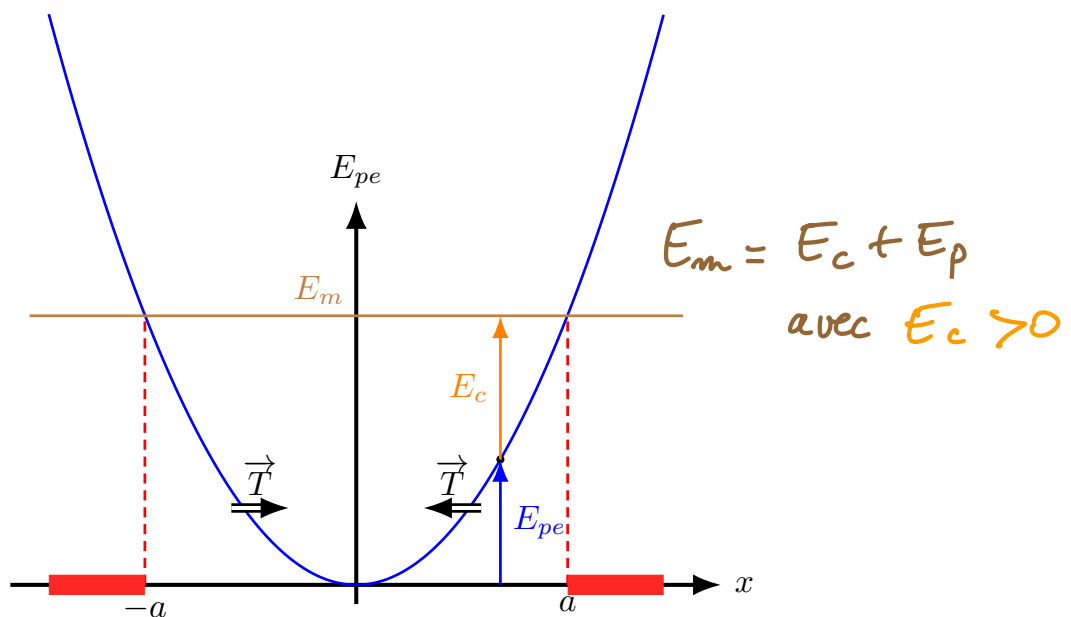


Figure 4 – Énergie potentielle élastique de l'oscillateur harmonique

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.html

La force de rappel élastique s'écrit :

$$\vec{T} = -\vec{\text{grad}}(E_{pe}) = -\frac{dE_{pe}}{dx}\vec{u}_x = \underbrace{-kx}_{\vec{T}_x}\vec{u}_x$$

$$\vec{T} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial E_{pe}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{pe}}{\partial y} \\ \frac{\partial E_{pe}}{\partial z} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} kx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que la position $x = 0$ est une position d'équilibre puisque :

$$-\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=0} = \vec{T}_x(0) = 0$$

Si on écarte le mobile de sa position d'équilibre vers les $x > 0$, $\vec{T}_x \leq 0$ ramène le mobile en $x = 0$.

Si on écarte le mobile de sa position d'équilibre vers les $x < 0$, $\vec{T}_x \geq 0$ ramène aussi le mobile en $x = 0$.

La position $x = 0$, le minimum d'énergie potentielle, correspond donc à une position d'équilibre stable.

Comme $E_m = cte = E_c + E_{pe}$ et $E_c \geq 0$, E_m est la plus grande valeur que puisse prendre E_{pe} . Le mouvement est donc confiné entre $x = -a$ et $x = +a$.

On remarquera également que lors du mouvement entre $x = -a$ et $x = +a$, l'énergie cinétique est maximale lorsque l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire en $x = 0$.

Propriété : Analyse du mouvement à partir du graphe de l'énergie potentielle

Une position d'équilibre x_e correspond à un minimum d'énergie potentielle :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x_e} = 0$$

L'énergie cinétique, donc la norme de la vitesse du mobile, est maximale lorsque son énergie potentielle est minimale.

L'énergie cinétique, donc la vitesse du mobile, est nulle lorsque $E_m = E_p$.

7.2 Étude de la stabilité et du bornage du mouvement

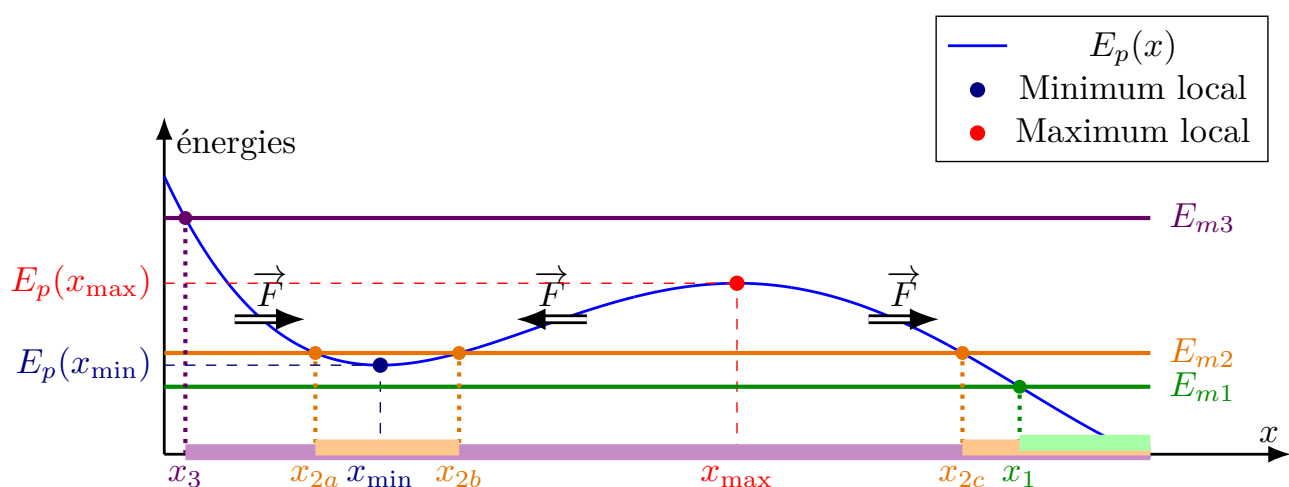


Figure 5 – Étude de la stabilité des positions d'équilibre et des mouvements possibles

Dans le cas général, dont un exemple est donné sur la figure 5 :

◇ Lorsque la concavité de la courbe $E_p(x)$ est négative au niveau d'une position d'équilibre, comme par exemple ici en $x_{\max}$ (maximum local), si on écarte le mobile vers les $x < x_{\max}$ alors $F_x = -\frac{dE_p}{dx} < 0$ et le mobile s'éloigne de la position d'équilibre.

De même, si on écarte le mobile vers les $x > x_{\max}$ alors $F_x = -\frac{dE_p}{dx} > 0$ et le mobile s'éloigne également de la position d'équilibre. La position d'équilibre $x_{\max}$ est donc instable.

◇ Inversement, lorsque la concavité de la courbe $E_p(x)$ est positive au niveau d'une position d'équilibre, alors cette position d'équilibre est stable, comme c'est le cas pour la position $x_{\min}$ (minimum local).

Propriété : Stabilité d'une position d'équilibre

Un minimum local d'énergie potentielle $x_{\min}$ correspond à une position d'équilibre stable et vérifie :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)\Big|_{x_{\min}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)\Big|_{x_{\min}} > 0$$

Un maximum local d'énergie potentielle $x_{\max}$ correspond à une position d'équilibre instable et vérifie :

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)\Big|_{x_{\max}} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)\Big|_{x_{\max}} < 0$$

Dans le cas de l'exemple général de la figure 5 :

◇ Si $E_m = E_{m1} < E_p(x_{\min})$, le mobile peut s'approcher au plus près de l'origine en x_1 puis s'échappe vers les $x > x_1$, on a un **état de diffusion**.

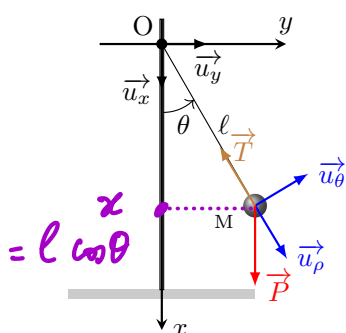
◇ Si $E_m = E_{m2}$ telles que $E_p(x_{\min}) < E_{m2} < E_p(x_{\max})$ et que la position initiale x_0 est telle que $x_{2a} < x_0 < x_{2b}$, le mobile reste confiné entre x_{2a} et x_{2b} , on a un **état lié**.

◇ Si $E_m = E_{m2}$ telles que $E_p(x_{\min}) < E_{m2} < E_p(x_{\max})$ et que la position initiale x_0 est telle que $x_{2c} < x_0$, le mobile peut s'approcher au plus près de l'origine en x_{2c} puis s'échappe vers les $x > x_{2c}$, on a un **état de diffusion**.

◇ Si $E_m = E_{m3}$ telle que $E_m > E_p(x_{\max})$, le mobile peut s'approcher au plus près de l'origine en x_3 puis s'échappe vers les $x > x_3$, on a encore un **état de diffusion**.

7.3 Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable

7.3.1 Exemple du pendule



Le poids $\vec{P}$ du mobile et l'énergie potentielle associée E_p sont tels que :

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \Rightarrow \begin{cases} mg = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ 0 = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

On en déduit que E_p ne dépend que de x avec

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg \Rightarrow E_p = -mgx + cst$$

On choisit $E_p(x=0) = 0 \Rightarrow cst = 0$, alors $E_p = -mgx = -mg\ell \cos(\theta)$

Au voisinage de $\theta = 0$, on peut écrire $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$, on en déduit :

$$E_p \simeq -mg\ell + mg\ell \frac{\theta^2}{2}$$

On en déduit :

$$E_m = cte = \underbrace{\frac{1}{2}m(\ell\dot{\theta})^2}_{E_c} - \underbrace{mg\ell + mg\ell \frac{\theta^2}{2}}_{E_p}$$

En dérivant cette intégrale première du mouvement par rapport au temps, on obtient :

$$0 = m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

$\times \frac{1}{\ell}$

Ce que l'on retrouve aussi en dérivant d'abord l'intégrale première du mouvement non linéarisée, puis en linéarisant $\sin \theta \simeq \theta$.

Graphes de $E_p(\theta)$

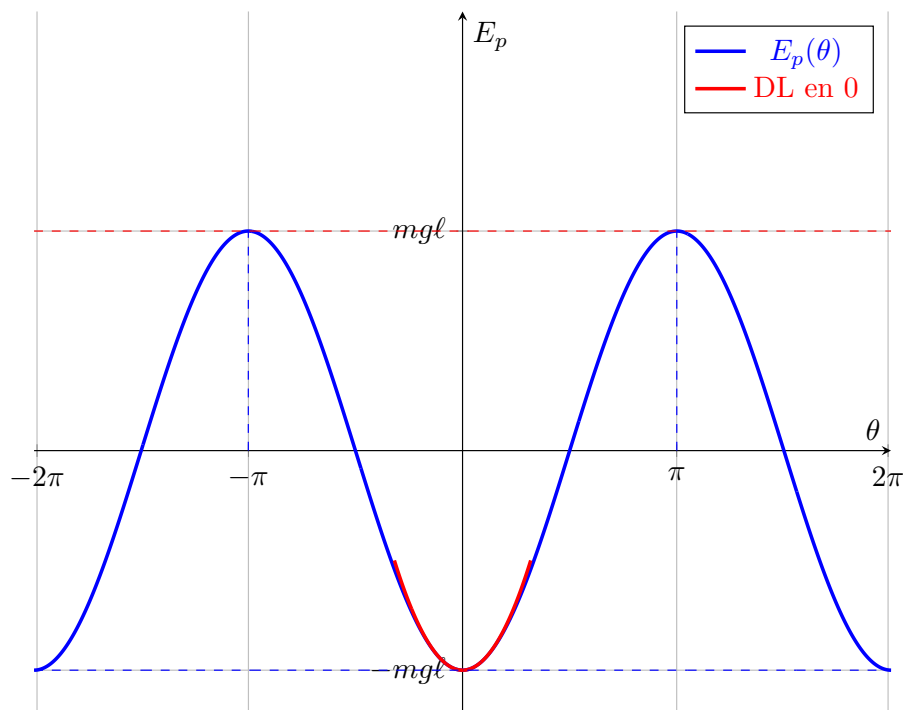


Figure 6 – Énergie potentielle de pesanteur du pendule simple

7.3.2 Généralisation

Une fonction $f(x)$ peut être développée en série de Taylor autour de x_0 selon la formule :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Exemple : $f(x) = \cos x$ autour de $x = 0$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

Développons $E_p(x)$ autour d'une position d'équilibre $x = x_e$ *= 0 car x_e position d'équilibre*

$$\begin{aligned} E_p(x) &= E_p(x_e) + (x - x_e) \left(\frac{dE_p}{dx} \right) \Big|_{x_e} + \frac{(x - x_e)^2}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right) \Big|_{x_e} + \dots \\ &= E_p(x_e) + 0 + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2 + \dots \end{aligned}$$

k

en posant $k = \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_e}$

L'énergie mécanique se conservant :

$$E_m = cte = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x_e) + \frac{1}{2} k (x - x_e)^2 \quad \xRightarrow{d/dt} \quad m \ddot{x} + k(x - x_e) = 0$$

ou encore en posant $X = x - x_e$ *($X \equiv$ écart à la position d'équilibre) :*

$$m \ddot{X} + kX = 0$$

- Si $k > 0$, $X = A \cos(\omega t + \varphi)$, on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique qui est donc stable.
- Si $k < 0$, $X = A \cosh(\omega t + \varphi)$, le système s'éloigne de la position d'équilibre qui est donc instable.