

Électrostatique

En MPSI, la notion de champ électrique a été étudiée à partir des conséquences sur le mouvement d'une particule chargée. Les causes de l'existence même de ce champ électrostatique sont le cœur de ce chapitre. Comme son nom l'indique, ce chapitre fera intervenir des charges électriques (« électro ») immobiles (« statique »).

Les effets électrostatiques ont été découverts en Grèce antique : les Grecs avaient remarqué la propriété qu'avait l'ambre ($\eta\lambda\epsilon\tau\rho\omega\nu$, électron en grec) d'attirer des petits bouts de papier. Plus tard (XVIII^e), on fit l'expérience du filet d'eau dévié par un bâton chargé par frottement.

A. Force de COULOMB

On considère deux charges ponctuelles q_A et q_B , placées en A et B , éloignées d'une distance $r = AB$. La droite (AB) porte un vecteur unitaire $\vec{u}$.

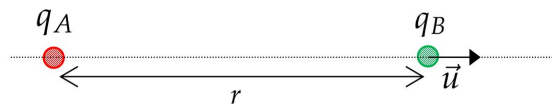


FIGURE 1 – Force de COULOMB

Les charges q_A et q_B , comme n'importe quelle charge électrique, est un multiple de la charge électrique élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C. Ainsi, $q_A = n_A e$ et $q_B = n_B e$, où n_A et n_B sont des nombres entiers entiers.

Loi EM1.1 - Loi de COULOMB

En 1785, le français Charles COULOMB met en évidence que la charge en B subit une force d'interaction électrostatique provoquée par la charge placée en A telle que :

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \vec{u}$$

Dans cette relation, ϵ_0 est une grandeur caractéristique des propriétés électriques du vide, nommée **permittivité du vide** et vaut $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m⁻¹. Pour faciliter certaines applications numériques, on peut noter que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \times 10^9$ SI.

Dans un milieu autre que le vide, la permittivité du milieu ϵ remplace ϵ_0 ; on définit la permittivité relative d'un milieu $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$. On a donc $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$.

Cette force newtonienne (cf M0) peut-être répulsive ou attractive, contrairement à la force de gravitation qui est par essence, attractive.

Selon le principe des actions réciproques, la charge placée en A subit une force égale en norme, de même direction et de sens opposé : $\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$.

Dans un atome d'hydrogène,

B. Champ électrique généré par une charge ponctuelle

Une charge ponctuelle Q , placée au point O , modifie donc les propriétés électriques du milieu qui l'entoure : en effet, une charge-test q placée au point M dans le champ d'action de Q subit une action mécanique.

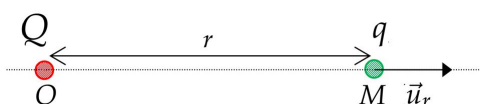


FIGURE 2 – Notion de champ électrique

Afin de rendre cette notion de modification de l'état électrique du milieu, totalement indépendant de la charge-test q , on définit la notion de champ électrique $\vec{E}(M)$.

Définition EM1.1 - Champ électrostatique généré par une charge ponctuelle

Le champ électrostatique, généré en M , par une charge Q placée en O est défini comme :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r$$

Plusieurs remarques sont à formuler :

- La valeur du champ électrique dépend de r en $1/r^2$.
- Le champ électrique est un vecteur radial : il est dirigé suivant $\vec{u}_r$
- La norme du champ électrique est proportionnel à la charge Q . Q constitue la **source du champ électrique**.
- $\vec{E}(M)$ est totalement indépendant de la charge-test q .
- Dans le système international d'unités, le champ électrique s'exprime en Volt par mètre, $V.m^{-1}$.

Source	E (N/C)
Fluorescent lighting tube	10
Atmosphere (fair weather)	100
Balloon rubbed on hair	1 000
Atmosphere (under thundercloud)	10 000
Photocopier	100 000
Spark in air	$> 3\,000\,000$
Near electron in hydrogen atom	5×10^{11}

FIGURE 3 – Typical electric field values

C. Distribution de charges et principe de superposition

C.1 Distribution discrète de charges

Considérons deux charges Q_A et Q_B , placées en A et B et une charge-test q , placée en M .

Théorème EM1.2 - Principe de superposition

Le champ électrique total en M , généré par une distribution de N charges ponctuelles placées en P_i est la somme des champs $\vec{E}_i(M)$ créés par chacune des charges placée P_i :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{P_i M}$$

C.2 Distributions continues

Il est parfois plus pratique de travailler avec des distributions non-discrètes, mais étendues dans un volume, sur une surface ou le long d'une courbe.

Ces distributions, par opposition aux distributions discrètes, portent le nom de distributions continues.

C.2.1 Distribution volumique

Lorsque les charges se répartissent sur un volume, on peut modéliser l'ensemble par une distribution volumique de charge.

Définition EM1.2 - Densité volumique de charge ρ

La charge élémentaire dq est répartie dans un volume élémentaire mésoscopique $d\tau$. On définit la densité volumique de charge ρ (grandeur intensive) de la façon suivante :

$$\rho = \frac{dq}{d\tau}$$

La densité volumique de charge ρ s'exprime naturellement en $C.m^{-3}$.

Si on cherche à déterminer la charge Q contenue dans un volume $\mathcal{V}$, on réalise l'intégration :

$$Q = \iiint_{\mathcal{V}} dq = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$$

Considérons une sphère de rayon a , de densité volumique de charge ρ_0 uniforme. La charge totale Q contenue dans cette sphère se détermine en réalisant l'intégration sur l'ensemble du volume $\mathcal{V}$.

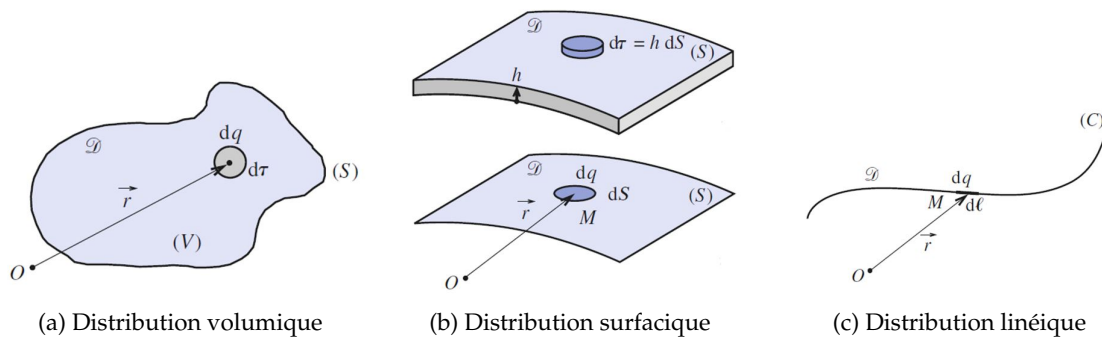


FIGURE 4 – Les distributions continues

C.2.2 Distribution surfacique

Dans certains cas, une des trois dimensions (h sur le schéma) peut-être négligée. On peut alors modéliser la distribution de charges par une distribution de charge surfacique.

Définition EM1.3 - Densité surfacique de charge σ

La charge élémentaire dq est répartie sur une surface élémentaire dS . On définit la densité surfacique de charge σ (grandeur intensive) de la façon suivante :

$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

La densité surfacique de charge σ s'exprime en C.m^{-2} .

Si on cherche à déterminer la charge Q contenue sur une surface S , on réalise l'intégration :

$$Q = \iint_S dq = \iint_S \sigma dS$$

Considérons un disque de rayon a , de densité surfacique de charge σ uniforme. La charge totale Q contenue sur cette surface se détermine en réalisant l'intégration sur l'ensemble de la surface Σ .

C.2.3 Distribution linéique

Enfin, une distribution de charge peut-être modélisée par une distribution linéique.

Définition EM1.4 - Densité linéique de charge λ

La charge élémentaire dq est répartie sur une ligne (ou courbe) élémentaire $d\ell$. On définit la densité linéique de charge λ (grandeur intensive) de la façon suivante :

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell}$$

La densité linéique de charge λ s'exprime naturellement en C.m^{-1} .

Comme précédemment, si on cherche à déterminer la charge Q contenue sur un fil de longueur $\mathcal{D}$, on réalise l'intégration :

$$Q = \int_{\mathcal{D}} dq = \int_{\mathcal{D}} \lambda d\ell$$

Considérons un segment de longueur d , de densité linéique de charge λ uniforme. La charge totale Q contenue sur cet échantillon se détermine en réalisant l'intégration sur l'ensemble de la longueur d .

C.3 Champ électrique créé par une distribution continue

Pour déterminer le champ électrique créé par une distribution de charge, on utilise le principe de superposition : le champ total est la somme des champs élémentaires créés par les charges élémentaires dq .

Distribution volumique	Distribution surfacique	Distribution linéique
$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(P)d\tau}{PM^2} \vec{u}_{PM}$	$\vec{E}(M) = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma(P)dS}{PM^2} \vec{u}_{PM}$	$\vec{E}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(P)d\ell}{PM^2} \vec{u}_{PM}$

TABLE 1 – Superposition et distributions continues

Ces calculs intégraux sont réalisables, mais compliqués notamment car le vecteur $\vec{u}_{PM}$ est un vecteur variable, dépendant de la position de P . Le programme de MP ne prévoit pas de les réaliser.

D. Symétries et invariances

Dans le cas le plus général, le champ électrique possède une composante suivant chacun des vecteurs unitaires de la base orthonormée choisie (donc trois composantes). De plus, chacune de ces composantes peut dépendre de chacun des trois paramètres (ou variables).

On a donc, dans les trois systèmes de coordonnées :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z)\vec{u}_x + E_y(x, y, z)\vec{u}_y + E_z(x, y, z)\vec{u}_z$$

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, z)\vec{u}_\theta + E_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi)\vec{u}_\varphi$$

Propriété EM1.1 - Principe de CURIE

Les symétries et les invariances des causes (sources, donc charges) se retrouvent dans les effets (conséquences, donc champ électrostatique).

- les invariances de la distribution de charges sont celles du champ électrostatique $\vec{E}$.
- les symétries de la distribution de charges sont celles du champ électrostatique $\vec{E}$.

D.1 Invariances**D.2 Symétries****Propriété EM1.2 - Direction du champ $\vec{E}$**

- Le champ électrostatique $\vec{E}$ appartient aux plans de symétrie Π : $\vec{E} \in \Pi$;
- Le champ électrostatique $\vec{E}$ est orthogonal aux plans d'antisymétrie Π^* : $\vec{E} \perp \Pi^*$.
- Le champ électrostatique $\vec{E}$ est vecteur vrai : il est symétrique par rapport aux plans de symétrie et anti-symétrique par rapport aux plans d'antisymétrie (de la distribution de charge).

E. Théorème de GAUSS**E.1 Flux d'un vecteur****Définition EM1.5 - Flux d'un vecteur $\phi(\vec{X})$**

Le flux élémentaire $d\phi$ d'un vecteur $\vec{X}$ à travers une surface élémentaire dS est défini comme :

$$d\phi = \vec{X} d\vec{S}$$

Le flux total de ce même vecteur $\vec{X}$ à travers une surface Σ est défini comme :

$$\phi = \iint_{\Sigma} d\phi = \iint_{\Sigma} \vec{X} d\vec{S}$$

E.2 Énoncé du théorème de GAUSS**Définition EM1.6 - Surface fermée**

Une surface S est qualifiée de fermée si elle délimite, définit un volume $\mathcal{V}$.

Théorème EM1.3 - Théorème de GAUSS

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ à travers une surface fermée Σ est égale à la charge électrique intérieure à cette surface, divisée par la permittivité électrique ϵ_0 .

$$\phi(\vec{E}) = \oiint_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

E.3 Sphère chargée uniformément en volume

Résultat EM1.1 - Champ généré par une sphère chargée uniformément en volume

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \vec{u}_r & \text{pour } r \leq a \\ \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

Résultat EM1.2 - Adéquation sphère volumique et charge ponctuelle

Le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ généré à l'extérieur d'une sphère dont la charge Q est répartie uniformément en volume est équivalent au champ créé par la même charge ponctuelle Q placée en O.

E.4 Tube infini chargé uniformément en volume

Résultat EM1.3 - Tube infini chargé uniformément en volume

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} r \vec{u}_r & \text{pour } r \leq a \\ \frac{\rho_0 a^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r & \text{pour } r \geq a \end{cases}$$

E.5 Plan infini chargé uniformément

Résultat EM1.4 - Champ généré par un plan infini chargé en surface

$$\vec{E}(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}$$

F. Potentiel électrostatique V

F.1 Énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p$

F.1.1 Cas d'une charge ponctuelle Q

Résultat EM1.5 - Énergie potentielle d'interaction électrostatique entre deux charges q et Q

L'énergie potentielle d'une particule q , placée dans le champ électrique généré par une particule de charge Q vaut :

$$\mathcal{E}_p(M) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Résultat EM1.6 - Potentiel électrostatique généré par une charge ponctuelle Q

Le potentiel électrostatique généré en M , distant de r de la source Q vaut :

$$V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad \text{pour } r > 0$$

F.1.2 Généralisation à toute distribution**Définition EM1.7 - Énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p$**

Une particule chargée q , placée dans un potentiel électrostatique $V(M)$, possède une énergie potentielle électrostatique $\mathcal{E}_p$, telle que

$$\mathcal{E}_p(M) = qV(M) + \text{cste}$$

F.2 Lien champ électrostatique $\vec{E}(M)$ - potentiel électrostatique $V(M)$ **F.2.1 Relation différentielle****F.2.2 Relation avec le gradient****Définition EM1.8 - Relation directe champ électrostatique $\vec{E}(M)$ - potentiel électrostatique $V(M)$**

Il existe une grandeur physique, nommée potentiel électrostatique $V(M)$, qui s'exprime en volt (V), et qui est liée au champ électrostatique $\vec{E}(M)$ par les relations équivalentes :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V \quad \text{ou} \quad dV(M) = -\vec{E}(M) \cdot d\vec{\ell}$$

F.2.3 Exemples**F.3 Circulation du champ électrostatique $\vec{E}(M)$** **F.3.1 Circulation $\mathcal{C}$ d'un vecteur****Définition EM1.9 - Circulation d'un vecteur $\vec{X}$**

La circulation élémentaire $d\mathcal{C}$ d'un vecteur $\vec{X}$ le long d'un chemin élémentaire $d\vec{\ell}$ est défini comme :

$$d\mathcal{C} = \vec{X} d\vec{\ell}$$

La circulation de ce même vecteur $\vec{X}$ le long d'un chemin Γ est défini comme :

$$\mathcal{C} = \int_{\Gamma} d\mathcal{C} = \int_{\Gamma} \vec{X} d\vec{\ell}$$

F.3.2 Cas du champ $\vec{E}(M)$

Définition EM1.10 - Tension entre deux points A et B

La tension entre deux points A et B est définie comme la différence de potentiel V entre les points A et B. De ce fait, la tension U_{AB} est la circulation du champ électrique entre les deux points.

$$C_{AB}(\vec{E}) = \int_A^B \vec{E} d\vec{\ell} = \int_A^B -dV = V_A - V_B = U_{AB}$$

Propriété EM1.3 - Circulation conservative

La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est nulle. Le champ $\vec{E}$ est dit "à circulation conservative".

G. Lignes de champ et équipotentielles

Définition EM1.11 - Lignes de champ

Une ligne de champ est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur champ électrique $\vec{E}$. Ces lignes de champ sont orientées dans le même sens que le champ électrique. En un point M ne passe qu'une seule ligne de champ. Les lignes de champ sont dirigées vers les charges négatives et proviennent des charges positives.

Définition EM1.12 - Surface équipotentielle

Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle le potentiel électrostatique V est uniforme. Les lignes de champ sont orthogonales en tout point aux surfaces équipotentielles et orientées dans le sens des potentiels décroissants.

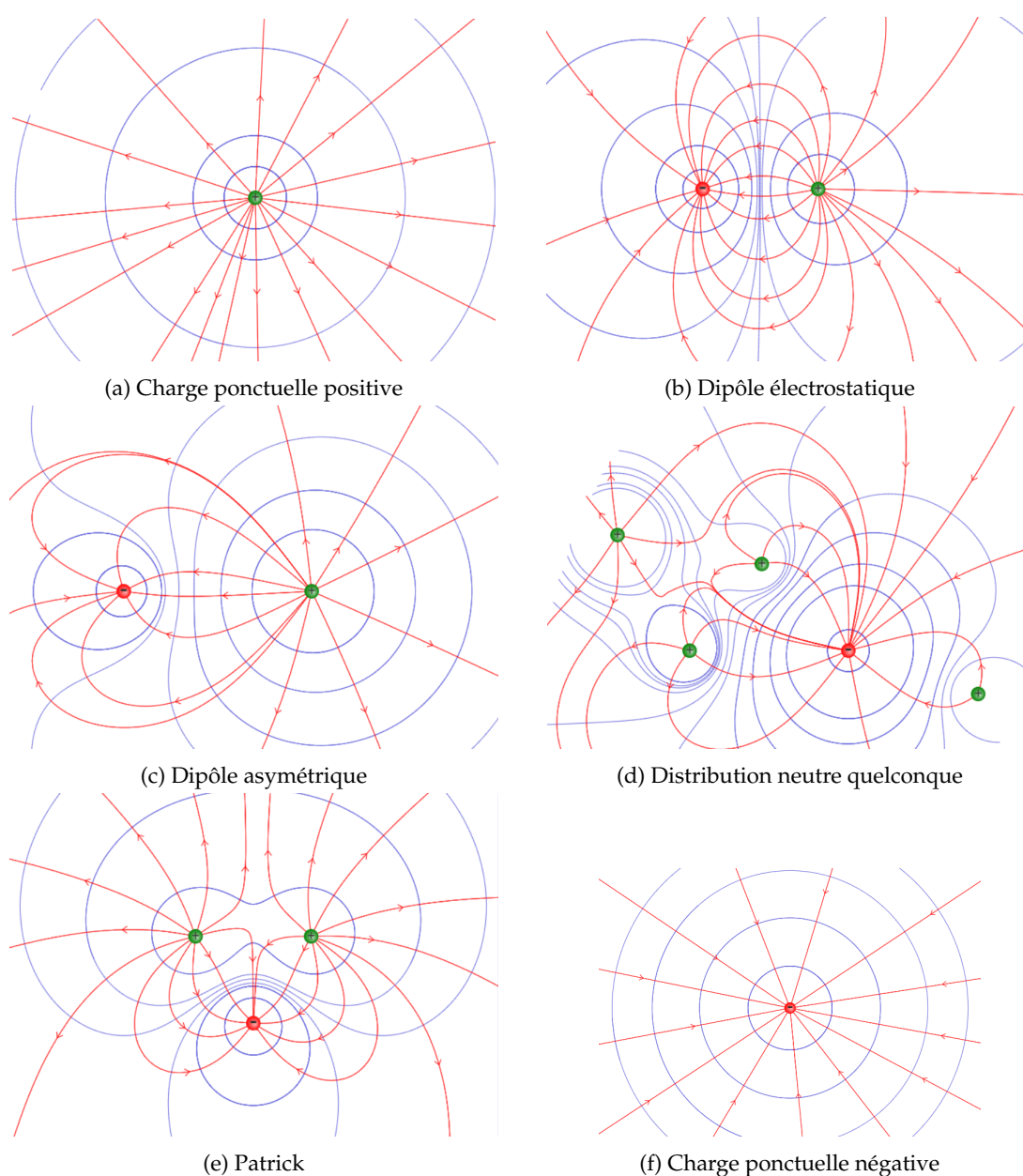


FIGURE 5 – Cartes de champ électrostatique $\vec{E}(M)$

H. Condensateur plan

Résultat EM1.7 - Condensateur plan infini

A l'intérieur d'un condensateur plan infini dont les électrodes de surface S , séparées d'une distance e sont chargés avec une densité surfacique de charge uniforme σ , le champ électrostatique vaut :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

et la capacité C d'un tel condensateur vaut

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

I. Théorème de GAUSS pour la gravitation

Théorème EM1.4 - Théorème de GAUSS pour la gravitation

Le flux du champ de gravitation $\vec{g}(M)$ à travers une surface fermée Σ est égale à la masse intérieure à cette surface, multipliée par le facteur $-4\pi G$.

$$\phi(\vec{g}) = \oint_{\Sigma} \vec{g} d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

J. Dipôle électrostatique

J.1 Notion de dipôle électrostatique

Définitions EM1.13 - Dipôle électrostatique et moment dipolaire

Deux charges opposées $+q$ et $-q$, placées en P et N, séparées par une distance $a = NP$ constituent un dipôle électrostatique caractérisé par son moment dipolaire $\vec{p} = q\vec{NP}$.

La norme du moment dipolaire s'exprime, en unités SI, en C.m.

Une unité usuelle, plus pratique, est utilisée : le Debye, $1 \text{ D} = 1,3 \times 10^{-30} \text{ C.m}$.

J.2 Potentiel $V(M)$ créé par un dipôle électrostatique

J.3 Champ $\vec{E}(M)$ créé par un dipôle électrostatique

J.4 Action d'un champ extérieur sur un dipôle