

Fonctions polynômes de degré 3

Terminale Bac Pro — ERA • TMA • ICCER (Groupement B)

Je vais apprendre à :

- Reconnaître et définir une **fonction polynôme de degré 3**.
- Calculer la **dérivée** d'un polynôme de degré 3.
- Dresser le **tableau de variations** à l'aide du signe de la dérivée.
- Identifier les **extremums locaux** (maximum, minimum).
- Lire et interpréter une **courbe** de polynôme de degré 3.
- Déterminer le nombre de solutions de $f(x) = c$ graphiquement.
- Utiliser la calculatrice ou un tableur pour résoudre des équations.

Situation professionnelle — Optimisation d'une boîte de rangement

Un menuisier découpe une plaque de bois rectangulaire et relève les côtés pour fabriquer une boîte ouverte. La hauteur des côtés est variable : en faisant varier cette hauteur, le volume change. Comment trouver la découpe qui maximise le volume de rangement ?



Introduction — D'où viennent les polynômes de degré 3 ?

En **Première**, vous avez étudié les **fonctions polynômes de degré 2**, appelées *fonctions du second degré* :

RAPPEL — DEGRÉ 2

Une fonction du second degré s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Sa courbe est une **parabole**. Sa dérivée est $f'(x) = 2ax + b$ (degré 1).

En **Terminale**, on monte d'un cran : on étudie les fonctions de **degré 3**. Ces fonctions apparaissent dans de nombreuses situations professionnelles :

ERA / TMA

Volume d'une boîte découpée dans une planche

$$V(x) = x(L-2x)(l-2x)$$

ICCER

Consommation énergétique saisonnière

$$C(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$$

1 La fonction cube

DÉFINITION

La **fonction cube** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

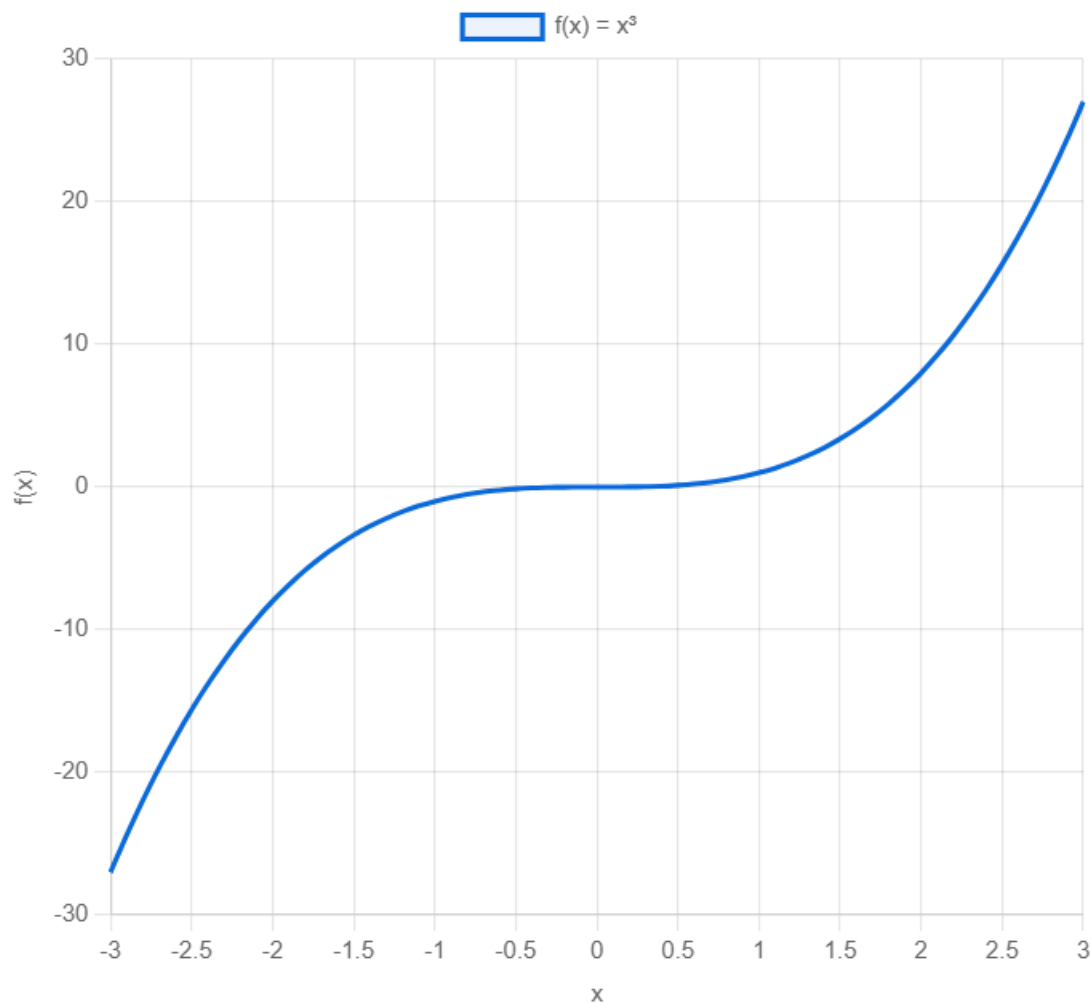
$f(x) = x^3$

C'est le cas le plus simple des polynômes de degré 3.

Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^3$	-27	-8	-1	0	1	8	27

Représentation graphique de $f(x) = x^3$



La courbe de $f(x) = x^3$ passe par l'origine et a une forme en « S » caractéristique.

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION CUBE

- Définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- **Strictement croissante** sur $\mathbb{R}$: plus x augmente, plus x^3 augmente.
- Passe par l'origine : $f(0) = 0$.
- Symétrique par rapport à l'origine (fonction *impaire*) : $f(-x) = -f(x)$.
- Sa **dérivée** est $f'(x) = 3x^2$, qui est toujours ≥ 0 .

POINT IMPORTANT

Même si $f'(0) = 0$, la fonction cube **n'a pas d'extremum en $x = 0$** : elle continue de croître de chaque côté de 0. Le point $(0, 0)$ est appelé **point d'inflexion** (changement de concavité).

✓ Mini-exercice 1 — Tester sa compréhension

Calculer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(3)$ pour $f(x) = x^3$.

► Voir la réponse

2 Définition d'une fonction polynôme de degré 3

DÉFINITION

Une **fonction polynôme de degré 3** (ou *cubique*) est une fonction de la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où a, b, c, d sont des réels avec **$a \neq 0$** .

Son domaine de définition est $\mathbb{R}$ tout entier.

EXEMPLES

- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ — $a = 2, b = -3, c = 1, d = -5$
- $g(x) = -x^3 + 4x$ — $a = -1, b = 0, c = 4, d = 0$
- $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$ — modèle de volume ERA/TMA

ATTENTION

Le coefficient a (devant x^3) doit être **non nul**. Si $a = 0$, la fonction est un polynôme de degré 2 (ou moins), pas de degré 3.

Allure générale de la courbe

Selon le signe de a , la courbe adopte des comportements opposés aux extrêmes :

$$a > 0$$

Courbe « en S » montante ↗
bas-gauche vers haut-droit

$$a < 0$$

Courbe « en S inversé » descendante ↘
haut-gauche vers bas-droit

La courbe présente toujours un **point d'inflexion** (changement de concavité), contrairement aux paraboles de degré 2.

3 Rappels sur les dérivées

DÉFINITION

La **dérivée** $f'(x)$ d'une fonction f mesure la *vitesse de variation* de f en x .

Géométriquement, $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

Tableau des dérivées usuelles

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Exemple
k (constante)	0	$f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$
x	1	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
x^2	$2x$	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
x^3	$3x^2$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
ax^n	nax^{n-1}	$f(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(x) = 12x^2$

RÈGLES DE CALCUL

Pour toutes fonctions dérivables u et v et toute constante k :

$$(u + v)' = u' + v' \quad \text{et} \quad (ku)' = k u'$$

On dérive terme par terme et on peut sortir les constantes multiplicatives.

4 Dérivée d'un polynôme de degré 3

PROPRIÉTÉ

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors :

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

La dérivée d'un polynôme de degré 3 est un **polynôme de degré 2**.

APPLICATION

Un artisan menuisier modélise le volume d'un tiroir par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$. Calcule $f'(x)$.

MÉTHODE PAS À PAS

On dérive terme par terme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{ax^3}_{\text{terme } x^3} + \underbrace{bx^2}_{\text{terme } x^2} + \underbrace{cx}_{\text{terme } x} + \underbrace{d}_{\text{constante}} \\ f'(x) &= \underbrace{3ax^2}_{(ax^3)'=3ax^2} + \underbrace{2bx}_{(bx^2)'=2bx} + \underbrace{c}_{(cx)'=c} + \underbrace{0}_{(d)'=0} \end{aligned}$$

EXEMPLE DÉTAILLÉ 1

Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

$$(2x^3)' = 3 \times 2 \cdot x^2 = 6x^2$$

$$(-3x^2)' = 2 \times (-3) \cdot x^1 = -6x$$

$$(5x)' = 5$$

$$(-1)' = 0$$

$$\text{Donc : } f'(x) = 6x^2 - 6x + 5$$

EXEMPLE DÉTAILLÉ 2 — VOLUME BOÎTE

ERA/TMA

Calculer $V'(x)$ pour $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$.

$$(4x^3)' = 12x^2$$

$$(-140x^2)' = -280x$$

$$(1200x)' = 1200$$

$$\text{Donc : } V'(x) = 12x^2 - 280x + 1200$$

✓ Mini-exercice 2 — Calculer une dérivée

Calculer $f'(x)$ pour $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7x - 4$.

[► Voir la réponse](#)**5 Étude des variations — Tableau de variations****LIEN DÉRIVÉE - VARIATIONS**

- Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, alors f est **strictement croissante** sur cet intervalle.
- Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, alors f est **strictement décroissante** sur cet intervalle.
- Si $f'(x_0) = 0$ et que le signe de f' change, alors f a un **extremum local** en x_0 .

MÉTHODE — DRESSER LE TABLEAU DE VARIATIONS

1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ (équation du 2nd degré, calcul du discriminant Δ).
3. Dresser le tableau de signe de $f'(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de f .
5. Calculer les valeurs de f aux extrema si demandé.

APPLICATION

Pour $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, on a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$. Dresse le tableau de signe de $f'(x)$ et indique les intervalles de croissance et de décroissance.

Exemple complet — $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

Étape 1 : Dérivée.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Étape 2 : Résoudre $f'(x) = 0$, soit $3x^2 - 6x - 9 = 0$, i.e. $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Convention du chapitre — méthode du discriminant Pour résoudre $f'(x) = 0$, ce chapitre utilise la **méthode du discriminant**, qui ne figure pas au programme du Bac Pro : le programme attend une **factorisation** (racine évidente) ou l'usage de l'**outil numérique**. Le discriminant est assumé ici en **anticipation du BTS**, où il est indispensable. En évaluation certificative, une résolution par factorisation ou outil numérique est tout aussi valable.

Rappel — résoudre $ax^2 + bx + c = 0$:

Discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\text{Si } \Delta > 0 : \text{deux racines } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ici $a = 1, b = -2, c = -3$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = -1 \quad x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = 3$$

Étape 3 : Tableau de signe de $f'(x) = 3(x+1)(x-3)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Étape 4 : Valeurs aux extrema :

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 2 = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$$

Tableau de variations complet :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7 (max local)	$\searrow$	-25 (min local)	$\nearrow$	$+\infty$

CAS PARTICULIERS

Si $\Delta = 0$: la dérivée a une racine double, la courbe a un point d'inflexion horizontal (pas d'extremum).

Si $\Delta < 0$: $f'(x)$ garde un signe constant, f est **strictement monotone** sur $\mathbb{R}$.

✓ Mini-exercice 3 — Lire un tableau de variations

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. On a $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$.

Indiquer le sens de variation de f sur chacun des intervalles $] -\infty ; 1[$, $]1 ; 3[$ et $]3 ; +\infty[$.

► Voir la réponse

6 Les extremums locaux

DÉFINITION — EXTREMUMS LOCAUX

Un **maximum local** en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la valeur la plus grande dans un voisinage de x_0 .

Un **minimum local** en x_0 signifie que $f(x_0)$ est la valeur la plus petite dans un voisinage de x_0 .

On reconnaît un extremum à partir du tableau de variations :

- $f'(x_0) = 0$ et f' passe de $+$ à $-$ → **maximum local**
- $f'(x_0) = 0$ et f' passe de $-$ à $+$ → **minimum local**

APPLICATION

Pour $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ($f'(x) = 3(x-1)(x-3)$), calcule les valeurs aux extrema $f(1)$ et $f(3)$. Indique lequel est un maximum local et lequel est un minimum local.

CAS OÙ $F'(X_0) = 0$ NE SUFFIT PAS

Si $\Delta = 0$: la dérivée a une racine double, le signe de f' ne change **pas**. La courbe a un **point d'inflexion horizontal** mais **pas d'extremum**.

Si $\Delta < 0$: $f'(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$ (toujours positif ou toujours négatif). La fonction est alors **strictement monotone** sur $\mathbb{R}$ — sans extremum.

$\Delta > 0$: deux racines

La courbe a **1 max local et 1 min local**

$\Delta \leq 0$: aucune racine réelle distincte

Pas d'extremum — **fonction strictement monotone**

7 Interprétation graphique — Nombre de solutions de $f(x) = c$

Graphiquement, les solutions de $f(x) = c$ sont les **abscisses des points d'intersection** de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite horizontale $y = c$.

LECTURE GRAPHIQUE DU NOMBRE DE SOLUTIONS

- Si la droite $y = c$ est **au-dessus du max local** ou **en-dessous du min local** $\rightarrow$ **1 seule solution**
- Si la droite $y = c$ est **égale au max ou min local** $\rightarrow$ **2 solutions**
- Si la droite $y = c$ est **strictement entre le max et le min** $\rightarrow$ **3 solutions**
- Si f est strictement monotone (pas d'extremum) $\rightarrow$ **toujours 1 solution**

8 Exemple complet — Graphique interactif

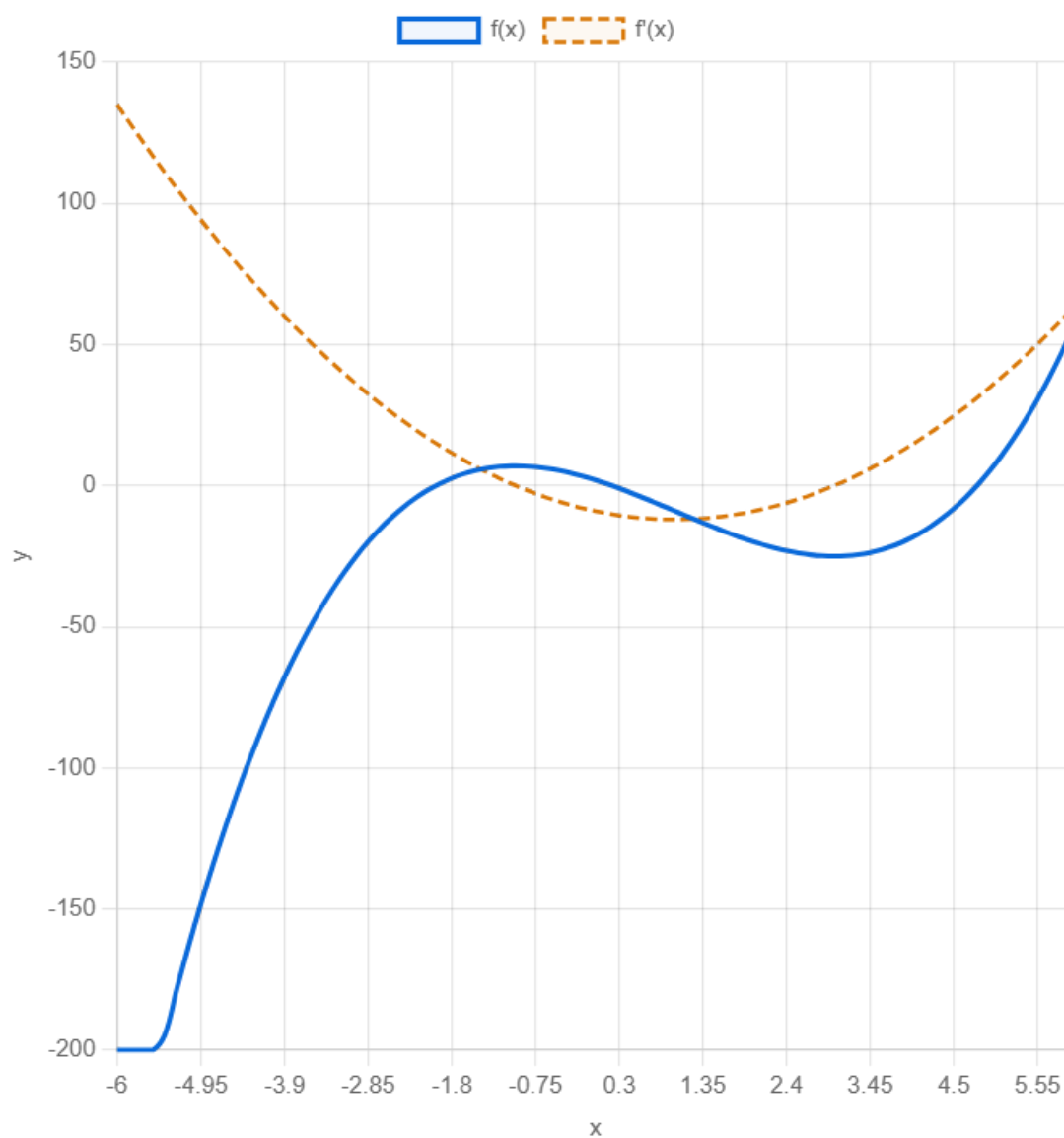
L'exemple de référence du chapitre est $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$. Vérifions toutes les étapes :

Rappel du tableau de variations de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \rightarrow \text{racines : } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 3.$$

Choisir un exemple prédéfini :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

La **courbe bleue** est $f(x)$ et la **courbe orange en pointillés** est $f'(x)$.

10 Résolution de $f(x) = k$ à la calculatrice ou au tableur

MÉTHODE — LECTURE GRAPHIQUE

1. Tracer $y_1 = f(x)$ et $y_2 = k$ (droite horizontale) sur la calculatrice.
2. Utiliser la fonction **Intersection** (ou *Trace + Zoom*) pour trouver les abscisses des points d'intersection.
3. Vérifier en calculant f (valeur trouvée).

MÉTHODE — TABLEAU DE VALEURS

1. Entrer $f(x)$ dans la calculatrice.
2. Afficher le tableau de valeurs avec un pas adapté.
3. Repérer les changements de signe de $f(x) - k$ pour encadrer les solutions.
4. Affiner le pas pour obtenir la précision souhaitée.

EXEMPLE

Résoudre $f(x) = -10$ avec $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

D'après le tableau de variations : f décroît de 7 à -25 sur $[-1 ; 3]$, donc il existe une unique solution dans $[-1 ; 3]$ telle que $f(x) = -10$. De plus, f croît depuis $-\infty$ jusqu'à 7 pour $x \in]-\infty ; -1[$, donc il existe une solution dans $(-\infty, -1)$. Enfin, f croît de -25 vers $+\infty$ sur $]3 ; +\infty[$, donc une troisième solution dans $]3 ; +\infty[$.

À la calculatrice, les solutions approchées sont $x \approx -2,5$, $x \approx 1,1$ et $x \approx 4,4$.

MÉTHODE — BALAYAGE

Le

balayage

consiste à se rapprocher progressivement d'une solution en réduisant l'intervalle de recherche.

1. On réduit l'intervalle de recherche jusqu'à obtenir la précision voulue (ex. : au dixième).
2. On évalue $f(x)$ et on cherche les valeurs qui « encadrent » c .
3. On affine le pas pour gagner en précision.

EXEMPLE — RÉSOUDRE $F(X) = -10$ AVEC $F(X) = X^3 - 3X^2 - 9X + 2$

D'après le tableau de variations, il existe une solution dans $[-1 ; 3]$ (où f va de 7 à -25).

Étape 1 — Balayage au pas 0,5 sur $[0 ; 2]$:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0
$f(x)$	2	-3,1	-9	-14,9	-20

On voit que $f(0,5) \approx -3,1 > -10$ et $f(1,0) = -9 > -10$ et $f(1,5) \approx -14,9 < -10$.

La solution est donc dans $[1,0 ; 1,5]$.

Étape 2 — Balayage au pas 0,1 sur $[1,0 ; 1,5]$:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$f(x)$	-9	-10,2	-11,4	-12,6	-13,7	-14,9

→ Solution approchée : $x \approx 1,1$ (au dixième).

MÉTHODE — AVEC LA CALCULATRICE TI OU CASIO

1. Entrer $Y_1 = f(x)$ et $Y_2 = c$ (valeur constante).
2. Afficher le graphique et utiliser la fonction **Intersection** (Calc → Intersect ou G-Solv).
3. La calculatrice donne directement la valeur approchée.

Sur Calc : $Y=$ → entrer $f(x)$ dans Y1 et c dans Y2 → GRAPH → 2nd CALC → 5:intersect → valider

12 Problème d'optimisation — Boîte découpée ERA / TMA

CONTEXTE PROFESSIONNEL

Un menuisier dispose d'une plaque de bois rectangulaire de **40 cm × 30 cm**. Il découpe des carrés de côté x aux quatre coins, puis plie les bords pour former une boîte ouverte.
Objectif : déterminer la valeur de x qui maximise le volume de la boîte.

Mise en équation

Après découpage des carrés de côté x :

- Longueur de la base : $40 - 2x$
- Largeur de la base : $30 - 2x$
- Hauteur : x

Le volume s'écrit :

$$V(x) = x(40 - 2x)(30 - 2x)$$

Développons :

$$(40 - 2x)(30 - 2x) = 1200 - 80x - 60x + 4x^2 = 4x^2 - 140x + 1200$$

$$V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 1200x$$

CONTRAINTE

Pour que la boîte soit physiquement réalisable : $x > 0$ et $30 - 2x > 0$, soit $0 < x < 15$.

Calcul de la dérivée et recherche du maximum

$$V'(x) = 12x^2 - 280x + 1200$$

Réolvons $V'(x) = 0$:

$$\Delta = 280^2 - 4 \times 12 \times 1200 = 78\,400 - 57\,600 = 20\,800$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{20\,800} = 40\sqrt{13} \approx 144,2$$

$$x_1 = \frac{280 - 144,2}{24} \approx \frac{135,8}{24} \approx 5,66 \quad x_2 = \frac{280 + 144,2}{24} \approx \frac{424,2}{24} \approx 17,7$$

Comme $0 < x < 15$, seule la valeur $x_1 \approx 5,66$ cm appartient au domaine physique.

Tableau de variations de V sur $[0; 15]$

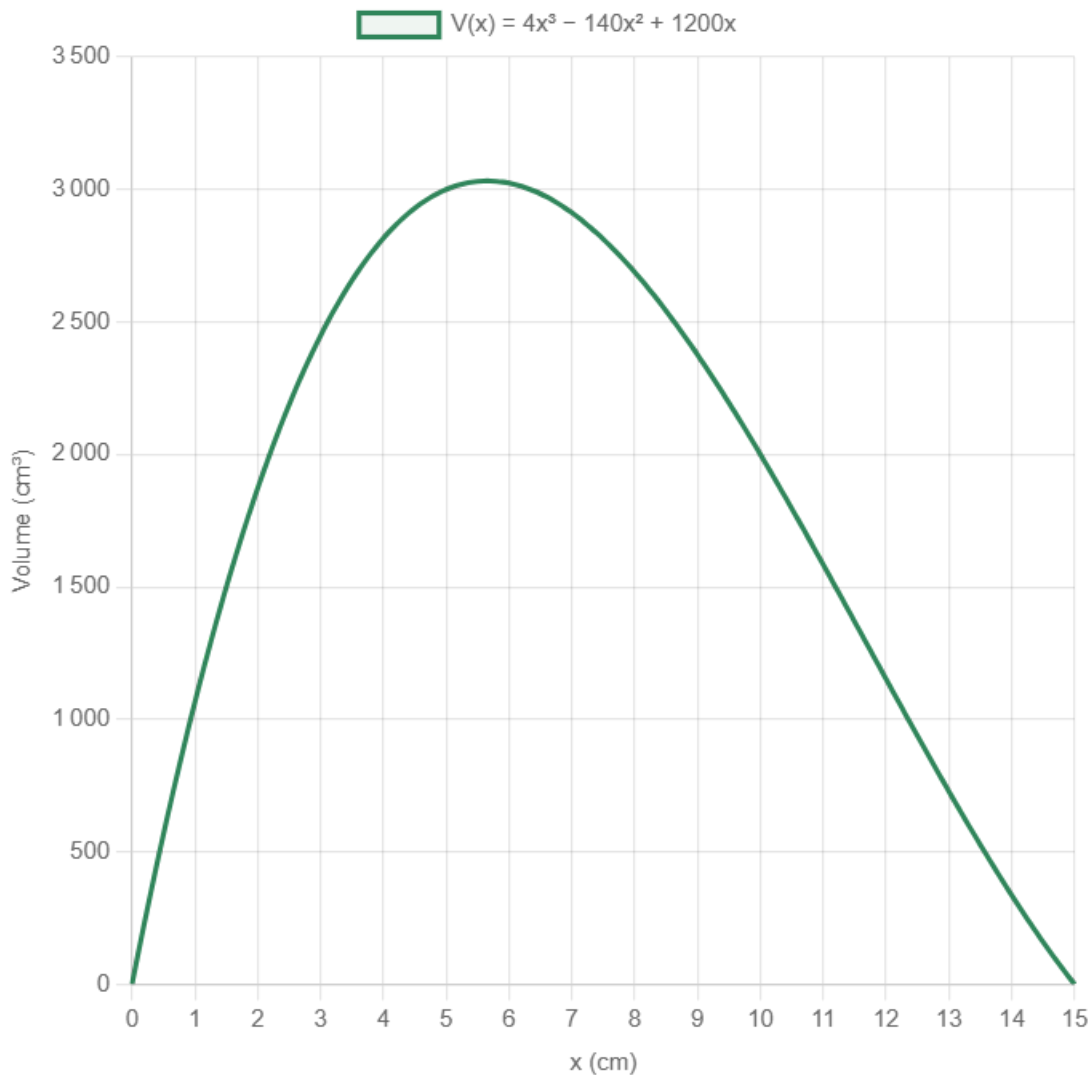
x	0		5,66		15
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x) \text{ (cm}^3\text{)}$	0	↗	$\approx 3\,033$ (maximum)	↘	0

Vérification :

$$V(5,66) \approx 4(5,66)^3 - 140(5,66)^2 + 1200 \times 5,66 \approx 726 - 4\,485 + 6\,792 \approx 3\,033 \text{ cm}^3$$

Conclusion : Le volume est maximal pour $x \approx 5,66$ cm. Le menuisier doit découper des carrés de côté environ **5,7 cm** aux quatre coins pour obtenir un volume maximal d'environ **3 033 cm³**.

Graphique du volume $V(x)$



La **courbe verte** représente $V(x)$ sur $[0; 15]$. Le maximum est atteint en $x \approx 5,66$ cm.

13

Application professionnelle — Consommation d'énergie

ICCER

CONTEXTE PROFESSIONNEL

Un technicien en chauffage modélise la consommation mensuelle d'énergie (en MWh) d'un bâtiment par la fonction :

$$C(t) = -0,5t^3 + 6t^2 - 18t + 30 \quad t \in [0; 8]$$

où t représente les mois ($t = 0$: janvier, $t = 8$: septembre).

Calcul de la dérivée et étude des variations

$$C'(t) = -1,5t^2 + 12t - 18$$

Réolvons $C'(t) = 0$:

$$-1,5t^2 + 12t - 18 = 0 \implies t^2 - 8t + 12 = 0$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16 \qquad t_1 = \frac{8 - 4}{2} = 2 \qquad t_2 = \frac{8 + 4}{2} = 6$$

t	0		2		6		8
$C'(t)$		−	0	+	0	−	
$C(t)$ (MWh)	30	↘	14 <i>(minimum local)</i>	↗	30 <i>(maximum local)</i>	↘	14

Interprétation : La consommation atteint un **minimum local en mars** ($t = 2$) avec 14 MWh, et un **maximum local en juillet** ($t = 6$) avec 30 MWh. La courbe présente une forme caractéristique d'un modèle saisonnier d'énergie.

Exemple 2 — Bénéfice d'une entreprise de chauffage

CONTEXTE PROFESSIONNEL

Le bénéfice mensuel (en milliers d'euros) d'une entreprise spécialisée en pompes à chaleur est modélisé par :

$$B(n) = -n^3 + 9n^2 - 15n + 7 \qquad n \in [0 ; 7]$$

où n est le nombre de contrats (en dizaines).

$$B'(n) = -3n^2 + 18n - 15 = -3(n^2 - 6n + 5) = -3(n - 1)(n - 5)$$

n	0		1		5		7
$B'(n)$		—	0	+	0	—	
$B(n)$ (k€)	7	↘	0	↗	32 (maximum)	↘	0

Conclusion : Le bénéfice est maximal pour **50 contrats** ($n = 5$), avec un bénéfice de **32 000 €**.

14 Tableau récapitulatif des formules

Objet	Formule
Polynôme degré 3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$
Dérivée	$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Dérivée d'une constante	$(k)' = 0$
Dérivée de x^n	$(x^n)' = nx^{n-1}$
Dérivée de ax^n	$(ax^n)' = nax^{n-1}$
Linéarité	$(u + v)' = u' + v' \quad ; \quad (ku)' = ku'$
$f'(x) > 0$ sur I	f strictement croissante sur I
$f'(x) < 0$ sur I	f strictement décroissante sur I
Maximum local en x_0	$f'(x_0) = 0$ et f' passe de + à —
Minimum local en x_0	$f'(x_0) = 0$ et f' passe de — à +

15 À retenir — L'essentiel du chapitre

✓ Ce qu'il faut maîtriser absolument :

- La **fonction cube** : $f(x) = x^3$, dérivée $f'(x) = 3x^2$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Un polynôme de degré 3 s'écrit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec $a \neq 0$.
- Sa dérivée est $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ (polynôme de degré 2).
- Le signe de f' donne les **variations** de f (tableau de variations).
- Si $\Delta > 0$: la courbe a un **maximum local** et un **minimum local**.
- Si $\Delta \leq 0$: la fonction est **strictement monotone**, sans extremum.
- Graphiquement, les solutions de $f(x) = c$ = les intersections de la courbe avec $y = c$.
- La calculatrice ou le tableur permettent de résoudre $f(x) = k$ par balayage.

⚠ Erreurs fréquentes à éviter

- **Oublier le signe de a** lors du calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ pour f' . Ne pas confondre les coefficients de f et ceux de f' .
- **Croire que $f'(x_0) = 0$ implique toujours un extremum**. Si $\Delta = 0$, il n'y a qu'un point d'inflexion, pas d'extremum.
- **Confondre extremum et zéro de f** . Un extremum est là où f' s'annule, pas où f s'annule.
- **Ne pas vérifier la contrainte de l'intervalle** dans les problèmes concrets (ex. : $0 < x < 15$ pour la boîte).
- **Calculer $(-2)^3 = 8$** au lieu de -8 . Le cube d'un négatif est négatif.

16 Mini-exercices de vérification

Exercice 1 — Calcul de dérivée

Calculer la dérivée de $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 4x + 1$.

► Voir la correction

Exercice 2 — Tableau de variations

Soit $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Calculer $h'(x)$.
2. Résoudre $h'(x) = 0$.
3. Dresser le tableau de variations de h sur $\mathbb{R}$.

► [Voir la correction](#)

Exercice 3 — Optimisation ERA/TMA

ERA/TMA

Un artisan fabrique des boîtes à partir de plaques de bois de **60 cm × 20 cm**. Il découpe des carrés de côté x aux quatre coins.

1. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte.
2. Développer pour obtenir un polynôme de degré 3.
3. Calculer $V'(x)$ et résoudre $V'(x) = 0$.
4. Quelle est la valeur de x qui maximise $V(x)$ sur $]0; 10[$?

► [Voir la correction](#)

Exercice 4 — Modèle énergétique

ICCER

La puissance consommée (en kW) par une installation de climatisation est modélisée par :

$$P(t) = 0,2t^3 - 2,4t^2 + 8t + 1 \quad t \in [0; 8]$$

où t est le nombre d'heures après le démarrage.

1. Calculer $P'(t)$.
2. Résoudre $P'(t) = 0$ sur $[0; 8]$.
3. Déterminer si P admet un maximum ou un minimum local, et la valeur associée.

► [Voir la correction](#)



Pour aller plus loin (hors programme)

HORS PROGRAMME BAC PRO

Les notions suivantes **dépassent le programme** de Terminale Bac Professionnel. Elles sont mentionnées ici pour les élèves curieux.

- **Dérivées d'ordre supérieur** : la dérivée seconde $f''(x)$ permet d'étudier la *concavité* de la courbe (lycée général, BTS).
- **Factorisation complète** : tout polynôme de degré 3 peut se factoriser en $a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$ si les racines sont réelles (lycée général).
- **Intégration** : le calcul d'aire sous la courbe (intégrale) d'un polynôme de degré 3 est étudié en Terminale générale et en BTS.
- **Méthode de Newton** : algorithme itératif permettant de trouver très précisément les zéros d'une fonction (BTS, informatique).

Erreurs fréquentes



Oublier de multiplier par le coefficient lors du calcul de la dérivée

$$(ax^3)' = 3ax^2 \text{ et non pas } ax^2.$$

Conseil : dériver terme par terme en multipliant l'exposant et en le diminuant de 1.



Conclure à un extremum sans vérifier le changement de signe de f'

Si $f'(x_0) = 0$ mais que f' ne change pas de signe, il n'y a pas d'extremum.

Conseil : toujours dresser le tableau de signe complet de f' avant de conclure.



Confondre maximum local et maximum global

Un maximum local est le plus grand dans un voisinage — pas nécessairement sur tout le domaine.

Conseil : dans un problème d'optimisation, préciser l'intervalle sur lequel on cherche le maximum ou minimum.

✖ Erreur de signe dans la résolution de $f'(x) = 0$

Un signe mal calculé dans le discriminant ou dans les racines fausse tout le tableau.

Conseil : vérifier les racines en remplaçant dans $f'(x)$ — le résultat doit donner 0.

Simulation interactive

[Fonctions polynômes de degré 3](#)

Fonctions polynômes de degré 3

Fonctions polynômes de degré 3 | Terminale Bac Pro | ERA · TMA · ICCER
(Groupement B)

[Socle](#)[Standard](#)[Approfondissement](#)[Tout voir](#)

Compétences travaillées :

- Reconnaître et évaluer une fonction polynôme de degré 3
- Calculer la dérivée $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
- Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations
- Identifier les extremums locaux (maximum et minimum)
- Interpréter graphiquement — nombre de solutions de $f(x) = c$
- Résoudre des problèmes d'optimisation dans des contextes professionnels

Convention du chapitre — méthode du discriminant Pour résoudre $f'(x) = 0$, ce chapitre utilise la **méthode du discriminant**, qui ne figure pas au programme du Bac Pro : le programme attend une **factorisation** (racine évidente) ou l'usage de l'**outil numérique**. Le discriminant est assumé ici en **anticipation du BTS**, où il est indispensable. En évaluation certificative, une résolution par factorisation ou outil numérique est tout aussi valable.

EXERCICE 1 La fonction cube — tableau de valeurs et calculs

SOCLE

On considère la fonction cube $f(x) = x^3$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = x^3$	?	?	?	?	?	?	?

2. Parmi les quatre fonctions suivantes, identifier celle(s) qui sont des polynômes de degré 3 :

- (A) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$
- (B) $g(x) = -2x^3 + x - 7$
- (C) $h(x) = x^4 - x^3 + 2$
- (D) $k(x) = x^3$

3. Calculer $f(-4)$ et $f(2,5)$ pour $f(x) = x^3$.

Mes calculs :

EXERCICE 2 Calculer des dérivées terme par terme

SOCLE

Rappel : On dérive terme par terme :

$$(ax^3)' = 3ax^2 ; (bx^2)' = 2bx ; (cx)' = c ; (d)' = 0$$

Calculer la dérivée de chaque fonction :

a) $f(x) = x^3$

$f'(x) = \dots\dots\dots$

b) $g(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 4$

$g'(x) = \dots\dots\dots$

c) $h(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$

$h'(x) = \dots\dots\dots$

d) $k(x) = 4x^3 - 7$

$k'(x) = \dots\dots\dots$

Mes calculs :

EXERCICE 3 Identifier les coefficients et calculer la dérivée

SOCLE

Pour chaque fonction de la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, identifier a, b, c, d puis calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

a	b	c	d
?	?	?	?

$f'(x) = \dots\dots\dots$

b) $g(x) = -2x^3 + 4x - 3$

a	b	c	d
?	?	?	?

$g'(x) = \dots\dots\dots$

Mes calculs :

EXERCICE 4 Calculer des images — méthode guidée

SOCLE

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$.

Méthode pour calculer $f(2)$:

On remplace chaque x par 2 dans la formule, puis on calcule étape par étape.

1. Calculer $f(2)$ en complétant les étapes :

$$f(2) = 2 \times \square^3 - 3 \times \square^2 + \square - 5$$

$$f(2) = 2 \times \square - 3 \times \square + 2 - 5$$

$$f(2) = \square - \square + 2 - 5 = \square$$

2. Calculer $f(0)$ (remplacer x par 0 — les termes avec x disparaissent) :

$$f(0) = \dots\dots$$

3. Calculer $f(-1)$ en suivant la même méthode. Attention aux signes !

Rappel : $(-1)^3 = -1$ et $(-1)^2 = +1$. Le carré d'un négatif est toujours positif.

$$f(-1) = \dots\dots$$

Mes calculs :

EXERCICE 5 Dérivée — remplir le tableau

SOCLE

Formule de dérivation :

Si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Le d disparaît. On multiplie chaque coefficient par l'exposant, puis on baisse l'exposant de 1.

Compléter le tableau :

Fonction $f(x)$	a	b	c	d	Dérivée $f'(x)$
$x^3 + 2x^2 - x + 4$	?	?	?	?	?
$3x^3 - 5x + 1$	?	?	?	?	?
$-2x^3 + x^2$	?	?	?	?	?

Mes calculs :

EXERCICE 6 Lire un tableau de variations — questions guidées**SOCLE**

On donne le tableau de variations d'une fonction g :

x	-3		1		4		7
Signe g'		+	0	-	0	+	
Variations g	-5	↗	10	↘	2	↗	15

1. Quand la flèche monte (↗), la fonction est ???

2. g est croissante sur quels intervalles ? (recopier les valeurs de x où la flèche monte)

Sur [...] et sur [...]

3. La plus grande valeur atteinte par g sur le tableau est Elle est atteinte en $x =$

4. Le maximum *local* est le sommet d'une « bosse ». En quel point se situe-t-il ? Quelle est la valeur de g en ce point ?

5. L'équation $g(x) = 8$ a-t-elle des solutions ? (Comparer 8 avec les valeurs du tableau.)

Mes calculs :

EXERCICE 7 Problème guidé — volume d'un bac de rangement

SOCLE

Situation : Un menuisier fabrique un bac en découpant des carrés de côté x cm aux coins d'une plaque de $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$.

Le volume du bac est : $V(x) = x(30 - 2x)(20 - 2x)$ avec $0 < x < 10$.

1. Calculer le volume pour $x = 2$ cm. Compléter :

$$V(2) = 2 \times (30 - 2 \times 2) \times (20 - 2 \times 2)$$

$$V(2) = 2 \times \square \times \square = \square \text{ cm}^3$$

2. Compléter le tableau de valeurs avec la calculatrice :

x	1	2	3	4	5	6	7
$V(x)$	?	?	?	?	?	?	?

3. D'après le tableau, pour quelle valeur de x le volume semble-t-il le plus grand ?

Mes calculs :

EXERCICE 21 Calculer $f'(x)$ et déterminer son signe — cas simple

SOCLE

On considère $f(x) = x^3 - 3x$.

1. Calculer $f'(x)$. (Rappel : si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.)

$$f'(x) = \dots$$

2. Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de $f'(x)$. Calculer ensuite les deux racines x_1 et x_2 .

$$\Delta = \dots; x_1 = \dots; x_2 = \dots$$

3. Compléter le tableau de signes de $f'(x)$ (le coefficient de x^2 est positif) :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		0	...	0	
Variations de f			...		

Mes calculs :

EXERCICE 22 Évaluer une fonction et lire un extremum guidé

SOCLE

Un menuisier modélise la consommation électrique de son atelier (en kWh) en fonction de l'heure h (entre 0 et 8 h) par :

$$C(h) = h^3 - 6h^2 + 9h + 2$$

1. Calculer $C(0)$, $C(1)$, $C(3)$ et $C(8)$. Compléter le tableau :

h	0	1	3	8
$C(h)$				

2. La dérivée est $C'(h) = 3h^2 - 12h + 9$. Calculer $C'(1)$ et $C'(3)$.

$C'(1) = \dots$; $C'(3) = \dots$

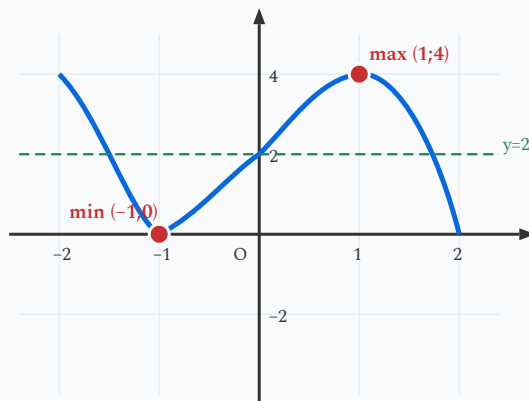
3. On sait que $C'(h) = 0$ pour $h = 1$ et $h = 3$. Parmi ces deux heures, laquelle correspond à un maximum ? À un minimum ? (Observer les valeurs du tableau.)

Maximum en $h = \dots$: $C = \dots$ kWh. Minimum en $h = \dots$: $C = \dots$ kWh.

Mes calculs :

EXERCICE 23 Lire une courbe et interpréter les extremums**SOCLE**

Le graphique ci-dessous représente la fonction $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ sur $[-2; 2]$.



En lisant le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quel semble être le maximum local de f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Maximum $\approx$ atteint en $x = \dots$

2. Quel semble être le minimum local de f ? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Minimum $\approx$ atteint en $x = \dots$

3. Combien de solutions semble avoir l'équation $f(x) = 2$ d'après le graphique ?

Nombre de solutions : ...

4. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$ pour vérifier vos lectures.

$f(-1) = \dots$; $f(1) = \dots$

Mes calculs :

EXERCICE 8 Dérivée et sens de variation ($\Delta < 0$)

STANDARD

Soit $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x - 1$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. $f'(x)$ est un polynôme de degré 2. Calculer son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ où $f'(x) = ax^2 + bx + c$.

3. D'après le signe de Δ , la dérivée $f'(x)$ a-t-elle des racines réelles ?

4. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$. Compléter le tableau ci-dessous.

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		?	
Variations de f		?	

Mes calculs :

EXERCICE 9 Compléter un tableau de variations

STANDARD

Soit $f(x) = x^3 - 3x$.

On sait que $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Les racines de f' sont donc $x = -1$ et $x = 1$.

1. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$.

2. Étudier le signe de $f'(x) = 3(x + 1)(x - 1)$ sur chaque intervalle et compléter le tableau de variations.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		?	0	?	0	?	
Variations de f	?	?	$f(-1)=?$	?	$f(1)=?$	?	?

3. En quel point f a-t-elle un maximum local ? Un minimum local ?

Mes calculs :

EXERCICE 10 Lire un tableau de variations**STANDARD**

Le tableau de variations d'une fonction f sur $[-2; 5]$ est donné ci-dessous.

x	-2		0		3		5
Signe f'		-	0	+	0	-	
Variations f	8	↘	-4	↗	6	↘	2

1. Sur quel(s) intervalle(s) f est-elle croissante ? Décroissante ?

2. f a-t-elle un minimum local ? Un maximum local ? Préciser les coordonnées du point correspondant.

3. Quelle est la valeur maximale de f sur $[-2; 5]$? En quelle valeur de x est-elle atteinte ?

4. Combien de solutions possède l'équation $f(x) = 5$ sur $[-2; 5]$?

Mes calculs :

EXERCICE 11 Étude complète d'une fonction polynôme de degré 3

APPROFONDISSEMENT

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Calculer le discriminant de $f'(x)$ et trouver ses racines x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$).

3. Factoriser $f'(x)$ sous la forme $3(x - x_1)(x - x_2)$.

4. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f .

5. Calculer $f(x_1)$ et $f(x_2)$. Préciser les extremums locaux.

Mes calculs :

EXERCICE 12 Étude complète avec représentation graphique

APPROFONDISSEMENT

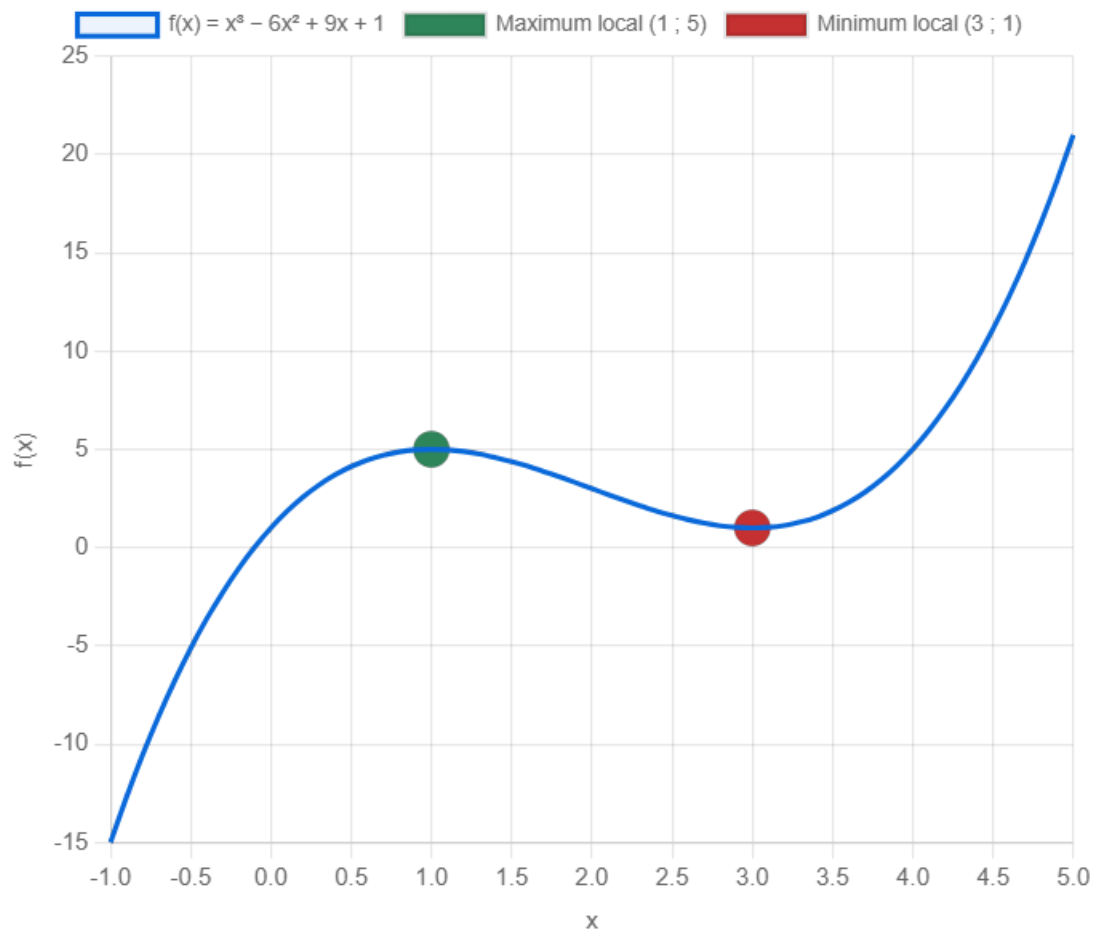
Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$. Montrer que $f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$. (Les racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$ sont données.)

2. Calculer $f(1)$ et $f(3)$.

3. Dresser le tableau de variations complet.

4. Le graphique de f est donné ci-dessous. Vérifier que les extremums lus sur le graphique correspondent au tableau de variations.



Courbe de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ sur $[-1; 5]$

5. D'après le graphique, combien de solutions possède $f(x) = 3$? Et $f(x) = -2$?

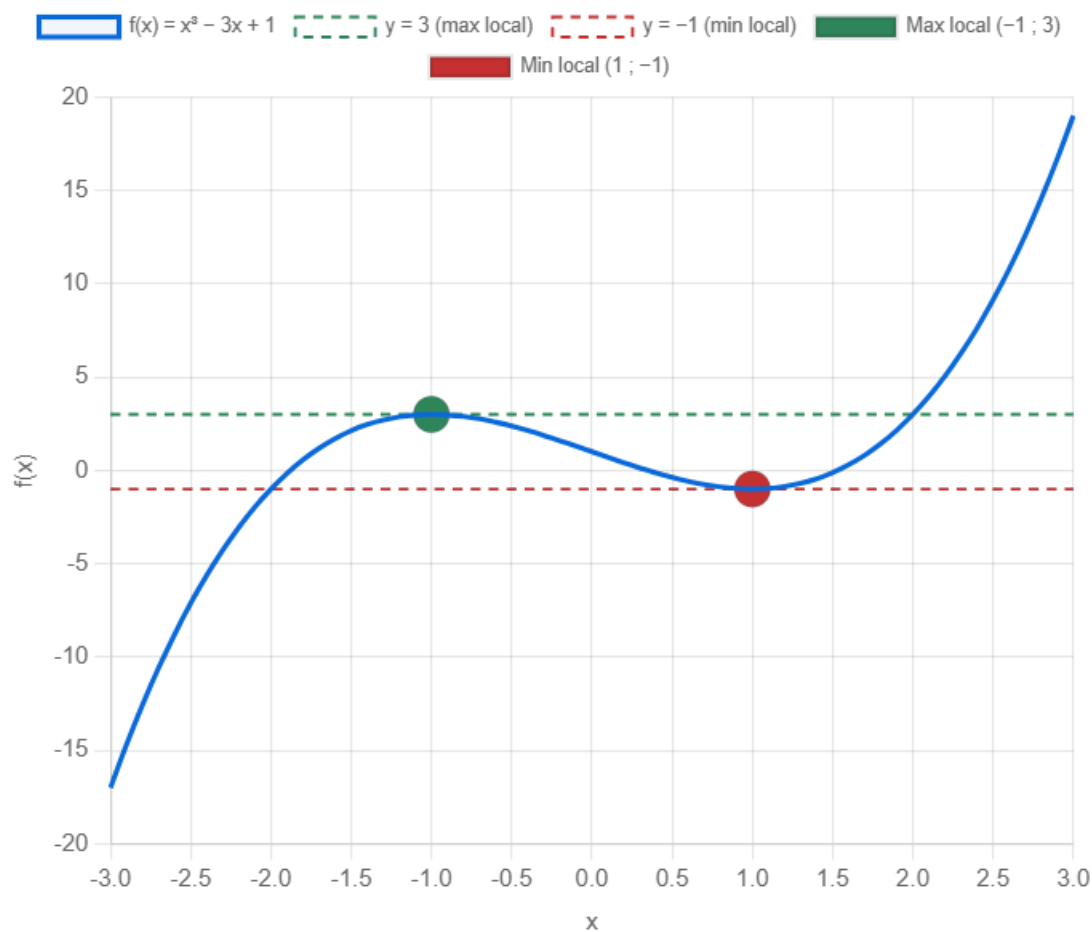
Mes calculs :

EXERCICE 13 Nombre de solutions de $f(x) = c$ — lecture graphique

APPROFONDISSEMENT

Le graphique ci-dessous représente la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[-3; 3]$.

On rappelle que f a un **maximum local** en $x = -1$: $f(-1) = 3$ et un **minimum local** en $x = 1$: $f(1) = -1$.



Courbe de $f(x) = x^3 - 3x + 1$ — Maximum local $(-1; 3)$ — Minimum local $(1; -1)$

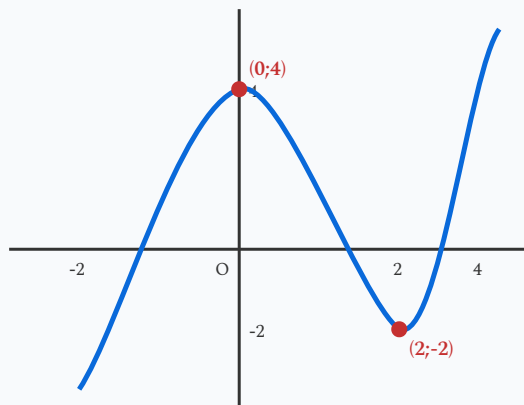
Pour chaque valeur de c , déterminer graphiquement le nombre de solutions de $f(x) = c$.

Valeur c	Position de $y = c$ par rapport à la courbe	Nombre de solutions
$c = 5$	?	?
$c = 3$	?	?
$c = 1$	?	?
$c = -1$	?	?
$c = -3$	?	?

Mes calculs :

EXERCICE 14 Lire les variations à partir d'une courbe**APPROFONDISSEMENT**

Le graphique ci-dessous représente une fonction polynôme g sur $[-2; 4]$.



On lit les informations suivantes représentées par une fonction polynôme g sur $[-2; 4]$. On lit les informations suivantes :

- La courbe part de $g(-2) = -10$ (en bas à gauche).
- Elle monte jusqu'à un maximum local en $x = 0 : g(0) = 4$.
- Elle redescend jusqu'à un minimum local en $x = 2 : g(2) = -2$.
- Elle remonte jusqu'à $g(4) = 10$.

1. Sur quel intervalle g est-elle croissante ? Décroissante ?

2. Dresser le tableau de variations de g sur $[-2; 4]$.

3. En quelle(s) valeur(s) de x a-t-on $g(x) = 0$? Combien y a-t-il de solutions à $g(x) = 0$? (Répondre graphiquement.)

4. Peut-on dire que $g'(0) = 0$ et $g'(2) = 0$? Pourquoi ?

Mes calculs :

EXERCICE 15 Optimisation du volume d'une boîte**APPROFONDISSEMENT**

Situation professionnelle : Un menuisier découpe une planche rectangulaire de $60 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$. Il retranche des carrés de côté $x \text{ cm}$ aux quatre coins, puis plie pour former une boîte ouverte.

Le volume de la boîte (en cm^3) est :

$$V(x) = x(60 - 2x)(20 - 2x) \quad 0 < x < 10$$

1. Développer pour vérifier que $V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1\,200x$.

2. Calculer $V'(x)$. Résultat donné : $V'(x) = 12x^2 - 320x + 1\,200$.
Vérifier ce résultat.

3. Calculer le discriminant de $V'(x)$ (on donne $\Delta = 44\,800$, $\sqrt{\Delta} \approx 211,7$).
Trouver les deux racines x_1 et x_2 de $V'(x)$. Laquelle appartient à $]0 ; 10[$? (Arrondir au dixième.)

4. Dresser le tableau de variations de V sur $[0 ; 10]$ et en déduire la valeur de x qui maximise le volume.

5. Calculer $V(4,5)$ (arrondir au cm^3). Interpréter le résultat.

Mes calculs :

EXERCICE 16 Puissance d'une installation de climatisation**APPROFONDISSEMENT**

Situation professionnelle : La puissance consommée (en kW) par une CTA (*Centrale de Traitement d'Air*) est modélisée en fonction du temps t (en heures) depuis sa mise en route par :

$$P(t) = -t^3 + 6t^2 + 4 \quad t \in [0 ; 6]$$

1. Calculer $P(0)$ et $P(6)$. Interpréter ces valeurs.

2. Calculer $P'(t)$. Factoriser sous la forme $-3t(t - 4)$.

3. Dresser le tableau de variations de P sur $[0 ; 6]$.

4. Calculer la puissance maximale atteinte et à quelle heure elle est atteinte.

5. L'installation doit être arrêtée si la puissance dépasse 30 kW. D'après le tableau de variations, la puissance maximale dépasse-t-elle ce seuil ?

Mes calculs :

EXERCICE 24 Extremums d'une fonction — contexte thermique

STANDARD

Contexte : Un technicien CVC modélise la température (en °C) dans une pièce en fonction du temps t (en heures, entre 0 et 4 h) après la mise en marche du chauffage par :

$$T(t) = -t^3 + 3t^2 + 5$$

1. Calculer $T'(t)$.

$T'(t) = \dots$

2. Résoudre $T'(t) = 0$. Quelles sont les valeurs de t où la température ne varie plus ?

Solutions :

3. Dresser le tableau de variations de T sur $[0 ; 4]$.

4. Quelle est la température maximale atteinte dans la pièce ? À quel moment ?

Température maximale :

Mes calculs :

EXERCICE 25 Nombre de solutions d'une équation**STANDARD**

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

On admet que $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$. Les extremums sont :
maximum local en $x = 1$ et minimum local en $x = 3$.

1. Calculer $f(1)$ et $f(3)$.

.....

2. Combien de solutions possède chacune des équations ? Justifier à l'aide du tableau de variations.

a) $f(x) = 2$ b) $f(x) = 4$ c) $f(x) = -1$

a) b) c)

Mes calculs :

EXERCICE 26 Étude complète — menuiserie d'agencement**STANDARD**

Contexte : Un menuisier agenceur calcule le bénéfice $B(x)$ (en euros) d'un chantier selon le nombre x de meubles produits (entre 0 et 6) :

$$B(x) = -2x^3 + 18x^2 - 48x + 36$$

1. Calculer $B'(x)$.

$$B'(x) = \dots$$

2. On admet que $B'(x) = -6(x - 2)(x - 4)$. Résoudre $B'(x) = 0$.

Solutions :

3. Dresser le tableau de variations de B sur $[0 ; 6]$ puis calculer $B(2)$ et $B(4)$.

4. Combien de meubles doit-il produire pour maximiser le bénéfice ? Quel est ce bénéfice ?

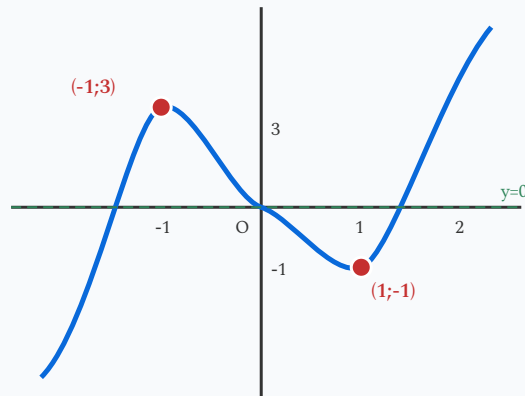
.....

Mes calculs :

EXERCICE 27 Lecture graphique — extremums et solutions

STANDARD

La courbe ci-dessous représente $g(x) = x^3 - 3x + 1$. On admet que le maximum local est en $x = -1$ et le minimum local est en $x = 1$.



1. Calculer $g(-1)$ et $g(1)$.

.....

2. Déterminer le nombre de solutions de $g(x) = 0$ en justifiant par les extremums.

.....

3. Calculer $g'(x)$ puis vérifier que $g'(-1) = 0$ et $g'(1) = 0$.

.....

4. Dresser le tableau de variations complet de g .

Mes calculs :

.....

EXERCICE 28 Optimisation — volume d'une boîte

STANDARD

Contexte : Un artisan menuisier découpe des carrés de côté x (en cm) aux quatre coins d'une plaque carrée de 12 cm de côté pour fabriquer une boîte sans couvercle. Le volume de la boîte est :

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x \quad (x \in [0; 6])$$

1. Calculer $V'(x)$.

$V'(x) = \dots$

2. On admet que $V'(x) = 4(3x^2 - 24x + 36) = 12(x - 2)(x - 6)$. Résoudre $V'(x) = 0$ sur $[0; 6]$.

Solutions :

3. Étudier le signe de $V'(x)$ sur $[0; 6]$ et dresser le tableau de variations.

4. Quelle valeur de x maximise le volume ? Calculer ce volume maximal.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 29 Puissance consommée — installation électrique

STANDARD

Contexte : Un technicien de maintenance énergétique mesure la puissance P (en kW) consommée par un bâtiment en fonction de l'heure h (entre 6 h et 22 h, soit $h \in [0 ; 16]$) :

$$P(h) = 0,1h^3 - 2,4h^2 + 14,4h$$

1. Calculer $P'(h)$.

$P'(h) = \dots$

2. Résoudre $P'(h) = 0$. On pourra factoriser $P'(h) = 0,3h(h - 8)(h - ?)$ — chercher les racines par calcul.

Solutions :

3. Calculer $P(6)$ et $P(12)$. Dresser le tableau de variations sur $[0 ; 16]$.

4. À quelle heure (entre 6 h et 22 h) la puissance est-elle maximale ? Quelle est cette puissance ?

.....

Mes calculs :

EXERCICE 30 Modèle polynôme de degré 3 — débit d'eau**STANDARD**

Contexte : Un plombier chauffagiste mesure le débit d'eau (en L/min) dans un réseau de chauffage en fonction du temps t (en heures, sur $[0 ; 5]$) :

$$D(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 2$$

1. Calculer $D'(t)$. Factoriser $D'(t)$.

.....

2. Résoudre $D'(t) = 0$. Calculer $D(1)$ et $D(3)$.

.....

3. Dresser le tableau de variations de D sur $[0 ; 5]$.

4. Quel est le débit maximal ? Le débit minimum local ? Interpréter dans le contexte.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 31 Étude complète — modèle de déformation d'une poutre

STANDARD

Contexte : Un charpentier modélise la flèche $f(x)$ (en mm) d'une poutre en bois en fonction de la position x (en cm) depuis l'appui gauche par :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x \quad x \in [0 ; 8]$$

1. Calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = \dots$$

2. On admet que $f'(x) = 3(x - 2)(x - 6)$. Résoudre $f'(x) = 0$.

Solutions :

3. Calculer $f(2)$ et $f(6)$. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 8]$.

4. En quel point la flèche est-elle maximale ? Quelle est sa valeur ?

.....

Mes calculs :

EXERCICE 32 Dérivée et signe — fonction sans extremum

STANDARD

Soit $g(x) = x^3 + x^2 + x - 5$.

1. Calculer $g'(x)$. Identifier a, b, c dans $g'(x) = ax^2 + bx + c$.

.....

2. Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Que peut-on en conclure sur le signe de $g'(x)$?

.....

3. En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$. g a-t-elle des extremums ?

.....

4. Calculer $g(0)$, $g(1)$ et $g(2)$. Vérifier que g est bien croissante.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 33 Consommation de fuel — extremums locaux**STANDARD**

Contexte : Un installateur de systèmes de chauffage modélise la consommation journalière de fuel (en litres) d'une chaudière en fonction de la température extérieure T (en °C, sur $[-5 ; 20]$) par :

$$C(T) = -T^3 + 6T^2 - 9T + 100$$

1. Calculer $C'(T)$. Résoudre $C'(T) = 0$ en factorisant.

.....

2. Calculer $C(1)$ et $C(3)$. Dresser le tableau de variations sur $[-5 ; 20]$.

3. À quelle température la consommation est-elle maximale localement ? Minimale localement ?

.....

4. Interpréter ce résultat dans le contexte professionnel.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 34 Tableau de variations à compléter — contexte professionnel

STANDARD

Contexte : Un poseur de cuisines modélise la satisfaction client $S(x)$ (score de 0 à 10) en fonction du temps x (en jours) de pose d'une cuisine (entre 1 et 7 jours) par :

$$S(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$$

1. Calculer $S'(x)$. On admet que $S'(x) = 3(x - 2)(x - 4)$. Vérifier.

.....

2. Calculer $S(2)$ et $S(4)$.

.....

3. Dresser le tableau de variations de S sur $[1 ; 7]$.

4. Quel nombre de jours de pose maximise la satisfaction client ? Interpréter.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 35 Volume de rangement — optimisation guidée

STANDARD

Contexte : Un menuisier agenceur fabrique une boîte de rangement sans couvercle à partir d'une planche rectangulaire de **40 cm × 25 cm**. Il découpe des carrés de côté x cm aux quatre coins et replie les bords. Le volume de la boîte est : $V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x)$ pour $x \in [0 ; 12,5]$.

1. Développer pour montrer que $V(x) = 4x^3 - 130x^2 + 1\,000x$.

.....

2. Calculer $V'(x) = 12x^2 - 260x + 1\,000$. Vérifier ce résultat.

.....

3. On donne $\Delta = 19\,600$ et $\sqrt{\Delta} = 140$. Calculer les deux racines de $V'(x)$. Laquelle appartient à $]0 ; 12,5[$?

.....

4. Dresser le tableau de variations de V sur $[0 ; 12,5]$ et déterminer la valeur de x qui maximise le volume.

.....

5. Calculer le volume maximal (arrondi au cm^3).

.....

Mes calculs :

.....
.....

EXERCICE 36 Dérivée et tableau de variations — coefficients décimaux

STANDARD

Soit $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.

1. Calculer $h'(x)$.

.....

2. Calculer le discriminant de $h'(x)$. Trouver les racines x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$).

.....

3. Calculer $h(1)$ et $h(2)$. Dresser le tableau de variations complet de h sur $\mathbb{R}$.

4. Préciser les extremums locaux de h (valeur et nature).

.....

Mes calculs :

.....

.....

.....

.....

.....

EXERCICE 37 Pression dans un réseau hydraulique

STANDARD

Contexte : Un plombier chauffagiste mesure la pression P (en bar) dans un circuit de chauffage en fonction du temps t (en heures, sur $[0 ; 6]$) après le démarrage de la chaudière :

$$P(t) = -t^3 + 9t^2 - 24t + 20$$

1. Calculer $P'(t)$. Résoudre $P'(t) = 0$.

.....

2. Calculer $P(2)$ et $P(4)$.

.....

3. Dresser le tableau de variations de P sur $[0 ; 6]$.

.....

4. À quelle heure la pression est-elle maximale ? Minimale localement ? Interpréter.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 38 Nombre de solutions — méthode graphique et calcul

STANDARD

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

On admet que $f'(x) = 3x(x - 2)$. Les extremums sont : maximum local en $x = 0$ et minimum local en $x = 2$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.

.....

2. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes en justifiant par le tableau de variations :

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = 2$ c) $f(x) = -2$ d) $f(x) = -1$

a) b) c) d)

Mes calculs :

EXERCICE 39 Débit de ventilation — étude sur un intervalle

STANDARD

Contexte : Un technicien CVC mesure le débit d'air (en m^3/h) d'une CTA (Centrale de Traitement d'Air) en fonction de la vitesse v (en m/s , sur $[0; 5]$) du moteur :

$$D(v) = -v^3 + 6v^2 + 2$$

1. Calculer $D'(v)$. Factoriser $D'(v)$.

.....

2. Résoudre $D'(v) = 0$ sur $[0; 5]$. Calculer $D(4)$.

.....

3. Dresser le tableau de variations de D sur $[0; 5]$.

4. À quelle vitesse le débit est-il maximal ? Quelle est cette valeur maximale ? Interpréter.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 40 Coût de production d'une série de meubles**STANDARD**

Contexte : Un fabricant de meubles modélise le coût unitaire moyen (en €/meuble) de production d'une série en fonction du nombre n de meubles produits (entre 1 et 10) par :

$$C(n) = n^3 - 15n^2 + 63n + 10$$

1. Calculer $C'(n)$. Montrer que $C'(n) = 3(n - 3)(n - 7)$. (Indication : développer et factoriser.)

.....

2. Calculer $C(3)$ et $C(7)$.

.....

3. Dresser le tableau de variations de C sur $[1 ; 10]$.

4. Pour quelle valeur de n le coût unitaire est-il minimal ? Interpréter dans le contexte.

.....

Mes calculs :

EXERCICE 17 Étude complète sans indication

APPROFONDISSEMENT

Soit $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 11$.

Mener l'étude complète de f : calculer la dérivée, trouver ses racines, dresser le tableau de variations, identifier les extremums locaux, puis tracer l'allure de la courbe.

Question complémentaire : Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ en justifiant à l'aide du tableau de variations.

Mes calculs :

EXERCICE 18 Optimisation — rendement d'une pompe à chaleur

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Le COP (Coefficient de Performance) d'une pompe à chaleur varie en fonction de la température extérieure T (en °C). Un technicien modélise le COP sur l'intervalle $[-5; 15]$ par :

$$C(T) = -0,004 T^3 + 0,06 T^2 + 0,3 T + 2,5$$

1. Calculer $C(-5)$, $C(0)$, $C(7)$ et $C(15)$. Interpréter.

2. Calculer $C'(T)$ et montrer que $C'(T) = -0,012 T^2 + 0,12 T + 0,3$.

3. Résoudre $C'(T) = 0$. Utiliser la formule du discriminant. Arrondir les racines au dixième.

4. Dresser le tableau de variations de C sur $[-5; 15]$. À quelle température le COP est-il maximal ? Quelle est la valeur de ce COP maximal ?

5. Un COP inférieur à 2 signifie que la PAC n'est plus rentable. D'après le tableau, cela peut-il se produire sur $[-5; 15]$?

Mes calculs :

EXERCICE 19 Nombre de solutions — raisonnement avec paramètre

APPROFONDISSEMENT

Soit $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

1. Montrer que $f'(x) = 3(x - 2)(x + 2)$. En déduire le tableau de variations de f .

2. Calculer les valeurs de f aux extremums locaux.

3. Pour quelles valeurs du réel k , l'équation $f(x) = k$ admet-elle :

- a) exactement 3 solutions ?
- b) exactement 2 solutions ?
- c) exactement 1 solution ?

Mes calculs :

EXERCICE 20 Optimisation du coût de production — approche BTS

APPROFONDISSEMENT

Contexte : Une entreprise de fabrication de gaines de ventilation modélise son coût total de production (en euros) pour x mètres de gaine par :

$$C(x) = 0,5x^3 - 15x^2 + 200x + 500 \quad x \in [5 ; 25]$$

1. Calculer le *coût moyen* $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ pour $x = 10$ et $x = 20$.

2. Étudier les variations de C : calculer $C'(x)$, trouver ses racines, et dresser le tableau de variations sur $[5 ; 25]$.

3. Calculer le *coût marginal* $C'(10)$. Interpréter : que représente cette valeur ?

4. Le prix de vente est de **80 €/m**. La recette est donc $R(x) = 80x$. Montrer que le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$ est un polynôme de degré 3 et étudier son signe.

Mes calculs :

Fonctions polynômes de degré 3

Polynômes de degré 3 | Tle Pro

Socle

Standard

Approfondissement

Tout voir



Objectifs du chapitre

[cliquer pour développer](#)

Durée : 1 heure



Calculatrice : autorisée



Barème : 20 points



Documents : non autorisés

Convention du chapitre — méthode du discriminant Pour résoudre $f'(x) = 0$, ce chapitre utilise la **méthode du discriminant**, qui ne figure pas au programme du Bac Pro : le programme attend une **factorisation** (racine évidente) ou l'usage de l'**outil numérique**. Le discriminant est assumé ici en **anticipation du BTS**, où il est indispensable. En évaluation certificative, une résolution par factorisation ou outil numérique est tout aussi valable.

Exercice 1 – Calculer des images et dériver

10 points

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1. (2 pts) Calculer $f(0)$ et $f(1)$ en remplaçant x dans la formule.

$$f(0) = (0)^3 - 3 \times (0)^2 + 4 = \dots\dots$$

$$f(1) = (1)^3 - 3 \times (1)^2 + 4 = \dots\dots$$

2. (2 pts) Calculer $f(2)$ et $f(-1)$.

3. (2 pts) Calculer la dérivée $f'(x)$.

Rappel : si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Ici $a = \dots$, $b = \dots$, $c = \dots$, $d = \dots$

$$f'(x) = 3 \times \dots \times x^2 + 2 \times \dots \times x + \dots = \dots\dots\dots$$

4. (2 pts) On admet que $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Compléter le tableau de signes :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $3x$		?	0	?		?	
Signe de $(x - 2)$		?		?	0	?	
Signe de $f'(x)$		?	0	?	0	?	

5. (2 pts) D'après le tableau de signes, compléter le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Variations de f		/ ou \ ?	$f(0) = ?$	/ ou \ ?	$f(2) = ?$	/ ou \ ?	

Exercice 2 – Volume d'une boîte (guidé)

10 points

Un menuisier découpe des carrés de côté x cm aux quatre coins d'une plaque de **24 cm** $\times$ **16 cm**, puis plie pour former une boîte ouverte.

1. (1 pt) Quelles sont les dimensions de la boîte après pliage ? Compléter :

Longueur = $24 - 2 \times x = \dots\dots$ cm ; Largeur = $16 - 2 \times x = \dots\dots$ cm ; Hauteur = ... cm

2. (1 pt) Quelle est la contrainte sur x ? (x doit être positif et inférieur à la moitié du plus petit côté.)

3. (2 pts) Calculer le volume $V(x) = x \times (24 - 2x) \times (16 - 2x)$ pour $x = 2$ et $x = 3$.

$$V(2) = 2 \times (24 - 4) \times (16 - 4) = 2 \times \dots \times \dots = \dots\dots \text{ cm}^3$$

$$V(3) = 3 \times \dots \times \dots = \dots \text{ cm}^3$$

4. (2 pts) Compléter le tableau de valeurs avec la calculatrice :

x	1	2	3	4	5	6	7
$V(x)$	?	?	?	?	?	?	?

5. (2 pts) D'après le tableau, pour quelle valeur entière de x le volume semble-t-il maximal ?
Quel est ce volume ?

6. (2 pts) On admet que $V'(x) = 12x^2 - 160x + 384$ et que $V'(x) = 0$ pour $x \approx 3,2$. Calculer $V(3,2)$ (arrondir au cm^3). Interpréter.

Exercice 1 – Étude d'une fonction polynôme de degré 3

10 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

1. (2 pts) Calculer $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.

2. (2 pts) Déterminer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f .

3. (2 pts) Résoudre $f'(x) = 0$. En déduire les valeurs de x pour lesquelles f admet un extremum.

4. (2 pts) Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-1 ; 5]$.

5. (2 pts) En déduire le maximum et le minimum de f sur $[-1 ; 5]$. Préciser les valeurs de x correspondantes.

Exercice 2 – Optimisation d'un volume

10 points

Un artisan menuisier fabrique des boîtes de rangement ouvertes à partir de plaques rectangulaires de contreplaqué de dimensions 30 cm sur 20 cm. Il découpe un carré de côté x (en cm) à chaque coin, puis replie les bords pour former la boîte.

1. (1 pt) Quelles sont les contraintes sur x ? Donner l'intervalle de définition.

2. (2 pts) Montrer que le volume de la boîte, en cm^3 , est donné par $V(x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$.

3. (2 pts) Calculer $V'(x)$, la dérivée de V .

4. (3 pts) Résoudre $V'(x) = 0$. Parmi les solutions, laquelle appartient à l'intervalle de définition ? Vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.

5. (2 pts) Calculer le volume maximal de la boîte. Arrondir au cm^3 . Donner les dimensions de la boîte correspondante.

Exercice 1 – Étude complète d'une fonction

10 points

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$.

1. (2 pts) Calculer $g'(x)$.

2. (3 pts) Résoudre $g'(x) = 0$. Factoriser $g'(x)$ et dresser le tableau de variations complet de g sur $\mathbb{R}$.

3. (2 pts) Déterminer les extremums locaux de g . Préciser leur nature (maximum ou minimum) et les coordonnées des points correspondants.

4. (3 pts) Pour quelles valeurs du réel k , l'équation $g(x) = k$ admet-elle exactement 3 solutions ? Exactement 1 solution ? Justifier à l'aide du tableau de variations.

Exercice 2 – Optimisation du rendement énergétique

10 points

Le rendement η (en %) d'un échangeur thermique est modélisé en fonction du débit d (en m^3/h) par :

$$\eta(d) = -d^3 + 9d^2 - 15d + 50 \quad d \in [1 ; 7]$$

1. (2 pts) Calculer $\eta(1)$ et $\eta(7)$. Interpréter ces valeurs dans le contexte.

2. (2 pts) Calculer $\eta'(d)$ et vérifier que $\eta'(d) = -3(d - 1)(d - 5)$.

3. (3 pts) Étudier le signe de $\eta'(d)$ sur $[1 ; 7]$ et dresser le tableau de variations de η .

4. (1 pt) Quel débit maximise le rendement ? Quel est ce rendement maximal ?

5. (2 pts) Le cahier des charges impose un rendement supérieur à 60 %. D'après le tableau de variations, pour quelles valeurs de d cette condition est-elle remplie ? Justifier.
