

EXERCICE 1: – Calculer – Cours –

Étudier la convergence et déterminer, si possible, la somme totale des séries ci-dessous

- | | |
|--|---|
| <p>1. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\ln n - \ln(n+1))$</p> <p>2. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + \dots + n}$</p> <p>3. $\sum_{n \geq 2} \ln \frac{(\ln(n+1))^2}{(\ln n) \ln(n+2)}$</p> <p>4. $\sum_{n \geq 2} \frac{4}{e^n}$</p> <p>5. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$</p> | <p>6. $\sum_{n \in \mathbb{N}} n e^{-\lambda n}$ pour tout $\lambda > 0$</p> <p>7. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 e^{-n}$</p> <p>8. $\sum_{n \geq 2} \frac{1 + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n}}{2^{n+1}}$ ☆</p> <p>9. $\sum_{n \geq 2} \frac{2n^2 - n + 1}{n!}$ ☆</p> <p>10. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in]-1; 1[$ ☆☆</p> |
|--|---|

EXERCICE 2: – Chercher –

Étudier la nature des séries ci-dessous

- | | |
|--|--|
| <p>1. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \ln(\operatorname{sh} n)$
(où $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$)</p> <p>2. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{2^n}{n}$</p> <p>3. $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$</p> <p>4. $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (n-1)!}{n!}$</p> <p>5. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2^n)}{n!}$</p> | <p>6. $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin^4(2^{n-1} \frac{\pi}{5})}{2^{n-1}}$</p> <p>7. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(2n)}$
(où $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$)</p> <p>8. $\sum_{n \geq 1} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$</p> <p>9. $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$</p> <p>10. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ☆☆</p> |
|--|--|

EXERCICE 3: – Raisonner –

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que, pour $k \in \{0, \dots, n-2\}$, $\frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)}$.
2. En déduire que $\sum_{k=0}^n k! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$ ☆

3. Écrire un algorithme Python vous permettant d'observer l'équivalence sur un graphique.

EXERCICE 4: – Raisonner – Chercher – ☆

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1)$$

- Étudier le signe puis le sens de variation de la suite (u_n) .
- En déduire la convergence éventuelle et la limite, si elle existe.
- Justifier que le passage au $\ln$ de l'équation (1) est possible. En déduire ensuite la nature de la série de terme général u_n . ☆

EXERCICE 5: – Chercher – Raisonner – (ENS) ☆☆

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]0; 1[\quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Étudier la convergence de la suite (u_n) ☆☆
- Étudier la convergence de la série de terme général u_n^2 .

EXERCICE 6: – Calculer –

Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$$

Comparer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) \right)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n u_k(x) \right)$

EXERCICE 7: – Chercher – Calculer – Modéliser – ☆

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$I_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k} dx, \quad J = \int_0^1 \frac{1}{1+x^k} dx, \quad u_n^{(k)} = \frac{(-1)^n}{kn+1}$$

- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. ☆
- Exprimer $J - I_n$ sous la forme d'une somme. ☆
- Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n^{(k)}$ converge et déterminer sa limite en fonction de J .
- Déterminer $\sum_{j=0}^{+\infty} u_j$ pour $k = 1, 2$.

5. a) Déterminer a, b, c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}, \quad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{1+x} + \frac{bx+c}{1-x+x^2}$$

- b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$ lorsque $k = 3$.

6. Écrire une fonction Python permettant de déterminer une valeur approchée de J pour n'importe quel $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire une valeur approchée de J pour $k = 5$. (On ne se préoccupera pas de connaître la précision exacte de la valeur approchée mais on donnera seulement une valeur qui semble raisonnable en expliquant pourquoi.)

EXERCICE 8: – Chercher – Raisonner – (ENS)

☆☆☆

Soit (a_n) une suite réelle. On souhaite étudier les séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

(Ce type de séries est appelé "séries entières".)

1. On pose $R = \sup\{|z| \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ converge}\} \in \overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
 - a) Vérifier que R existe.
 - b) Vérifier que pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ diverge.
 - c) Montrer que pour tout z tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument. ☆

On dit que R est le *rayon de convergence de la série entière* $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

2. Quel est le rayon de convergence des séries entières
 - a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$
 - b) $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^n z^n$
 - c) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$
3. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe (et est finie). On la note ℓ .
 - a) Montrer que le rayon de convergence de la série est $\frac{1}{\ell}$. (où on s'autorise à noter $\frac{1}{\ell} = +\infty$ si $\ell = 0$). ☆☆☆
 - b) En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2 + 1}{2n} z^n$

EXERCICE 9: – Chercher – Calculer – (ENS)

☆☆☆

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x} = P_n(\cotan^2 x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. a) Donner les racines de P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
 b) En déduire que $\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$.
3. a) Montrer que $\forall u \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cotan^2 u \leq \frac{1}{u^2} \leq 1 + \cotan^2 u$.
 b) En déduire que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indications

Exercice 1

2. Transformer le terme général en une fraction du type $\frac{1}{\text{un produit}}$ et se ramener à un cas de technique connue.
4. $u_n = 4(e^{-1})^n$
5. $u_n = \frac{1^n}{n!}$
8. Télécopage et suites géométriques.
10. Penser à intégrer la somme partielle d'une série géométrique puis penser à utiliser (et justifier proprement) que $\int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^N dt$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

2. Pour la limite, une fois démontré que la suite converge, on pourra penser à passer à la limite dans la relation de récurrence (1).

Exercice 5

1. Déterminer le sens de variation éventuel de (u_n) , puis sa limite éventuelle. Finir le raisonnement.
2. Penser à isoler u_n^2 dans la définition. Cette question peut se faire sans avoir réussi à faire la question 1, mais utilise quand même le résultat de 1.

Exercice 9

1. Développer $\sin(2n+1)x$.
2. b) Il faut pour cela se souvenir que si $x_1, \dots, x_n$ sont toutes les racines d'un polynôme $P_n(t)$ de degré n , alors $x_1 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ où a_i est le coefficient du monôme t^i .