

Formulaire de trigonométrie

Table des matières

1	Angle en radians et arc de cercle	2
2	Triangle rectangle	3
3	Cercle trigonométrique, tangente et cotangente	4
4	Angles remarquables	5
5	Propriétés élémentaires	6
6	Angles associés	6
6.1	Angles opposés	7
6.2	Angles supplémentaires	7
6.3	Angles qui diffèrent de π	7
6.4	Angles complémentaires	8
6.5	Angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$	9
7	Formules d'addition	9
8	Formules de duplication	9
9	Formules de linéarisation	9
10	Équations trigonométriques	9
10.1	Équation $\cos x = \cos a$	9
10.2	Équation $\sin x = \sin a$	10
10.3	Équation $\tan x = \tan a$	10
11	Formules d'addition et de duplication avec la tangente	10
12	Expression en fonction de la tangente de l'arc moitié	10
13	Transformation de produits en sommes	10
14	Transformation de sommes en produits	11

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
 θ ou x désigne un nombre réel.

1 Angle en radians et arc de cercle

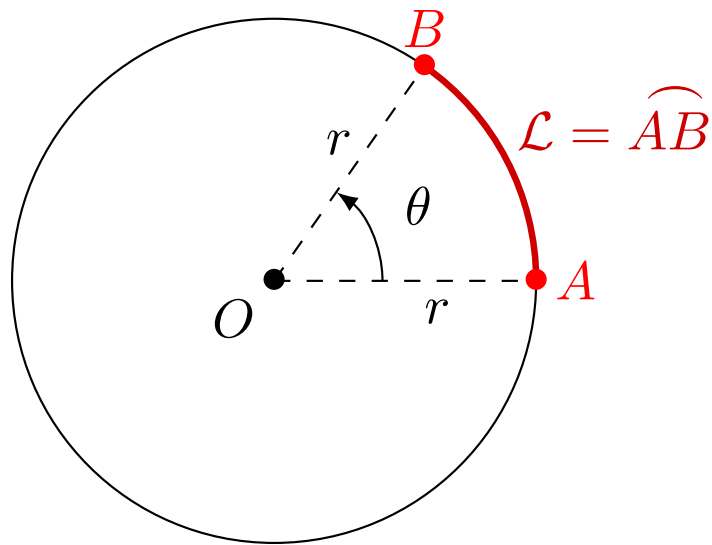


FIGURE 1 – Arc de cercle et angle en radians

Arc de cercle et angle en radians

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r où A et B sont deux points du cercle.

L'arc de cercle $\mathcal{L} = \widehat{AB}$ est proportionnel à l'angle $\theta = \widehat{AOB}$ exprimé en radians :

$$\widehat{AB} = r \times \theta$$

2 Triangle rectangle

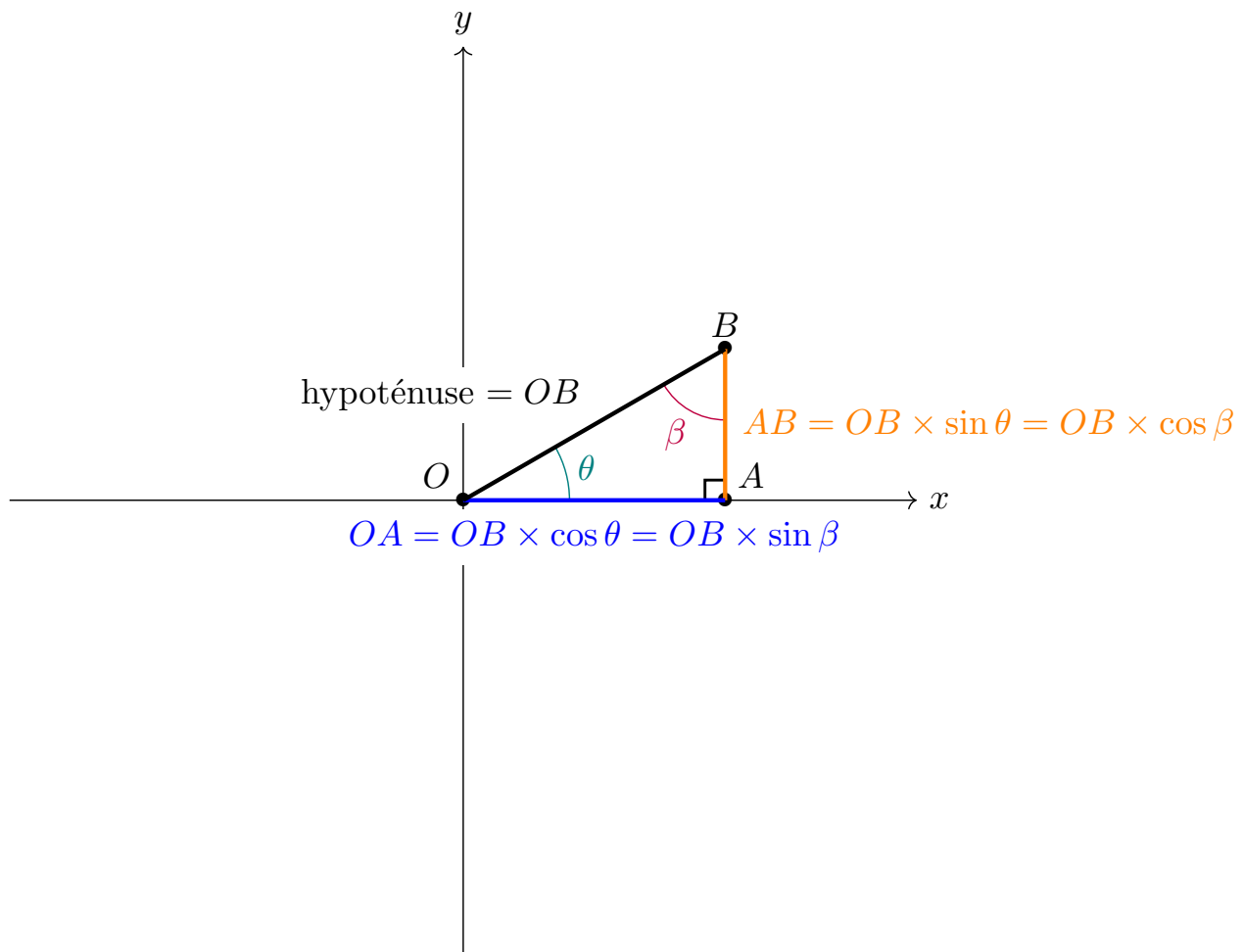


FIGURE 2 – Cosinus et sinus dans un triangle rectangle

Cosinus et sinus d'un angle en fonction des longueurs des côtés d'un triangle rectangle (angles non orientés)

Soit un triangle rectangle en A .

On appelle l'**hypoténuse** le côté opposé au point A .

Le cosinus d'un angle est égal à la longueur du côté adjacent à cet angle divisée par la longueur de l'hypoténuse.

Le sinus d'un angle est égal à la longueur du côté opposé à cet angle divisée par la longueur de l'hypoténuse.

Des exemples sont données sur la figure 2.

3 Cercle trigonométrique, tangente et cotangente

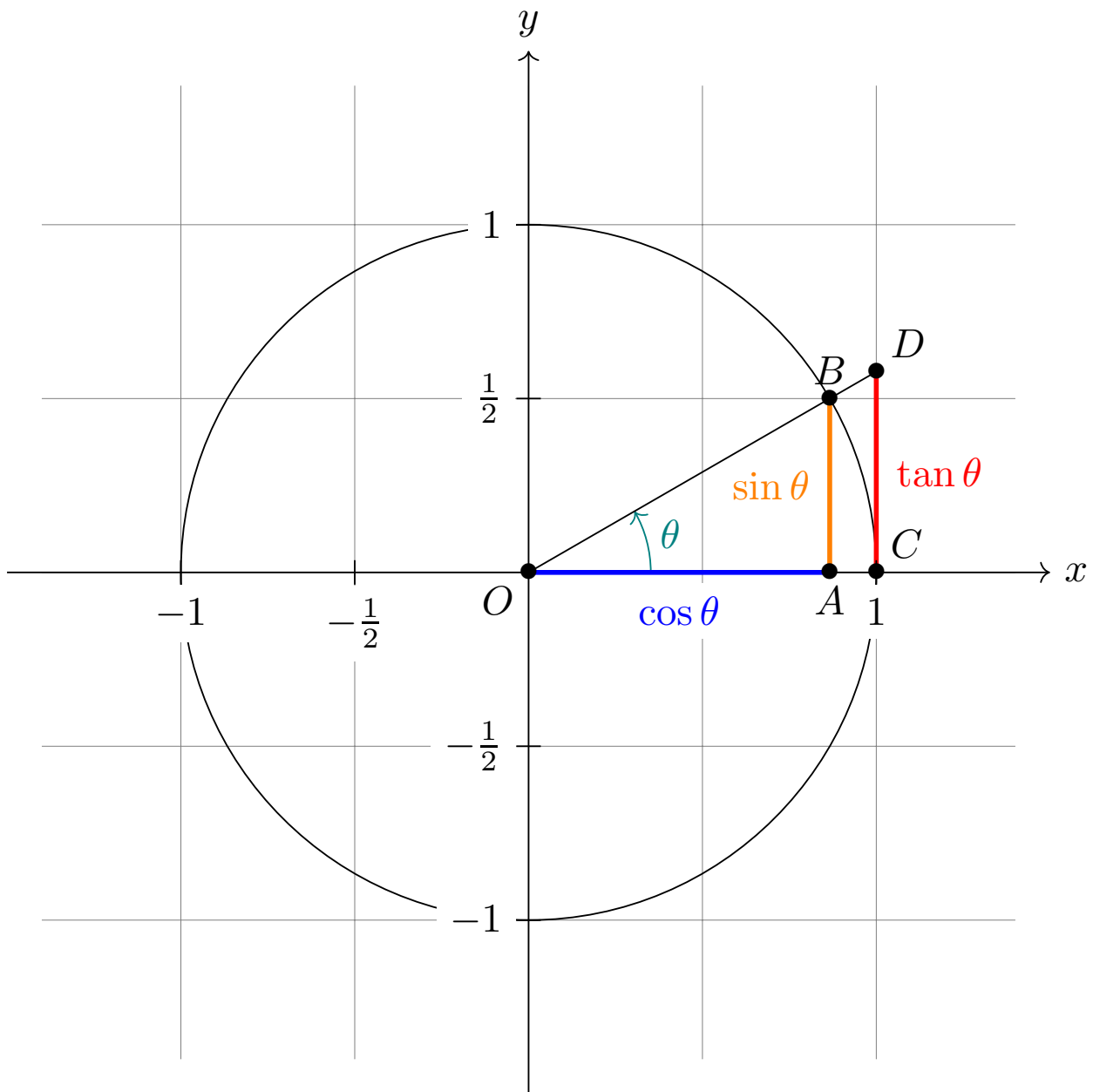


FIGURE 3 – Cosinus, sinus et tangente avec la cercle trigonométrique

Définition du cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

Propriété du cercle trigonométrique

On note $\vec{i}$ le vecteur unitaire de l'axe (Ox) .

Le cosinus du nombre θ est l'abscisse du point B de $\mathcal{C}$ telle que l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OB})$ admette θ comme mesure (en radians).

Le sinus est l'ordonnée de ce même point B .

Définition de la tangente et de la cotangente

La tangente et la cotangente de x sont les rapports (quand ils existent) :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \text{ pour } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ pour } x \neq 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Lecture sur le cercle trigonométrique

Si B est sur le cercle trigonométrique de rayon 1 centré en O, tel que OB est l'hypoténuse et A est le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses, alors :

$$\overline{OA} = \cos \theta \quad \text{et} \quad \overline{AB} = \sin \theta$$

$$\overline{CD} = \tan \theta \quad \text{pour } \theta \in]-\pi/2, \pi/2[$$

Un exemple est donné sur la figure 3.

4 Angles remarquables

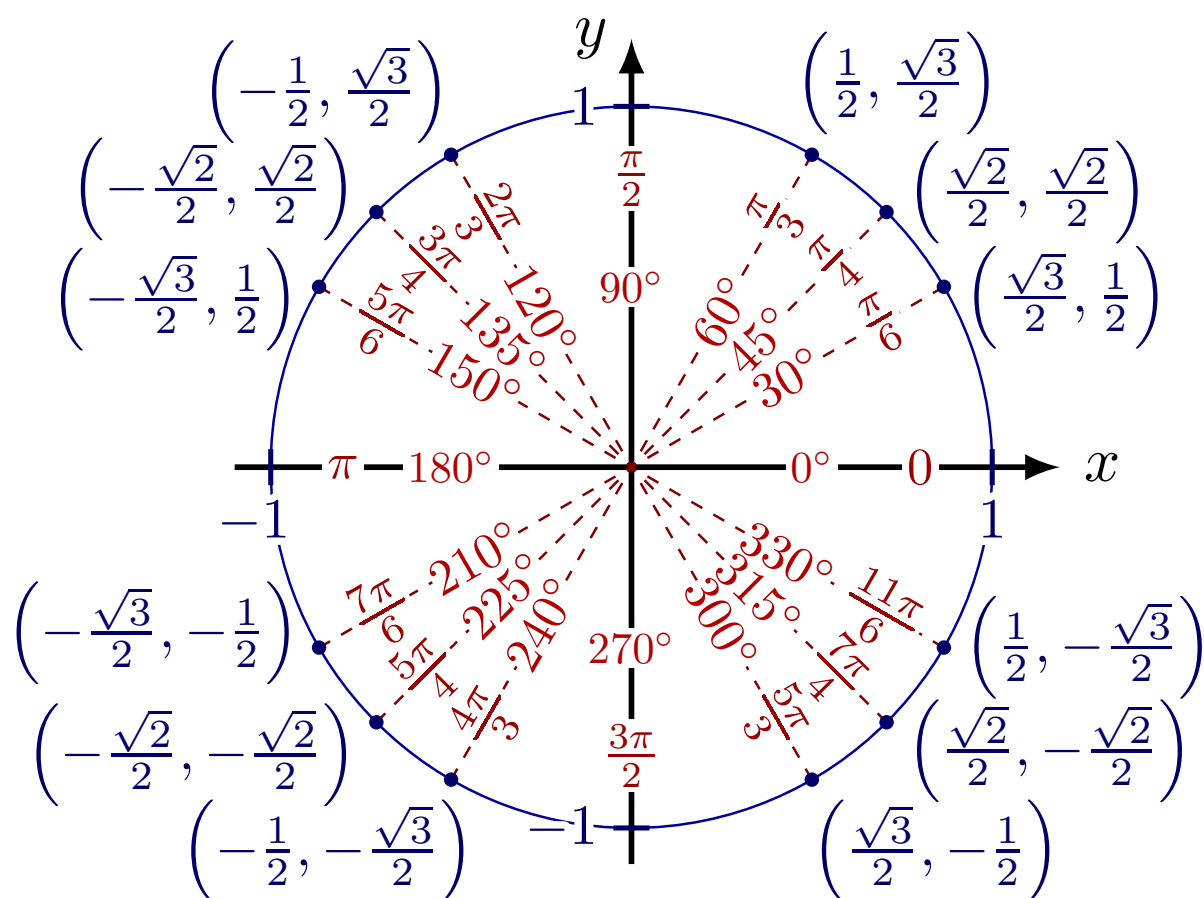


FIGURE 4 – Angles remarquables

5 Propriétés élémentaires

Propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques

Bornes : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$

Périodicité : $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

Pythagore : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$1 + \cotan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ pour $x \neq 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6 Angles associés

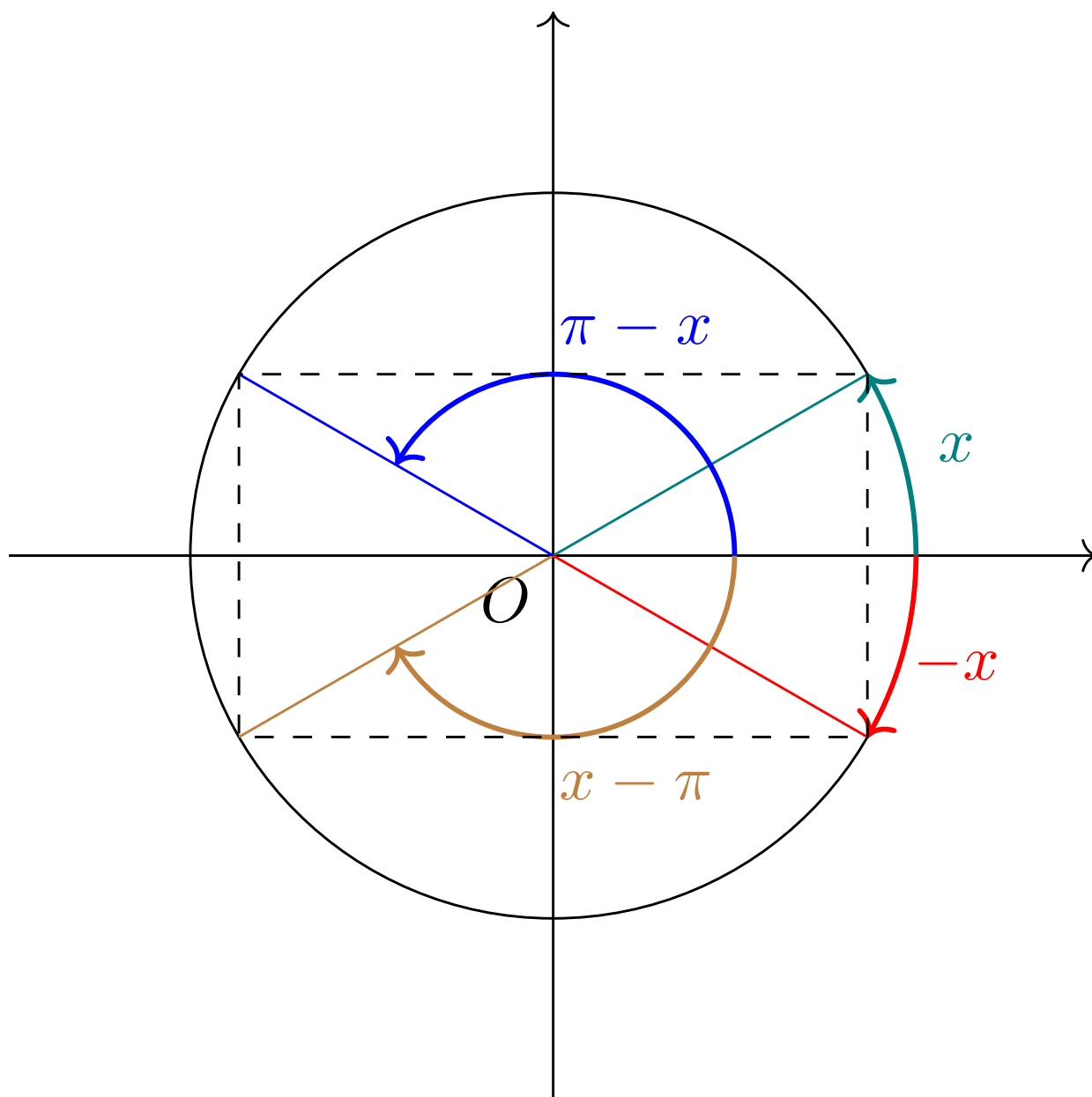


FIGURE 5 – Angles opposés et angles supplémentaires

6.1 Angles opposés

Propriétés des angles opposés

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

6.2 Angles supplémentaires

Propriétés des angles supplémentaires

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

6.3 Angles qui diffèrent de π

Propriétés des angles qui diffèrent de π

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

6.4 Angles complémentaires

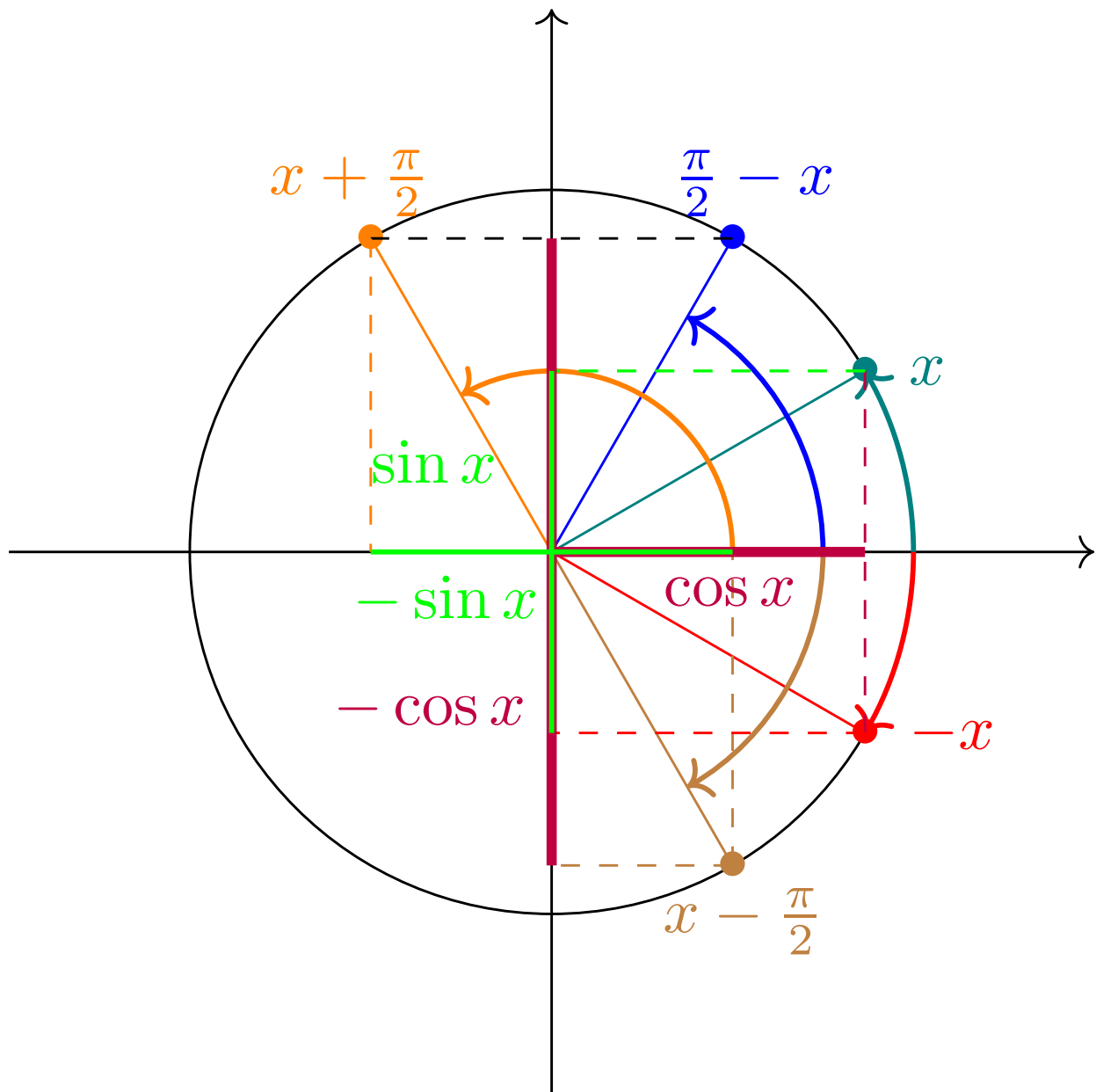


FIGURE 6 – Angles complémentaires ou qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$

Propriétés des angles complémentaires

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cotan x$$

6.5 Angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$

Propriétés des angles qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cotan x$$

7 Formules d'addition

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

8 Formules de duplication

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

9 Formules de linéarisation

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

10 Équations trigonométriques

10.1 Équation $\cos x = \cos a$

Les solutions de l'équation sont données par :

$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = -a[2\pi] \end{cases}$$

10.2 Équation $\sin x = \sin a$

Les solutions de l'équation sont données par :

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a[2\pi] \\ \text{ou} \\ x = \pi - a[2\pi] \end{cases}$$

10.3 Équation $\tan x = \tan a$

Équation $\tan x = \tan a$

Les solutions de l'équation sont données par :

$$\tan x = \tan a \iff x = a[\pi]$$

11 Formules d'addition et de duplication avec la tangente

Quand cela a un sens :

$$\begin{aligned} \tan(x + y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\ \tan(2x) &= \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

12 Expression en fonction de la tangente de l'arc moitié

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on obtient quand cela a un sens :

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{2t}{1 - t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1 + t^2} \\ \cos x &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \end{aligned}$$

13 Transformation de produits en sommes

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)) \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b)) \end{aligned}$$

14 Transformation de sommes en produits

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$