

Espaces vectoriels normés 2 – TD₁₁

Suites de matrices

Exercice 1 : Applications continues usuelles

Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que l'application transposition est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
3. Soit $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto PMP^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Soit $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \times \text{GL}_p(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\psi : M \mapsto PMQ^{-1}$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
5. Montrer que l'application $B : (M, N) \mapsto MN$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
6. Montrer que l'application $f : M \mapsto M^2$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2

On note $A = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la convergence de la suite (A^n) .
2. Étudier la convergence de la série de terme général A^n .

Indication : Étudier la suite des sommes partielles définies par $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$ si, et seulement si, A est une matrice de projecteur.

Exercice 4

1. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que cette suite est stationnaire.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que si la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle, alors A est nilpotente.

Exercice 5

On pose $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 8 & -7 & 2 \\ 9 & -9 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Trigonaliser la matrice A .
2. En déduire que A est limite d'une suite de matrices diagonalisables.
3. Généraliser ce qui précède à une matrice M trigonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2$ tel que $(A \times B)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_p$.

Montrer que $(B \times A)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_p$.

Exercice 7

Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des fermés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que sa limite est nulle.

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Exercice 8

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

$$1. f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x \times y}{x^2 + y^2};$$

$$4. f_4 : (x, y) \mapsto \frac{x \times y}{x - y};$$

$$7. f_7 : (x, y) \mapsto \frac{\sin(x \times y)}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$2. f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 \times y^2}{x^2 + y^2};$$

$$5. f_5 : (x, y, z) \mapsto \frac{x \times y + y \times z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2};$$

$$8. f_8 : (x, y) \mapsto \frac{x^4 + y^2}{x \times y};$$

$$3. f_3 : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$$

$$6. f_6 : (x, y) \mapsto \frac{1 - \cos(x \times y)}{x \times y^2};$$

$$9. f_9 : (x, y) \mapsto \frac{x + 2y}{x^2 - y^2}.$$

Exercice 9

Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right) \times \ln(1 + x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Fonctions entre deux espaces vectoriels normés

Exercice 11

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

Montrer que l'application $x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|} \cdot x$ est continue sur E .

Exercice 12

1. Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right)$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}_- \times \{0\})$.

2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{\sin(x)}{x}, \frac{\ln(1 + 2x)}{x}, \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \right)$ est prolongeable par continuité en 0.

3. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme ∞ . Montrer que l'application $t \mapsto \left\| \begin{pmatrix} 2e^{-t} & (t-1)^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et tracer son graphe.

Topologie

Exercice 13

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

2. En déduire l'adhérence de $GL_n(\mathbb{K})$.

3. Dans cette question, on suppose A inversible. Montrer que $\chi_{A \times B} = \chi_{B \times A}$.

4. En déduire que $\chi_{A \times B} = \chi_{B \times A}$ dans le cas général.

Exercice 14

Les parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivantes sont-elles fermées ? ouvertes ? (Justifier)

1. L'ensemble $\mathcal{T}_n$ des matrices de traces nulles
2. L'ensemble $\mathcal{H}_n$ des matrices d'homothéties.
3. L'ensemble $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices inversibles.
4. L'ensemble $\mathcal{D}_n$ des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
5. L'ensemble $\mathcal{P}_n$ des matrices de projecteurs.

Exercice 15

On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.

Pour tout $f \in E$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad \text{et} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| \, dt.$$

1. Soit $f \in E$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, on note :

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) \times (1 - nx) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer $\|f_n - f\|_1$.

2. En déduire que F est dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Étudier la densité de F dans E pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.