Loi binomiale

#TaleSpéMaths

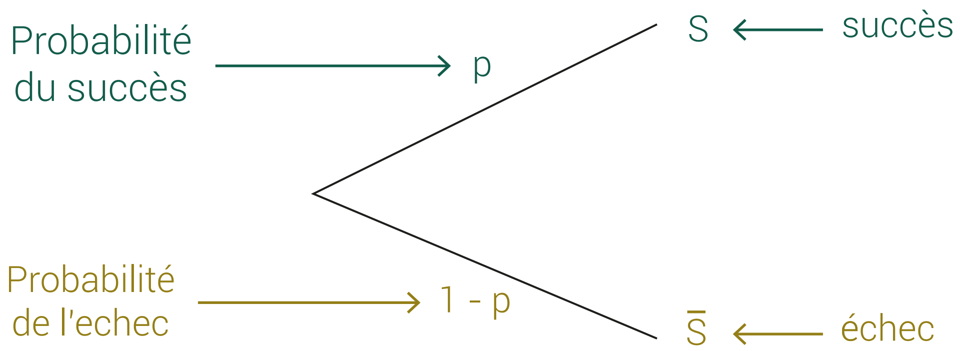
RAPPEL

Loi de probabilité d'une variable **aléatoire X** :

x_i	x_1	x_2	...	x_n	total
$P(X=x_i)$	P_1	P_2	...	P_n	1

Espérance : $E(X) = x_1 . P_1 + x_2 . P_2 + ... + x_n . P_n$

EPREUVE DE BERNOULLI : expérience aléatoire à 2 issues



SCHEMA DE BERNOULLI : épreuve de Bernoulli répétée ***n fois***, de façon ***identique*** et ***indépendante***.
⟶ Ses paramètres sont n et p.

LOI BINOMIALE : variable ***aléatoire X*** comptant le ***nombre de succès*** obtenu par le ***SCHÉMA de Bernoulli.***

⟶ Elle est noté B(n ; p)

⟶ Formule : $\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$

nb de succès cherché

Rappels : combinaison

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

⚠ Justifier une loi binomiale :
« on ***répète*** de façon ***identique*** et ***indépendante*** une ***expérience aléatoire*** ayant ***2 issues*** »

Espèrance : $E(X) = np$ **loi binomiale** *Interprétation* : « c'est la ***moyenne*** du nb de succès si on ***répète un grand nombre de fois*** l'expérience. »	**Variance** $V(X) = np(1-p)$ **Ecart-type** $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exercice 1

Lors d'un jeu de rôle, un candidat doit passer une épreuve en lançant trois fois de suite un dé à 8 faces. Une porte est dessinée sur 5 faces et un puits sur les autres faces. Pour gagner l'épreuve, le candidat doit obtenir trois portes.

1. Réaliser un arbre pondéré.
2. Expliquer pourquoi cette situation peut être assimilée à un schéma de Bernoulli.
3. Quelle est la probabilité que le candidat réussisse l'épreuve ?

Exercice 2

Pour réduire la pollution le gouvernement d'un pays décide d'interdire pendant une journée la circulation en ville à tous les véhicules non prioritaires portant un numéro pair. On sait que 4% des véhicules sont prioritaires et que $\frac{2}{3}$ des véhicules non prioritaires portent un numéro pair.

1. On contrôle un véhicule au hasard. Justifier que la probabilité que le véhicule soit en infraction est 0,64.
2. Dix contrôles sont effectués au hasard de manière indépendante, un conducteur pouvant être contrôlé plusieurs fois. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de conducteurs en infractions parmi les 10 contrôlés.
   a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres.
   b) Calculer la probabilité qu'exactement 4 véhicules soient en infraction. (arrondir au centième)
   c) Calculer la probabilité que moins de 5 véhicules soient en infraction. (arrondir au centième)
   d) Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

Exercice 3

Les 275 passagers d'un vol long-courrier s'apprêtent à embarquer dans un avion possédant 55 sièges en classe confort et 220 sièges en classe économique. Les voyageurs partent soit pour un séjour court, soit pour un séjour long. Parmi les passagers voyageant en classe économique, 35% partent pour un séjour long alors que parmi les passagers ayant choisi la classe confort, 70% ont opté pour un long séjour.

Partie A

On choisit au hasard un passager du vol. On note les évènements suivants :

- E : « le passager voyage en classe économique »
- L : « le voyageur part pour un long séjour »

On note $\overline{E}$ et $\overline{L}$ les évènements contraires de E et L.

1. Déterminer la probabilité de l'évènement E notée $P(E)$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité que le passager choisi parte en classe économique pour un séjour long.
4. Montrer que $P(L) = 0,42$.
5. On choisit au hasard un passager partant pour un long séjour. Quelle est la probabilité que ce passager voyage en classe économique ?

Partie B

Dans le but de réaliser une enquête de satisfaction, la compagnie aérienne sélectionne 25 passagers de façon aléatoire. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de passagers de classe économique sélectionnés parmi ces 25.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait exactement 10 voyageurs de classe économique sélectionnés. (arrondir au millième près si nécessaire)
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait au moins un passager de classe économique sélectionné. (arrondir au millième près si nécessaire)

Exercice 4

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

PARTIE I

Dans un centre de traitement du courrier, une machine est équipée d'un lecteur optique automatique de reconnaissance de l'adresse postale. Ce système de lecture permet de reconnaître convenablement 97% des adresses; le reste du courrier, que l'on qualifiera d'illisible pour la machine, est orienté vers un employé du centre chargé de lire les adresses. Cette machine vient d'effectuer la lecture de neuf adresses. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'adresses illisibles parmi ces neuf adresses. On admet que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = 0,03$.

1. La probabilité qu'aucune des neuf adresses soit illisible est égale, au centième près, à :

   a) a. 0 b) b. 1 c) c. $0,24$ d) d. $0,76$

2. La probabilité qu'exactement deux des neuf adresses soient illisibles pour la machine est :

   a) a. $\binom{9}{2} \times 0,97^2 \times 0,03^7$ b) b. $\binom{2}{9} \times 0,97^2 \times 0,03^7$

   c) c. $\binom{9}{7} \times 0,97^7 \times 0,03^2$ d) d. $\binom{9}{2} \times 0,97^7 \times 0,03^2$

3. La probabilité qu'au moins une des neuf adresses soit illisible pour la machine est :

   a) a. $P(X < 1)$ b) b. $P(X \leq 1)$ c) c. $P(X \geq 2)$ d) d. $1 - P(X = 0)$

PARTIE II

Une urne contient 5 boules vertes et 3 boules blanches, indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne. On considère les évènements suivants :

- V_1 : « la première boule tirée est verte »;
- B_1 : « la première boule tirée est blanche »;
- V_2 : « la seconde boule tirée est verte »;
- B_2 : « la seconde boule tirée est blanche ».

4. La probabilité de V_2 sachant que V_1 est réalisé, notée $P_{V_1}(V_2)$, est égale à :

   a) a. $\frac{5}{8}$ b) b. $\frac{4}{7}$ c) c. $\frac{5}{14}$ d) d. $\frac{20}{56}$

5. La probabilité de l'évènement V_2 est égale à :

   a) a. $\frac{5}{8}$ b) b. $\frac{5}{7}$ c) c. $\frac{3}{28}$ d) d. $\frac{9}{7}$